Foth, R.

Anfangsgründe der Zahlen und Raumgrößen-Lehre im Auftrage der Königlichen General-Inspection der Artillerie zum Gebrauch als Leitfaden bei dem mathematischen Unterrichte in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte verfaßt

Hannover 1873

Ka Foth

Anfangsgründe

der

Zahlen- und Raumgrößen-Lehre.

Im Auftrage

der Königlichen General-Inspection der Artillerie

zum Gebrauch als

Leitfaden

bei dem mathematischen Unterrichte in den Regiments-Schulen der Artillerie, sowie zur Benutzung beim Selbstunterrichte

verfaßt

von

R. Foth,
Feuerwerks-Lieutenant.

Zweite vermehrte Auflage.

Hannover.
Carl Meyer.
1873.

Hofbuchdruckerei der Gebr. Jänecke in Hannover.

Seiner Excellenz

Herrn von Hindersin,

weiland

General der Infanterie und General-Inspecteur der Artillerie,

Ritter höchster Orden,

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorwort zur ersten Auflage.

Bei der Ausarbeitung des vorliegenden von der Königlichen General-Inspection der Artillerie vor dem Druck geprüften Leitfadens habe ich vorzugsweise die Bedürfnisse der minderbegabten und mit geringen Vorkenntnissen ausgerüsteten Schüler vor Augen gehabt. Auch soll derselbe dem Schüler nicht allein während der Schulzeit einen sicheren Anhalt bieten, sondern ihm auch in späterer Zeit, wenn der lebendige Vortrag des Lehrers nicht mehr treu im Gedächtnisse ist, noch leicht verständlich sein, und ferner soll er selbst denjenigen Avancirten, welche nicht Gelegenheit hatten, die Regiments-Schule zu besuchen, aber Strebsamkeit und Ausdauer besitzen, ein ausreichendes Mittel an die Hand geben, sich daraus selbst zu unterrichten.

Aus diesen Gründen durfte bei allem Streben nach Kürze kein bloßes Gerippe, es mußte vielmehr eine zusammenhängende Darstellung des Lehrstoffes gegeben werden. Ferner erklärt sich hieraus, warum — besonders in der Zahlenlehre — die dem einfachen Verstande nahe liegende, möglichst auf Anschauung beruhende Herleitungs- und Begründungsweise und nicht die abstract wissenschaftliche gewählt worden ist.

Die Anwendung der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen ist zwar nicht ganz vermieden, aber es ist mit großer Vorsicht dafür gesorgt worden, daß auch die Schüler dem Unterrichte folgen können, welchen es nicht gelingt, sich in ein genügendes Verständniß dieser Bezeichnungsweise hineinzufinden. Diese Rücksicht hielt ich im Interesse der Mehrzahl der zu Unterrichtenden für durchaus geboten. Aber selbst für die talentvolleren und für diejenigen Schüler, welche schon mathematische Vorkenntnisse besitzen, wird es nicht ohne Nutzen sein, sich mit der elementar-anschaulichen Unterrichtsmethode recht innig vertraut zu machen; denn sie werden später fast sämmtlich selbst als Lehrer zu wirken haben und dann bald den Werth derselben schätzen lernen.

Um diesen Schülern jedoch auch Anregung zu weiterer Uebung ihrer Geisteskräfte zu geben, ist in den kleiner gedruckten Zusätzen und Anhängen, sowie in den geometrischen Uebungen ein auch für sie während der Schulzeit ausreichender Stoff geboten worden. Wie weit hierbei der Lehrer erläuternd und helfend einzugreifen hat, muß seinem Ermessen überlassen bleiben. Nur darf in keinem Falle über

der angenehmeren Beschäftigung mit der Minderzahl der bevorzugten Köpfe die mühsamere aber auch wichtigere Sorge für die Mehrzahl vernachlässigt werden.

Der Erfolg des Unterrichtes wird indessen nur zum kleineren Theile von dem dabei benutzten Leitfaden abhängen; größeren Einfluß übt die Lehrmethode und das persönliche Auftreten des Lehrers.

Die Lehrmethode kann in einem kurzgefaßten Lehrbuche nur in den Grundzügen gegeben, in der speciellen Ausführung nur angedeutet sein. Darum für jüngere Lehrer noch einige Worte hierüber:

Der Unterricht in der Mathematik hat einen doppelten Zweck:

Zunächst soll er dem Schüler das geben und möglichst unverlierbar einprägen, was derselbe von dieser Wissenschaft für seinen Beruf und für das praktische Leben braucht. Hierauf ist bei der Auswahl des Stoffes sorgfältig Rücksicht genommen worden. Das speciell Hierhergehörige, also insbesondere das sogenannte bürgerliche Rechnen, muß daher nicht allein zum klaren Verständniß gebracht, sondern mehr noch als das Andere durch beharrliches Wiederholen und Einüben des Erlernten zu bleibendem Eigenthum des Schülers gemacht werden. Keine Lehrstunde darf vergehen, in welcher nicht das zuletzt Vorgetragene und selbst ein Theil des früher Erlernten methodisch geordnet repetirt wird. An keinem Tage darf es den Schülern an Uebungsaufgaben, unter welchen auch stets Wiederholungsaufgaben sich befinden müssen, fehlen. Dabei wache der Lehrer aber auch darüber, daß er nicht bloß mechanische Rechner bilde, die zwar mit der Zeit eine Reihe von Aufgaben lösen lernen, aber augenblicklich in Verlegenheit gerathen, wenn ihnen ein Fall vorkommt, für den sie nicht abgerichtet sind. Um dem entgegen zu wirken, lasse er sich recht oft die Lösungen der Aufgaben laut und ausführlich in folgerichtigen Schlüssen darlegen. Dabei lernen die Schüler mehr an einer Aufgabe, als an zehn anderen, die sie gedankenlos nach einem Schema rechnen.

Der mathematische Unterricht soll aber auch zur Ausbildung des Verstandes benutzt werden, und hierzu ist er ein ganz vorzügliches Hülfsmittel. Er soll den Schüler zu einem folgerechten, einfach und klar gegliederten Denken anleiten, ihm Selbstvertrauen in die eigene Geisteskraft erwecken und ihn an Gründlichkeit gewöhnen. Nur so weit es gelingt, diesen höheren Zweck zu erreichen, wird der Nutzen des Unterrichtes ein wesentlicher sein und auch dann noch fortbestehen, wenn ein großer Theil des Erlernten wieder vergessen ist.

Die Regimentsschule hat nicht die Aufgabe spätere Mathematiker, sondern für den praktischen Beruf tüchtige, geistig regsame Männer vorzubilden, welche das in der Schule Erlernte auf die Verhältnisse des wirklichen Lebens zu übertragen verstehen und bei allen Gelegenheiten, besonders aber in schwierigen Verhältnissen, nicht nur ihr Gedächtniß, sondern auch ihren Verstand zu Rathe zu ziehen gewöhnt sind. Die Grundgesetze des Denkens sind überall dieselben.

Dies sei die Richtschnur für jeden Lehrer! Die Wege zum Ziele können und werden nach der Individualität des Lehrers mehr

oder weniger von einander abweichen; das zu erstrebende Ziel ist für alle dasselbe.

Nach meinen Erfahrungen wird dieses Ziel am sichersten und leichtesten erreicht, wenn der Lehrer nur selten und nie lange in fortlaufender Rede spricht, sondern den Lehrstoff in logisch geordnete Fragen zergliedert und dabei mit Umsicht an die Fassungskraft und den meistentheils nur engen Kreis der Begriffe und Vorstellungen seiner Schüler anknüpft. Durch das Aufsuchen der Antworten wird dann das Denkvermögen der Schüler unmittelbar in Anspruch genommen und im selbstthätigen Urtheilen und Erfinden geübt.

Zuerst müssen die Antworten nahe liegen und leicht zu finden sein. Dies erweckt Selbstvertrauen und Liebe zur Sache. Mit dem allmäligen Wachsen der Kraft verändert sich auch die Frageweise und giebt immer mehr Gelegenheit zu umfassenderen Antworten. Stets halte der Lehrer aber darauf, daß die Antworten vollständig und in durchaus correctem Ausdruck gegeben werden.

Also: Stets Anregung zum Selbstfinden, möglichst wenig Gedächtnißwerk. Nur das Selbsterworbene wird sicheres Eigenthum. Es darf auch nicht darauf ankommen, möglichst viel Kenntnisse und Fertigkeiten beizubringen, werthvoller ist es, weniger zu geben und dies recht gründlich zu behandeln. Nur dadurch kann man zur Gründlichkeit gewöhnen. Und dies ist unendlich wichtig. Oberflächliches Wissen schadet oft mehr als es nützt.

Dieses Zerlegen des Unterrichtsstoffes in Fragen, die sich stets der Fähigkeit des Schülers und dann wieder seinen Antworten anpassen, also keine feststehenden sein können, ist nicht ganz leicht, aber die darin erlangte Uebung lohnt reichlich die aufgewendete Mühe. Einige Andeutungen dazu sollen die im zweiten Theile enthaltenen „Anleitungen zu den Beweisen“ geben.

Vielleicht findet die hier gebotene Darstellung des Theiles der Elementar-Mathematik, welcher vorzugsweise für das praktische Bedürfniß von Werth ist, auch außerhalb des Kreises, für welchen sie zunächst bestimmt ist, Freunde. Insbesondere glaube ich dieses Büchlein allen den erwachsenen Personen zur Benutzung beim Auffrischen oder Vervollständigen des früher Erlernten empfehlen zu dürfen, die nach einem kurz gefaßten und doch leicht faßlich geschriebenen Leitfaden für die „Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrößenlehre“ suchen.

Mittheilungen über etwa stehengebliebene Druckfehler oder sonstige Mängel werde ich jederzeit mit aufrichtigem Danke entgegennehmen.

Metz, im Februar 1871.

Der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die wider Erwarten in so kurzer Zeit nöthig gewordene zweite Ausgabe des vorliegenden mathematischen Leitfadens ist nach dem fast allgemein von den Brigade- beziehungsweise Regimentsschulen ausgesprochenen Wunsche — auf Anordnung der Königlichen General-Inspection der Artillerie — um einen kurzen Abriß der Lehre von den einfachen Gleichungen und um eine nicht unerhebliche Zahl neuer Uebungsaufgaben der Zahlenlehre vermehrt worden. Von einer noch ausgedehnteren Vermehrung der Uebungsaufgaben glaubte der Verfasser zu seinem Bedauern Abstand nehmen zu müssen, weil es sonst dem Herrn Verleger nicht möglich gewesen wäre, das vermehrte und ohnehin sehr billige Buch — ungeachtet der Erhöhung des Papierpreises und der außerordentlichen Steigerung der Setzerlöhne — ohne Preiserhöhung abgeben zu können, und er glaubte sich diese Einschränkung auch ohne Bedenken auferlegen zu dürfen, da der Erfahrung nach die meisten Lehrer — aus sehr naheliegenden Gründen — doch noch zu selbst gestellten oder aus anderen Büchern entnommenen Aufgaben greifen.

Die Lehre von den Gleichungen ist zwar ans Ende der Zahlenlehre gestellt worden, doch wird der umsichtige Lehrer gewiß wenigstens einen Theil derselben schon vorher an geeigneter Stelle einzuschalten wissen.

Daß in der neuen Auflage das neue Münzsystem volle Berücksichtigung gefunden hat, ist selbstverständlich; doch schien es geboten, das Rechnen nach der Thalerwährung noch nicht ganz fortzulassen, weil wohl noch eine geraume Zeit vergehen wird, bevor die alten Münzen ganz aus dem Verkehre verschwunden sein werden.

So übergebe ich denn dies Büchlein auf's neue den Schülern der Regimentsschulen, den Avancirten der Artillerie und seinen sonstigen — wie es scheint schon ziemlich zahlreichen — Freunden mit dem Wunsche, daß es zur Erweckung und Beförderung einer nach Gründlichkeit strebenden Geistesthätigkeit möglichst viel beitragen möge.

Hannover, im August 1873.

Der Verfasser.

Inhalt.

Druckfehler-Berichtigung.

Im 1. Theil.

Seite	28,	Zeile	22	von oben,	lies	**Analogie**	statt	Anologie.
„	51	„	19	„ unten	„	**Division**	„	Divison.
„	53	„	1	„ „	„	$\frac{8}{9} \times \frac{3}{2}$	„	$\frac{8}{9} = \frac{3}{2}$.
„	112	„	14	„ „	„	~~13~~	„	13.
„	139	„	5	„ oben	„	**8**	„	7.
„	156	„	19	„ unten	„	**dm**	„	dc.
„	159	„	8	„ „	„	**360$^5/_7$ Ltr.**	„	300$^5/_7$ Ltr.

Im 2. Theil.

Seite	47,	Zeile	12	von unten,	lies	$\measuredangle\, \beta^{I}$	statt	β^{I}.
„	54	„	16	„ oben,	„	**hier**	„	hie.
„	92	„	21	„ unten	„	$\frac{1}{n}$ **AB**	„	$\frac{1}{n}$, AB.

Erster Theil.

Zahlenlehre.

Einleitung.

1) Die Mathematik lehrt die Gesetze, welche sich bei der Betrachtung und Vergleichung der Größen ergeben.

2) Unter Größe versteht man Alles, wobei eine Vermehrung und Verminderung denkbar ist.

3) Jede Größe kann man sich wiederholt genommen denken und dadurch eine neue Größe erzeugen; zugleich läßt sich auch jede Größe entstanden denken durch wiederholtes Nehmen eines Theiles von ihr. Wie oft eine Wiederholung stattfindet oder gedacht wird, wird durch Zahlen ausgedrückt. Die wiederholt genommene Größe wird eine Einheit genannt.

Anmerkung. Der Begriff der Zahl ist ein einfacher oder Grundbegriff; er kann daher nicht streng erklärt, d. h. in noch einfachere Begriffe zerlegt werden.

4) Die Zahl selbst gehört zwar nicht zu den eigentlichen Größen; sie ist aber ein so wichtiges Hülfsmittel beim Vergleichen derselben, daß die Lehre von ihr und ihrer Anwendung sich zu einem Haupttheile der Mathematik herausgebildet hat. Man unterscheidet hiernach in der Mathematik:

I. die Zahlenlehre oder Arithmetik, und
II. die eigentliche Größenlehre.

Letztere zerfällt eigentlich in so viele Theile als es besondere Arten von Größen giebt, doch wird gewöhnlich — im engeren Sinne — nur die Raumgrößenlehre oder Geometrie dazu gerechnet.

5) Größen heißen gleichartig, wenn sie in allen oder doch in den Merkmalen übereinstimmen, welche man in Betracht zieht, anderenfalls werden sie ungleichartig genannt. Dieselben Größen können in einer Hinsicht gleichartig, in einer anderen ungleichartig sein. Fragt man z. B.: Wieviel Bäume stehen in diesem Garten? so werden alle darin vorhandenen Bäume als gleichartige Größen angesehen, wenn auch vielleicht ein Theil derselben Apfel-, ein anderer Birnbäume sind. Fragt man dagegen nach den Baumarten, so sind in Bezug auf diese Frage Apfelbäume und Birnbäume ungleichartige Größen.

6) Ist man berechtigt eine Größe für eine andere zu setzen, so sagt man, die beiden Größen seien einander gleich. So sind z. B. hundert Pfennige einer Mark gleich. Die Gleichheit zweier Größen A und B wird bildlich ausgedrückt, indem man schreibt: A = B. Eine solche Verbindung heißt Gleichung; A wird die linke, B die

rechte Seite der Gleichung genannt und das Zeichen „=" führt den Namen Gleichheitszeichen. Aus dieser Erklärung geht hervor, daß man statt A = B, auch B = A schreiben darf.

7) Sind zwei gleichartige Größen A und B nicht gleich, so heißt A größer als B und B kleiner als A, wenn zur Größe B noch etwas hinzugefügt werden muß, wenn sie A gleich werden soll. Das Zeichen für ungleich ist: > und <, wobei man die Oeffnung desselben der größeren und die Spitze der kleineren Größe zukehrt. Man schreibt also:

für A größer als B in Zeichen: A > B,
„ A kleiner als B in Zeichen: A < B.

8) Die Mathematik leitet alle ihre Erkenntnisse aus einigen einfachen, jedem Menschen an sich klaren Grundbegriffen (s. Anm. zu 3) und aus einigen so einleuchtenden und unbestreitbaren Wahrheiten ab, daß Niemand an deren Richtigkeit zweifeln kann. Solche Wahrheiten werden Grundsätze oder Axiome genannt. Dergleichen sind:

Jede Größe ist sich selbst gleich.
Das Ganze ist größer als jeder Theil von ihm.
Zwei Größen, welche derselben dritten Größe gleich sind, sind einander gleich.

Erster Theil.

Zahlenlehre.

Erster Abschnitt.

Vorbegriffe. Dekadisches Zahlensystem.

§. 1.

Jede Zahl ist der Inbegriff einer Menge von Einheiten. Ist ihr der Name der zu Grunde liegenden Einheit beigefügt, so heißt sie eine benannte Zahl, z. B. 5 Mark; ist dies nicht der Fall, so wird sie eine unbenannte Zahl genannt, z. B. 2, 3, 4. Die Einheit der unbenannten Zahl heißt Eins oder ein Einer.

§. 2.

Für jede Zahl bedürfen wir eines Namens (ein Zahlwort): eins, zwei, drei u. s. w. und eines Schriftzeichens: 1, 2, 3 u. s. w. Die Schriftzeichen für bestimmte Zahlen heißen Ziffern.

§. 3.

Viele Gesetze der Zahlenlehre gelten nicht nur für bestimmte, sondern allgemein für alle Zahlen, z. B. das Gesetz: Wenn man von einer Zahl eine beliebige Menge Einheiten fortnimmt und dann ebenso viele Einheiten wieder hinzulegt, so bleibt diese Zahl unver-

ändert. Um diese Gesetze kurz und doch bestimmt und anschaulich ausdrücken zu können, hat man neben den Ziffern noch Zahlzeichen eingeführt, bei welchen man sich jede beliebige Zahl denken darf, und dazu die Buchstaben a, b, c . . . n u. s. w. gewählt. Spricht man dann von den Zahlen a, b, n u. s. w., so heißt dies, man solle sich unter a eine beliebige Zahl, unter b eine andere, unter n eine dritte beliebige Zahl denken u. s. w.

Auch benutzt man die Buchstaben — gewöhnlich die letzten des Alphabets x, y, z — zur Bezeichnung von bestimmten, aber noch unbekannten, erst zu findenden Zahlen.

§. 4.

Denkt man sich alle Zahlen dadurch entstanden, daß man zu der Eins eine Eins hinzufügt, zu der erhaltenen Zahl wieder eine Eins u. s. w., so erscheinen sie in einer bestimmten Reihenfolge, welche die natürliche Zahlenreihe genannt wird. Diese Reihe fängt mit Eins an und geht ohne Ende fort.

§. 5.

Es giebt also unendlich viele Zahlen. Wirklich gebraucht wird allerdings nur eine beschränkte Anzahl derselben, aber auch schon diese ist so groß, daß es unmöglich wäre, für jede derselben einen vollständig neuen Namen und ein neues Zeichen dem Gedächtnisse einzuprägen. Es mußte daher schon frühzeitig eine Aufgabe des menschlichen Nachdenkens werden, aus einigen Zahlzeichen und Namen die anderen möglichst einfach zusammenzusetzen. Bei der Lösung dieser Aufgabe betrat man verschiedene Wege und erreichte mehr oder weniger vollkommen seinen Zweck. Mit der Zeit fand aber bei allen gebildeten Völkern folgende überraschend einfache und doch höchst sinnreiche Vorschrift für das Bilden der Zahlzeichen und Zahlnamen Eingang:

Für jede der zehn ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe merke zunächst einen besonderen Namen:

eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn

und für jede der neun ersten Zahlen ein besonderes Schriftzeichen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Enthält nun eine Zahl mehr als zehn Einer (stelle Dir z. B. eine bedeutende Menge Pfennige vor), so denke Dir erst zehn Einer abgezählt und als besonderes Häufchen oder Gruppe abgesondert hingelegt, dann wieder zehn Einer, hierauf nochmals zehn Einer abgezählt und so fort, bis zuletzt keine oder weniger als zehn Einer übrig bleiben. Jede Vereinigung (Gruppe) von zehn Einern wollen wir einen Zehner (ein Zig) oder eine Einheit der ersten Ordnung nennen und die Anzahl der etwa zuletzt übrig gebliebenen Einer uns merken; z. B.

6 Einer, abgekürzt: 6 E.

Hierzu reichen die angeführten Zahlzeichen aus, weil offenbar nie mehr als neun Einer übrig bleiben können.

Jetzt verfahre mit den Zehnern wie vorher mit den Einern, vereinige je zehn Zehner zu einer neuen größeren Gruppe, nenne jede derselben einen Hunderter, oder eine Einheit der zweiten Ordnung, schreibe die etwa übrig bleibenden Zehner links neben die Einer und setze zwischen Einer und Zehner das Zeichen +, ausgesprochen: plus, welches andeuten soll, daß die Zehner zu den Einern hinzuzufügen sind (§. 13); z. B.

3 Zehner + 6 Einer, oder abgekürzt: 3 Z. + 6 E.

Hierauf vereinige wieder je zehn Hunderter zu einer neuen größeren Gruppe, nenne jede einen Tausender oder eine Einheit der dritten Ordnung und schreibe die etwa übrig bleibenden Hunderter links neben die Zehner; z. B.

5 H. + 3 Z. + 6 E.

So fortschreitend bilde nach und nach — immer zehn Einheiten der höchsten vorhandenen Ordnung zu einer Einheit der nächst höheren Ordnung zusammenfassend — die Ordnungen der: Zehntausender, Hunderttausender, Millioner (= zehn Hunderttausender), Zehnmillioner, ... Billioner (= zehn Hunderttausendmillioner) . . . Trillioner (= zehn Hunderttausendbillioner) u. s. w. Dieses Abzählen und Gruppiren wird stets dadurch ein Ende finden, daß zuletzt von der höchsten erhaltenen Ordnung weniger als zehn Einheiten vorhanden sind. Die von den verschiedenen Ordnungen übrigbleibende Anzahl Einheiten schreibe dabei stets links neben die Einheiten der nächst niederen Ordnung, z. B.

2 M. + 6 H. T. + 3 Z. T. + 7 T. + 5 H. + 3 Z. + 6 E.

Dies giebt schon eine sehr kurze und einfache Bezeichnung der Zahlen; gewöhnlich läßt man aber auch noch die Zeichen + und die Namen der Ordnungs-Einheiten fort, schreibt obige Zahl kurz:

2637536

und merkt sich nur, daß in der ersten Stelle zur rechten Hand die Einer stehen, dann links die Zehner, hierauf die Hunderter u. s. w. folgen.

In jeder nach dieser Vorschrift geschriebenen Zahl besitzt also jede Ziffer zweierlei Werthe: einen Ziffern- und einen Stellenwerth. In obenstehender Zahl bezeichnet z. B. die Ziffer 5 fünf Einheiten und weil sie, von rechts nach links gezählt, in der dritten Stelle steht, so sind diese Einheiten Hunderter.

§. 6.

Die zuletzt angegebene abgekürzte Schreibweise (2637536) kann ohne Weiteres aber offenbar nur dann angewendet werden, wenn von den Einern ab bis zu der höchsten vorkommenden Ordnung hin keine einzige Ordnung fehlt. Denn sind z. B. beim Bilden der Zehner 6 Einer, dann beim Bilden der Hunderter keine Zehner übrig geblieben, hätte man z. B. 5 H. + 6 E. erhalten und man wollte abgekürzt 56 schreiben, so würden die 5 Hunderter als 5 Zehner

gelten. Das Mißverständniß verschwindet aber sofort, wenn man auf irgend eine Weise sichtbar macht, daß zwischen 6 und 5 eine Ordnung fehlt. Dies hat zur Annahme des zehnten Zahlzeichens 0 (ausgesprochen: Null) geführt, welches in die Stelle fehlender Ordnungen gesetzt wird und ausdrückt, daß von dieser Ordnung keine Einheiten vorhanden sind.

Z. B. 7 H. + 6 E. denkt man sich erst ergänzt zu 7 H. + 0 Z. + 6 E. und schreibt dann abgekürzt 706. — 7 H. T. + 5 T. + 2 E. = 7 H. T. + 0 Z. T. + 5 T. + 0 H. + 0 Z. + 2 E. = 705002.

Im Gegensatz zur Null werden die anderen neun Zahlzeichen geltende Ziffern genannt.

§. 7.

1) Hieraus ergeben sich auch mit Nothwendigkeit die Zahlzeichen für die Ordnungseinheiten oder Ordnungszahlen:

Zehn	ist gleich:	1 Z. + 0 E.	=	10
Hundert	„ „	1 H. + 0 Z. + 0 E.	=	100
Tausend	„ „	1 T. + 0 H. + 0 Z. + 0 E.	=	1000

u. s. w.

2) Ferner ist leicht zu übersehen, wie man jede nach diesem Gesetz geschriebene Zahl auf verschiedene Weise in Theile zerlegen und lesen kann. Z. B. 3584 hat zunächst die Bedeutung von
3 T. + 5 H. + 8 Z. + 4 E. = 3000 + 500 + 80 + 4,
dann aber auch von
35 H. + 8 Z. + 4 E. = 3500 + 80 + 4, ferner
von 358 Z. + 4 E. = 3580 + 4, ferner
von 35 H. + 84 E. = 3500 + 84
u. s. w.

§. 8.

Das in den vorigen §§. erläuterte System, die Zahlzeichen und Zahlwörter zu bilden, hat die Zahl zehn zur Grundzahl; es wird deshalb das zehntheilige oder dekadische Zahlensystem genannt.

Anmerkung. Das dekadische Zahlensystem ist indischen Ursprungs; es ist jedoch durch die Araber zu uns gekommen und deshalb werden die Ziffern desselben arabische Ziffern genannt. Aus der Darstellung dieses Systems wird klar geworden sein, wie man beim Bilden der Ordnungen ebenso leicht immer bis zwei, oder drei u. s. w. oder auch bis elf, zwölf u. s. w. zählen und auf diese Weise ein zweitheiliges, dreitheiliges, . . . elftheiliges, zwölftheiliges Zahlensystem bilden könnte. — Unser Zahlensystem ist eine der merkwürdigsten und wichtigsten Erfindungen des menschlichen Geistes. Das Wesentliche desselben liegt aber nicht darin, daß grade zehn die Grundzahl desselben ist, sondern in der Einführung des eigenthümlichen Stellenwerthes der Ziffern. Die Zahl zehn ist höchst wahrscheinlich nur deshalb die Grundzahl geworden, weil das erste Zählen an den Fingern stattfand und der Mensch daher bei der Zahl zehn eine natürliche Grenze fand. Auch ist die Zahl zehn keineswegs die günstigste Grundzahl. Wäre z. B. die Zahl zwölf zur Grundzahl gewählt worden, so würden zwar zwei Zahlzeichen mehr zu merken sein, aber die Zeichen für große Zahlen würden weniger Ziffern erhalten und da zwölf doppelt so viel Theiler hat als zehn, so würden sich die Merkmale für die Theilbarkeit der zwölftheiligen Zahlen günstiger gestalten als

für zehntheilige, auch würden sich mehr gewöhnliche Brüche genau in zwölftheilige verwandeln lassen, als jetzt in zehntheilige.

§. 9.

Lesen der Zahlen. Die einziffrigen Zahlen haben ihren bestimmten Namen, den man dem Gedächtnisse einprägen muß. Beim Lesen der zweiziffrigen Zahlen werden zuerst die Einer und dann die Zehner (oder Zig) ausgesprochen. Z. B. 42 heißt zwei und vierzig. Hierbei sind jedoch manche Namen fast bis zur Unkenntlichkeit zusammengezogen oder verändert worden, z. B. eins und zehn in elf, zwei und zehn in zwölf u. s. w.; statt drei und zweizig sagt man drei und zwanzig.

Beim Lesen der dreiziffrigen Zahlen liest man zuerst die Hunderter, springt dann sonderbarer Weise zu den Einern über und spricht zuletzt die Zehner aus. Z. B. 723 heißt: Sieben Hundert drei und zwanzig.

Auf das Lesen dreiziffriger Zahlen läßt sich nun das Lesen aller mehrziffrigen Zahlen nach folgender Regel leicht zurückführen:

Man theile die mehrstellige Zahl von rechts nach links zählend in Klassen von je 3 Ziffern, indem man zwischen die 3te und 4te Ziffer 1 Komma ('), zwischen die 6te und 7te Ziffer 2 Komma ('') u. s. w. immer abwechselnd 1 und 2 Komma setzt; z. B.

4''206'328''004'813.

Dann spricht man, links anfangend, jede Klasse für sich aus (als ob sie allein daständе) und fügt nur, wenn 1 Komma darauf folgt, stets den Namen Tausend und wenn zwei Komma folgen, bei dem ersten Doppelstrichelchen (von rechts nach links gezählt) den Namen Millionen, bei dem zweiten Doppelstrichelchen den Namen Billionen, bei dem dritten Doppelstrichelchen den Namen Trillionen u. s. w. hinzu.

Obige Zahl heißt hiernach: Vier Billionen zweihundertsechstausend dreihundertachtundzwanzig Millionen viertausendachthundertunddreizehn.

§. 10.

Das Schreiben der Zahlen ist die Umkehrung von dem Lesen derselben und muß mit diesem Hand in Hand gehen. Wenn das Schreiben der ein-, zwei- und dreiziffrigen Zahlen sicher eingeübt ist, so läßt sich hierauf das Schreiben aller mehrstelligen Zahlen leicht zurückführen. Zu diesem Zwecke denke man sich die zu schreibende Zahl nach Anleitung des vorigen §. in Klassen von je 3 Ziffern eingetheilt. Jede Klasse besteht dann aus Hunderten, Zehnern und Einern und zwischen je zwei Doppelstrichelchen stehen 6 Ziffern. Auf diese zusammengehörigen Hunderter, Zehner und Einer achte man sorgfältig und setze, in der Reihenfolge wie man die Klassen nennen hört, eine hinter die andere. Sollten einzelne Ordnungen oder ganze Klassen fehlen, so wird ihre Stelle durch Nullen ausgefüllt. Um hierbei nicht zu irren, wird der noch Ungeübte wohlthun, die

Eintheilungsstrichelchen im Sinne des vorigen §. wirklich anzubringen, also wenn das Wort Tausend ausgesprochen wird, ein Strichelchen und wenn die Namen Million, Billion u. s. w. genannt werden, zwei Strichelchen zu machen. Wechseln dann nicht immer zwei und ein Strichelchen regelmäßig ab und stehen nicht in jeder Klasse drei Ziffern, so ist die Zahl fehlerhaft niedergeschrieben, wahrscheinlich sind Nullen fortgelassen worden.

§. 11.

Römische Zahlzeichen. Neben den arabischen Ziffern haben sich auch noch die römischen Zahlzeichen bei uns erhalten. Besonders finden wir sie häufig auf Inschriften und beim Numeriren von Gegenständen angewendet.

Die Hauptzeichen derselben sind:

I,	V,	X,	L,	C,	D, oder IↃ,	M oder CIↃ
= 1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

Hieraus werden alle anderen Zahlzeichen zusammengesetzt. Steht hierbei das Zeichen einer niederen Zahl vor (links) dem Zeichen einer höheren Zahl, so ist erstere von letzterer abzuziehen, steht es nach (rechts), so ist hinzuzuzählen. Z. B. IV bedeutet 5 weniger 1, also 4. VI heißt 5 und 1, also 6.

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,	X,	XI,	XII,	XIII,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,

XIX,	XX,	XXX,	XL,	L,	LX,	LXXIV,	LXXXI,	XC,
19,	20,	30,	40,	50,	60,	74,	81,	90,

C,	CC,	CD,	D(IↃ),	DCCLXI,	M(CIↃ),	MM oder ıı · M,
100,	200,	400,	500,	761,	1000,	2000,

v · M,	MDCCCLXIX u. s. w.
5000,	1869.

§. 12.

Von jeder Zahl kann man zu einer neuen übergehen, indem man Einheiten hinzulegt oder fortnimmt. So entsteht aus der Zahl 5 durch Hinzulegen von 3 Einheiten die neue Zahl 8 und durch Hinwegnehmen von 3 Einheiten die Zahl 2. Wieviel Einheiten hinzugelegt oder fortgenommen werden sollen, wird durch eine zweite Zahl oder auch noch durch eine dritte, vierte u. s. w. Zahl ausgedrückt.

Das Herleiten einer neuen Zahl aus gegebenen heißt: **rechnen.**

Die beiden angegebenen Veränderungen sind ursprünglich die einzigen, welche mit einer Zahl vorgenommen werden können. Man unterscheidet jedoch bei jeder noch den besonderen Fall, in welchem wiederholt dieselbe Anzahl Einheiten hinzugelegt oder fortgenommen werden sollen und so erhält man vier Grundrechnungsarten oder Species.

Aus diesen 4 Grundrechnungsarten gehen dann wieder als specielle Fälle noch andere Rechnungsarten hervor.

Zweiter Abschnitt.

Die vier Grundrechnungsarten (Species) mit ganzen unbenannten Zahlen.

Erstes Kapitel.

Addition.

§. 13.

1) Zwei oder mehrere gegebene Zahlen addiren oder zusammenzählen heißt eine neue Zahl ermitteln, welche so viele Einheiten enthält, als die gegebenen Zahlen zusammengenommen haben. — Die gegebenen Zahlen werden Summanden oder Posten und das Resultat (Ergebniß) der Addition wird Summe genannt.

Die Forderung, daß zwei oder mehrere Zahlen addirt werden sollen, wird kurz ausgedrückt, indem man die Zahlen nebeneinander hinschreibt und zwischen je zwei derselben das Zeichen: +, welches plus ausgesprochen wird, setzt. — In der Verbindung $5 + 3 + 7 = 15$ sind 5, 3 und 7 die Summanden und 15 ist die Summe. — Sind die zu addirenden Zahlen durch Buchstaben bezeichnet, z. B. durch a, b und c, so heißt schon die Verbindung $a + b + c$ ihre Summe.

2) Wird eine Zahlenverbindung, wie z. B. $5 + 3$, auf's neue mit einem Zahlenausdruck verbunden, so schließt man sie in eine Klammer ( ), [ ] ein, damit über den Sinn des ganzen Ausdrucks kein Zweifel entstehen kann. Soll z. B. zu der Zahl 4 die Summe $5 + 3$ addirt werden, so schreibt man: $4 + (5 + 3)$; dagegen bedeutet $(4 + 5) + 3$: Addire die Zahlen 4 und 5 und dann zu der erhaltenen Summe noch die Zahl 3. Klammern geben also die Reihenfolge an, in welcher gerechnet werden soll. Ist diese Reihenfolge willkürlich oder soll von der Linken zur Rechten gerechnet werden, so darf man die Klammern fortlassen.

§. 14.

Aus dem Begriff der Addition folgt unmittelbar:

1) Die zu addirenden Zahlen müssen sich auf eine gemeinschaftliche Einheit beziehen. Es können z. B. nur Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern, Mark zu Mark u. s. w. addirt werden. Die erhaltene Summe bezieht sich dann auf dieselbe Einheit.

2) Sollen mehrere Zahlen addirt werden, so darf dies in beliebiger Reihenfolge geschehen.

Z. B. $8 + 5 = 5 + 8$; $a + b = b + a$.
$6 + 3 + 2 + 4 = 6 + 2 + 3 + 4 = (6 + 3) + (2 + 4)$ u. s. w.
$a + b + c + d = a + c + b + d = (a + b) + (c + d)$ u. s. w.
$(8 + 5) + (8 + 5) + (8 + 5) = (8 + 8 + 8) + (5 + 5 + 5)$.

Addition dekadischer Zahlen.

§. 15.

Die Summe zweier Zahlen (und durch wiederholte Anwendun

dieses Verfahrens, auch die Summe mehrerer Zahlen) wird erhalten, wenn man zu den Einheiten der einen Zahl die Einheiten der anderen einzeln hinzuzählt. Z. B.

$$8 + 3 = 8 + (1 + 1 + 1) = 9 + (1 + 1) = 10 + 1 = 11.$$

Dieses Verfahren führt jedoch bei größeren Zahlen nur langsam zum Ziele. Deshalb berechnet man auf diese Weise nur die Summe je zweier einziffrigen Zahlen (das sogenannte Eins und Eins) und prägt die gefundenen Resultate dem Gedächtnisse recht geläufig ein. Ist dies geschehen, so kann man das Addiren mehrziffriger Zahlen (nach §. 14. 1 und 2) leicht auf das Addiren einziffriger Zahlen nach folgenden Vorschriften zurückführen:

a. Schriftliches Addiren.

Man schreibe die Summanden so untereinander, daß genau Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. stehen und ziehe unter dem letzten Summanden einen Strich. — Hierauf addire man sämmtliche Einer, schreibe von der erhaltenen Summe, falls dieselbe mehrziffrig ist, nur die Einer unter die Einer der Summanden und behalte die Zehner im Sinne (oder merke sie sich unter den Zehnern an, wie untenstehendes Beispiel zeigt). Nun ermittele man die Summe der im Sinne behaltenen und aller untereinanderstehenden Zehner, schreibe wieder nur die letzte Ziffer der erhaltenen Summe unter die Zehner und behalte die Hunderter im Sinne u. s. w. — Die Summe, welche die Ziffern der am weitesten links stehenden Vertikal-Reihe liefert, wird zuletzt ganz hingeschrieben.

Beispiel:

```
 3645 ⎫
  826 ⎪
 1350 ⎬ Summanden
 8108 ⎭
  111
-----
13929 (Summe).
```

Es ist natürlich durchaus nothwendig, daß hierbei wirklich immer nur gleichnamige Ordnungen zu einander addirt werden (§. 14. 1). Wie groß würde z. B. der Fehler sein, wenn man aus Versehen 8 Zehner nicht zu den Zehnern sondern zu den Hundertern addirte? Die mehrsten Additionsfehler entspringen aus der Nichtbefolgung dieses Gesetzes und die gewöhnlichste Veranlassung dazu ist ein nicht genaues Untereinanderstellen der gleichnamigen Ordnungen. Dies verdient mit besonderem Nachdruck hervorgehoben zu werden.

Anmerkung. Wer tüchtig rechnen lernen will, beherzige schon hier zwei Hauptregeln der Rechenkunst: a. Man gewöhne sich daran, alle Ziffern recht deutlich zu schreiben. — b. Wo bestimmte Formen für eine Rechnung allgemein gebräuchlich geworden sind, beachte man diese genau, und wo dies nicht der Fall ist, strebe man nach einer möglichst übersichtlichen, deutlichen und den stufenweisen Verlauf der Rechnung zur Anschauung bringenden Darstellungsweise. Die Befolgung dieser beiden Regeln bildet die Hauptschutzwehr gegen das leidige Verrechnen und erleichtert überdies die Prüfung der vollzogenen Rechnung.

b. Addiren im Kopf.

Man zähle zu einem der Summanden (gewöhnlich dem größten) zuerst die Einheiten der höchsten, dann die der nächstfolgenden Ordnung des zweiten Summanden hinzu u. s. w. bis beide Summanden addirt sind. Zu der erhaltenen Summe kann dann auf dieselbe Art noch ein dritter Summand u. s. w. addirt werden.

Beispiel: Berechne: 68 + 23! Lösung: 68 + 20 giebt 88; 88 + 3 giebt 91. — Wie groß ist 386 + 253? Lösung: 386 + 200 = 586; 586 + 50 = 636; 636 + 3 = 639.

§. 16.

Probe: Auch der tüchtigste Rechner kann sich verrechnen. Deshalb ist es nöthig, das Resultat einer jeden Rechnung zu prüfen. Beim Addiren geschieht dies gewöhnlich auf folgende Weise:

Man addire noch einmal, jedoch in anderer Reihenfolge der Summanden. Hat man z. B. zuerst von unten nach oben gehend addirt, so addire man nun von oben nach unten fortschreitend.

§. 17.

Rechenvortheile: 1) Man gewöhne sich daran, bei allem Rechnen möglichst wenig Worte zu machen. Beim Addiren übe man sich ferner zwei oder auch gleich drei untereinander stehende Ziffern, die zusammen nicht mehr als 10 betragen, mit einem Blicke in eine Summe zu vereinigen und diese hinzuzuzählen. Bei nebenstehendem

16
83
96
544
32
248
282
123
1424

Beispiele spreche man also nicht in Gedanken (wie dies bei Vielen vom ersten Unterrichte her zur zeitraubenden Gewohnheit geworden ist) 3 und 2 macht 5, 5 und 8 macht 13 u. s. w., sondern nur: 5, 13, 15 u. s. w. oder noch kürzer 5, 15, 25, 34 u. s. w., wobei man zuerst 3 + 2 berechnet, dann nicht 8 und 2 einzeln, sondern dafür gleich 10, ferner statt 4 und 6 ebenfalls 10 und endlich statt 3 und 6 gleich 9 addirt. Durch die Anwendung dieses Verfahrens, an welches man sich leicht gewöhnen kann, erspart man viel Zeit.

2) Sind sehr viele Summanden zu addiren, so rechnet man sicherer und bequemer, wenn man sich zwei oder mehrere Abtheilungen bildet, dann die Summe jeder Abtheilung und hierauf erst die Hauptsumme berechnet.

Zweites Kapitel.

Subtraction.

§. 18.

1) **Von einer Zahl (8) eine andere (5) subtrahiren oder abziehen heißt:**

a. ermitteln, wie viel Einheiten übrig bleiben, wenn von der ersteren Zahl (8) so viel Einheiten fortgenommen werden, als die letztere (5) enthält (wirkliches Abziehen),

b. oder auch untersuchen, wie viel Einheiten die größere Zahl (8) mehr enthält, als die kleinere (5) (Unterschied suchen).

In beiden Fällen erhält man offenbar die erstere Zahl (8), wenn man zur gefundenen Zahl (3) die letztere (5) addirt. — Aus diesem Grunde können die beiden ursprünglich verschiedenen Forderungen in eine Rechnungsart zusammengefaßt und der Begriff des Subtrahirens auch wie folgt festgestellt werden:

Von einer Zahl (8) eine andere (5) subtrahiren heißt eine neue Zahl (3) ermitteln, welche zu der letzteren (5) addirt werden muß, um die erstere (8) zu erhalten.

Die Zahl (8), von welcher man subtrahirt, wird Minuendus, die Zahl, welche man subtrahirt (5), Subtrahendus und das Resultat der Subtraction (3) Differenz, Rest oder Unterschied genannt. — Das Zeichen, wodurch man kurz ausdrückt, daß von einer gegebenen Zahl eine andere subtrahirt werden soll, ist: „—" (ausgesprochen: minus oder weniger); man setzt es hinter den Minuendus und läßt dann den Subtrahendus folgen. Z. B. $8 - 5$ heißt 8 minus 5, oder 8 weniger 5, oder auch 5 von 8.

In $a - b$ ist a der Minuendus, b der Subtrahendus und schon die Verbindung $a - b$ wird Differenz genannt.

2) Dieses Abziehen kann aber offenbar nur dann vollständig ausgeführt werden, wenn der Subtrahendus kleiner oder gleich dem Minuendus ist. Im letzteren Falle bleiben keine oder 0 Einheiten übrig. Z. B. $5 - 3 = 2$; $5 - 5 = 0$.

Ist dagegen der Subtrahendus größer als der Minuendus, sollen z. B. 8 Einheiten von 5 Einheiten subtrahirt werden, so bleiben, nachdem so viel Einheiten als möglich abgezogen sind, der Minuend also $= 0$ geworden ist, noch 3 Einheiten abzuziehen übrig. Man sagt dann, die Differenz sei $= 0 - 3$ oder kurzweg $= -3$. Ein solcher Ausdruck, wie -3 (allgemein $-a$) wird eine subtractive oder negative Zahl genannt.

In der Wirklichkeit begegnen wir diesem auffallend scheinenden Zahlwerth -1, -2, -3 u. s. w. häufiger, als man gewöhnlich meint. Ist z. B. ein Geschütz mit 5^0 Elevation gerichtet und soll dann die Erhöhung um 8^0 vermindert werden, so erhält es eine Neigung (Inklination) von 3 Grad und dies wird am einfachsten durch -3^0 ausgedrückt. Oder: Besitzt Jemand 5 Mk. Vermögen und hat 8 Mk. Schulden, so beträgt sein wirkliches Vermögen 3 Mk. weniger als Nichts, was ganz anschaulich durch -3 Mk. Vermögen bezeichnet werden kann.

Im Gegensatz zu den negativen Zahlen, werden Zahlwerthe wie $0 + 1$, $0 + 2$, $0 + 3$, wofür man auch kürzer $+1$, $+2$, $+3$ u. s. w. schreibt, additive oder positive Zahlen genannt.

Im Nachfolgenden wird zunächst immer stillschweigend angenommen, daß der Subtrahendus kleiner ist als der Minuendus.

§. 19.

Aus dem Begriff der Subtraction geht unmittelbar hervor:

1) Wird die Differenz zum Subtrahendus addirt, so erhält man den Minuendus. In Zeichen: $(a - b) + b = a$; $(6 - 4) + 4 = 6$.

2) Wird von einer Summe ein Summand abgezogen, so bleiben die anderen Summanden übrig. In Zeichen: $(a + b) - b = a$; $(6 + 5) - 5 = 6$; $(7 + 5 + 8) - 5 = 7 + 8$.

3) Minuend und Subtrahend müssen sich auf eine gemeinschaftliche Einheit beziehen. Es können z. B. nur Einer von Einern, Zehner von Zehnern, oder Mark von Mark u. s. w. subtrahirt werden. Die Differenz bezieht sich dann auf dieselbe Einheit.

§. 20.

Ferner findet man bei einigem Nachdenken leicht folgende Gesetze:

1) Soll eine Zahl von einer Summe abgezogen werden, so darf man sie von einem beliebigen Summanden abziehen.

In Zeichen: $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$;
$(8 + 7) - 3 = (8 - 3) + 7 = 8 + (7 - 3)$.

Veranschaulichung: Hat man in einer Tasche 8, in einer anderen 7 Mk., und man soll 3 Mk. bezahlen, so ist es offenbar gleichgültig, aus welcher Tasche diese 3 Mk. genommen werden. (Den wissenschaftlichen Beweis siehe §. 23.)

2) Soll von einer Zahl die Summe mehrerer Zahlen abgezogen werden, so kann man die einzelnen Summanden in beliebiger Reihenfolge nach und nach abziehen.

In Zeichen: $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$;
$12 - (4 + 5) = (12 - 4) - 5 = (12 - 5) - 4$.

Veranschaulichung: Besitzt man 12 Mk. und hat für zwei verschiedene Einkäufe 4 und 5 Mk. zu bezahlen, so kann man auf einmal 4 Mk. + 5 Mk. = 9 Mk, oder auch einzeln zuerst 4 und dann 5, oder zuerst 5 und dann 4 Mk. bezahlen.

3) Soll von einer Summe eine andere Summe abgezogen werden, so kann dies nach den beiden vorhergehenden Gesetzen auf sehr verschiedene Weise geschehen. Gewöhnlich wird man dann die Summanden des Subtrahendus einzeln in beliebiger Reihenfolge von je einem passenden Summanden des Minuendus abziehen.

In Zeichen: $(a + b + c + d) - (e + f + g) =$
$a + (b - e) + (c - f) + (d - g) =$
$(a - e) + (b - f) + (c - g) + d$ u. s. w.
$(8 + 5 + 6 + 2) - (3 + 5 + 1) =$
$8 + (5 - 3) + (6 - 5) + (2 - 1) =$
$(8 - 3) + (5 - 5) + (6 - 1) + 2$ u. s. w.

4) Soll von einer Zahl eine Differenz subtrahirt werden, so kann man statt dessen auch den Minuendus subtrahiren und den Subtrahendus addiren. Die Reihenfolge, in welcher dies geschieht, ist beliebig.

In Zeichen:
$a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b$.
$50 - 28 = 50 - (30 - 2) = (50 - 30) + 2 = 20 + 2 = 22$.
oder: $= (50 + 2) - 30 = 52 - 30 = 22$.

Denn: 50 — (30 — 2) bedeutet, man soll 2 Einheiten weniger als 30 von 50 abziehen. Subtrahirt man nun doch 30 von 50, so hat man 2 Einheiten zu viel abgezogen und muß deshalb diese 2 Einheiten wieder zu 50 — 30 hinzulegen.

Subtraction dekadischer Zahlen.

§. 21.

Die Differenz zweier Zahlen kann man stets dadurch finden, daß man vom Minuendus nach und nach so viele Einheiten fort nimmt (abzählt), wie der Subtrahendus anzeigt. Z. B. 8 — 3 = 7 — 2 = 6 — 1 = 5. Dieser Weg würde jedoch in den meisten Fällen sehr zeitraubend sein. Bequemer kommt man auf folgende Weise zum Ziele:

Man berechne die Differenz je zweier einzifferigen Zahlen (das sogenannte Eins von Eins), indem man mit Hülfe des Eins und Eins eine Zahl sucht, welche zum Subtrahendus addirt, den Minuendus hervorbringt (z. B. 8 — 3 = 5, weil 3 + 5 = 8), präge die gefundenen Resultate dem Gedächtnisse ein und verfahre dann bei mehrzifferigen Zahlen nach folgender Vorschrift:

a. Schriftliches Subtrahiren.

1) Schreibe den Subtrahendus so unter den Minuendus, daß genau Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. stehen und ziehe unter den Subtrahendus einen Strich. Nun subtrahire die Einer des Subtrahendus von den Einern des Minuendus und schreibe den erhaltenen Unterschied unter die Einer. Hierauf subtrahire die Zehner von den Zehnern und schreibe den erhaltenen Unterschied unter die Zehner u. s. f. bis jede Ordnung des Subtrahendus von der gleichnamigen Ordnung des Minuendus abgezogen ist. (§. 19, 3 und §. 20, 3.)

Beispiel:

Minuendus	47645
Subtrahendus	3542
Differenz	44103.

Erläuterung: 2 Einer von 5 Einern bleiben 3 Einer; 4 Zehner von 4 Zehnern bleibt 0 Zehner; 5 Hunderter von 6 Hundertern bleibt 1 Hunderter; 3 Tausender von 7 Tausendern bleiben 4 Tausender; Nichts von 4 Zehntausendern bleiben 4 Zehntausender.

2) Trifft es sich hierbei, daß in irgend einer Ordnung eine größere Zahl Einheiten von einer kleineren abgezogen werden soll, so entnimmt man von der nächst höheren Ordnung des Minuendus eine Einheit (man borgt sie, wie es gewöhnlich heißt) und vermehrt damit die Zahl in der nächst niederen Ordnung um 10 Einheiten. Um dieses Entnehmen nicht zu vergessen, macht man neben die um eine Einheit verminderte Ordnung einen Punkt.

Beispiel:

3·75·42
1 83 61
1 91 81.

Erläuterung: 1 Einer von 2 Einern = 1 Einer; 6 Zehner von 4 Zehnern geht nicht; ich entnehme von den 5 Hundertern eine Einheit = 10 Zehner; 6 Zehner von 10 Zehnern = 4 Zehner, dazu die vorhandenen 4 Zehner giebt 8 Zehner; 3 Hunderter von 4 Hundertern = 1 Hunderter u. s. w.

3) Sollte man jedoch im vorerwähnten Falle links auf eine Null oder sogar auf mehrere Nullen treffen, so ist man genöthigt, über diese hinweg bis zur nächsten geltenden Ziffer zu gehen. Von letzterer entnimmt (borgt) man dann eine Einheit, führt dieselbe jedoch nur bis zur nächst niederen Ordnung, woselbst sie natürlich 10 Einheiten gilt, nimmt nun wieder von diesen 10 Einheiten eine Einheit bis zur nächst niederen Ordnung hinüber u. s. w. bis man zu der Ziffer gelangt, von welcher abgezogen werden soll. In Stelle der Nullen, über welche man hinweggegangen ist, werden dann selbstverständlich lauter Neunen in Rechnung gebracht werden müssen.

Beispiel: 2·4·0·0·086·05
1 5 4 8 263 43
8 5 1 822 62.

Erläuterung: 3 Einer von 5 Einern = 2 Einer; 4 Zehner von 0 Zehnern geht nicht, ich borge ein Hunderter = 10 Zehner; 4 Zehner von 10 Zehnern = 6 Zehner; 3 Hunderter von 5 Hundertern = 2 Hunderter; 6 Tausender von 8 Tausendern = 2 Tausender; 2 Zehntausender von 0 Zehntausendern geht nicht, ich borge 1 Hunderttausender, oder, da keine Hunderttausender und auch keine Millioner vorhanden sind, 1 Zehnmillioner = 10 Millioner. Von diesen 10 Millionern entnehme ich 1 Millioner = 10 Hunderttausender und von den 10 Hunderttausendern 1 Hunderttausender = 10 Zehntausender zu den vorhandenen Zehntausendern hinüber. — 2 Zehntausender von 10 Zehntausendern = 8 Zehntausender; 8 Hunderttausender von 9 Hunderttausendern = 1 Hunderttausender; 4 Millioner von 9 Millionern = 5 Millioner; 5 Zehnmillioner von 13 Zehnmillionern = 8 Zehnmillioner.

b. Subtrahiren im Kopf.

1) Man ziehe vom Minuendus zuerst die Einheiten der höchsten Ordnung des Subtrahendus ab, dann vom Rest die Einheiten der nächst niederen Ordnung u. s. w. bis zu den Einern hinab.

Z. B. Wie groß ist 645 — 234? Lösung: 200 von 645 = 445; 30 von 445 = 415; 4 von 415 = 411.

Oder was gewöhnlich noch bequemer ist:

2) Man zähle in Gedanken vom Subtrahendus in möglichst bequemen Sprüngen bis zum Minuendus aufwärts und merke sich dabei den Unterschied zwischen beiden Zahlen.

Z. B. Wie groß ist: 123 — 78? Lösung: Von 78 bis 80 giebt 2, bis 100 giebt 22, bis 120 giebt 42 und bis 123 giebt 45 zum Unterschiede. — In der Praxis spricht man jedoch (in Gedanken) nur: 2, 22, 42, 45, das dazwischen Fehlende denkt man sich nur.

3) Nicht selten kann man auch durch geschickte Verbindung von Addition und Subtraction noch schneller und bequemer zum Ziele kommen. Ist z. B. 98 von 324 abzuziehen, so subtrahire man 100 und zähle dann zum Rest 2 hinzu; also 324 — 98 ≐ (324 — 100) + 2 = 226.

§. 22.

Probe: Man addire den gefundenen Rest zum Subtrahendus; die Summe muß dann dem Minuendus gleich sein. (§. 19, 1.)

Anhang.

(Die Anhänge sind nur für Schüler mit guten Vorkenntnissen oder besonderer Begabung bestimmt.)

A. Ausführliche Zusammenstellung der Gesetze der Subtraction.

§. 23.

I. Grundgesetze: Aus dem Begriff der Subtraction (§. 18) folgt unmittelbar:

1) $(a - b) + b = a$ (§. 19, 1),

2) $(a + b) - b = a$ (§. 19, 2). Die Richtigkeit dieses Gesetzes geht aber auch daraus hervor, daß der Differenzwerth a zum Subtrahendus b addirt, den Minuendus $a + b$ giebt.

3) Ist $a = b$, so ist auch $a - c = b - c$.

In Worten: Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.

II. Abgeleitete Gesetze.

1) $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$ (§. 20, 1).

In Worten: Soll von einer Summe eine Zahl subtrahirt werden, so darf man sie (statt von der berechneten Summe) von einem beliebigen der Summanden abziehen.

Beweis: Um die Richtigkeit irgend eines Subtractionsgesetzes zu prüfen, addire man den Differenzwerth (d. h. den Ausdruck, welcher der Differenz gleich sein soll) zum Subtrahendus und überzeuge sich, ob diese Summe dem Minuendus gleich ist. (Ist dies nicht sogleich zu erkennen, so forme man dieselbe nach den vorhergegangenen Gesetzen so lange um, bis man sein Ziel erreicht hat.)

Der Kürze halber soll in den nachfolgenden Beweisen Minuendus durch M, Subtrahendus durch S und Differenzwerth durch D abgekürzt werden.

1. Theil. In $(a + b) - c = (a - c) + b$ ist:

$$M = a + b,\ S = c \text{ und } D = (a - c) + b,$$

also ist zu zeigen, daß

$$[(a - c) + b] + c = a + b \text{ ist.}$$

Nun ist: $[(a - c) + b] + c = [(a - c) + c] + b$ (nach §. 14, 2), also auch $= a + b$ (nach I. 1. d. §.) w. z. b. w.

2. Theil. Daß auch $(a + b) - c = a + (b - c)$ ist, kann auf ganz dieselbe Weise bewiesen werden; es folgt aber auch schon daraus, daß man $(a + b) - c = (b + a) - c$ setzen darf.

2) $(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c)$.

In Worten: Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, wenn man die Zahl entweder zum Minuendus addirt oder vom Subtrahendus abzieht.

Beweis: 1 Theil. Liest man die Gleichung $(a - b) + c = (a + c) - b$ von rechts nach links, so erkennt man sogleich ihre Richtigkeit, weil eine Zahl b von einer Summe $a + c$ subtrahirt wird, wenn man sie von einem der Summanden subtrahirt.

2. Theil. $(a - b) + c = a - (b - c)$.

Hier finden wir auf der linken Seite eine Summe, dagegen auf der rechten Seite eine Differenz, von welcher $M = a$, $S = b - c$ und $D = (a - b) + c$ ist. Dies Gesetz wird also richtig sein, wenn

$$[(a - b) + c] + (b - c) = a \text{ ist.}$$

Nun ist zunächst:

$[(a - b) + c] + (b - c) = (a - b) + [c + (b - c)]$ (§. 14, 2).

also auch $= (a - b) + b$ (I. 1 d. §.)

und endlich $= a$ (I. 1 d. §.) w. z. b. w.

3) $(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$.

In Worten: Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, wenn man sie entweder vom Minuendus subtrahirt oder zum Subtrahendus addirt.

Beweis: 1. Theil. $(a - b) - c = (a - c) - b$.

Hier ist $M = a - b$, $S = c$ und $D = (a - c) - b$, also ist zu zeigen, daß

$$[(a - c) - b] + c = a - b \text{ ist.}$$

Nun ist: $[(a-c)-b]+c=[(a-c)+c]-b$ (n. II. 2 d. §.)
also auch $\qquad = \qquad a-b$ (I. 1 d. §.), w. z. b. w.

4) $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b.$

In Worten: Eine Summe wird subtrahirt, wenn man die Summanden in beliebiger Reihenfolge nach und nach abzieht (d. h. erst den einen, dann von der Differenz den zweiten u. s. f.).

Beweis: Dies Gesetz ist in dem so eben erwiesenen Gesetz Nr. 3 enthalten; wie man sogleich erkennt, wenn man Gesetz Nr. 3 von rechts nach links liest.

5) $a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b.$

In Worten: Eine Differenz wird addirt, wenn man den Minuendus addirt und den Subtrahendus subtrahirt; in welcher Reihenfolge dies geschieht, ist beliebig.

Beweis: Dies Gesetz ist nur die Umkehrung von Gesetz II. 1. d. §.

6) $a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b.$

In Worten: Eine Differenz wird subtrahirt, wenn man den Minuendus subtrahirt und den Subtrahendus addirt; in welcher Reihenfolge dies geschieht, ist beliebig.

Beweis: Dies Gesetz ist nur die Umkehrung von Gesetz II. 2. d. §.

7) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d).$

In Worten: Zwei Differenzen werden addirt, wenn man von der Summe der Minuenden die Summe der Subtrahenden abzieht.

Beweis: Die Differenz befindet sich auf der rechten Seite und es ist:

$$M=a+c,\ S=b+d,\ D=(a-b)+(c-d),$$

also ist zu zeigen, daß

$$[(a-b)+(c-d)]+(b+d)=a+c \text{ ist.}$$

Es sollen auf der linken Seite zwei Summen addirt werden; hierbei ist es beliebig, in welcher Reihenfolge die Summanden addirt werden, also kann man setzen:

$$[(a-b)+(c-d)]+(b+d)=[(a-b)+b]+[(c-d)+d]$$

also auch $\qquad = \qquad a+c$, w. z. b. w.

8) $(a-b)-(c-d)=(a-c)-(b-d).$

In Worten: Zwei Differenzen werden subtrahirt, wenn man von der Differenz der Minuenden die Differenz der Subtrahenden abzieht.

Beweis: Hier ist: $M=a-b,\ S=c-d,\ D=(a-c)-(b-d),$ also ist zu zeigen, daß:

$$[(a-c)-(b-d)]+(c-d)=a-b.$$

Auf der linken Seite sollen zwei Differenzen addirt werden; wenden wir daher das soeben unter Nr. 7 erwiesene Gesetz an, so erhalten wir:

$$[(a-c)-(b-d)]+(c-d)=[(a-c)+c]-[(b-d)+d]$$

also auch $\qquad = \qquad a-b$ (I. 1. d. §.)

w. z. b. w.

9) $a-b=(a+n)-(b+n)=(a-n)-(b-n).$

In Worten: Eine Differenz bleibt ihrem Werthe nach unverändert, wenn man zum Minuend und Subtrahend dieselbe Zahl addirt oder vom Minuend und Subtrahend dieselbe Zahl abzieht.

Beweis: 1. Theil. $a-b=(a+n)-(b+n).$

Um den Beweis kürzer zu machen, betrachten wir die rechte Seite der Gleichung als die Differenz und die linke als Differenzwerth; alsdann ist:

$$M=a+n,\ S=(b+n),\ D=a-b,$$

also ist zu zeigen, daß

$$(a-b)+(b+n)=a+n \text{ ist.}$$

Eine Summe wird addirt, wenn man die Summanden in beliebiger Reihenfolge nach und nach addirt, also ist:

$$(a-b)+(b+n)=[(a-b)+b]+n, \text{ also auch}$$
$$= a+n \text{ (n. I. 1. d. §.).}$$

2. Theil. $a-b=(a-n)-(b-n).$

Dies Gesetz ist nur die Umkehrung des ersten Theiles, denn addirt man zum M und S der Differenz $(a-n)-(b-n)$ die Zahl n, so erhält man (n. I. 1. d. §.) $a-b$.

B. Von den negativen und positiven Zahlen.

§. 24.

1) Im §. 18. 2 ist bereits angegeben worden, wie aus der allgemeinen Differenz a — b die Null und die negative Zahl hervorgehen und daß die positive Zahl nur als Gegensatz zur negativen Zahl eingeführt worden ist.

Für 0 kann man darnach stets eine Differenz setzen, in welcher der Subtrahendus dem Minuendus gleich ist, z. B. a — a, b — b, c — c u. s. w.

Die subtractive oder negative Zahl — a ist nur eine kürzere Schreibweise für die Differenz 0 — a; a heißt ihr Glied, — ihr Vorzeichen.

Die additive oder positive Zahl + a ist nur eine kürzere Schreibweise für die Summe 0 + a und drückt, da 0 + a angiebt, daß zu keinen Einheiten a Einheiten hinzugelegt werden, offenbar denselben Werth aus wie die natürliche Zahl a.

2) Die positiven und negativen Zahlen führen auch den Namen **entgegengesetzte Zahlen**.

3) Jede Zahl ohne Vorzeichen heißt eine **absolute Zahl**.

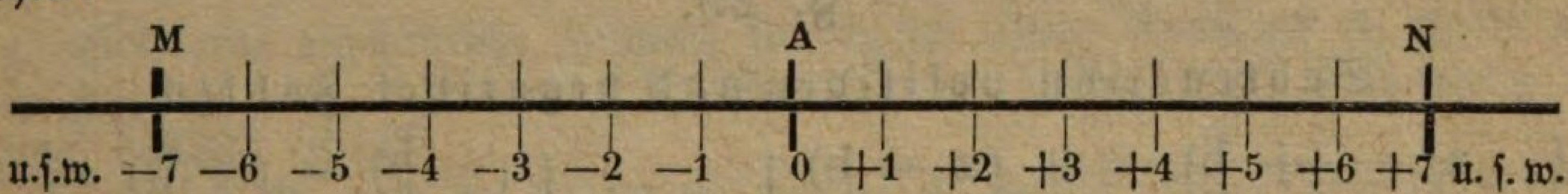
§. 25.

Durch eine einfache Schlußfolge können die Null und die negativen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe angeschlossen werden.

Die natürliche Zahlenreihe entsteht aus der Eins durch Vorwärtszählen, indem man zu der Eins eine Eins hinzuzählt, dann zu der so entstandenen Zahl wieder eine Eins hinzuzählt und so ohne Ende fort.

Zählt man aber, von einer beliebigen Zahl, z. B. 6, anfangend, rückwärts, indem man von 6 eine 1 abzieht, dann von der so entstandenen Zahl 5 wieder eine 1 abzieht und so fort, dann kommt man zunächst auf die natürlichen Zahlen 5, 4, 3, 2, 1 und wenn man dies Abziehen weiter fortsetzt auf 0, — 1, — 2, — 3 u. s. w. ohne Ende fort.

Diese erweiterte Zahlenreihe kann man sich leicht durch folgende Figur versinnlichen:



Auf der Linie MN sind von A aus nach beiden Seiten hin gleiche Stücke abgetragen. Bezeichnen wir nun von A aus nach rechts hin gezählt die Zahl dieser Theile mit 1, 2, 3 u. s. w. oder was dasselbe sagt, durch + 1, + 2, + 3 u. s. w., so sind wir genöthigt, beim Rückwärtszählen an den Anfangspunkt A eine 0 und dann weiter nach links hin — 1, — 2, — 3 u. s. w. zu setzen.

§. 26.

Es ist: 1) $a + 0 = a$; 2) $0 + 0 = 0$; 3) $a - 0 = a$; 4) $+ a = 0 + a = a$.

Die Richtigkeit dieser Gesetze erkennt man sogleich, wenn man unter 0 ein Zeichen versteht, welches ausdrückt, daß keine Einheiten vorhanden sind.

Man kann aber auch schließen:

1) $a + 0 = a + (b - b) = (a + b) - b = a.$
2) $0 + 0 = (a - a) + (b - b) = (a + b) - (a + b) = 0$
3) $a - 0 = a - (b - b) = (a - b) + b = a$
4) $0 + a = (b - b) + a = (b + a) - b = a.$

Aus Gesetz Nr. 4 folgt: **Jede positive Zahl ist ihrem absoluten Gliede gleich** und umgekehrt: **Vor jede absolute oder natürliche Zahl darf man das Zeichen + setzen.**

§. 27.

Die Gesetze für das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen werden leicht gefunden, wenn man stets für die positive Zahl $+ a$ die absolute Zahl a, für die negative Zahl $- a$ die Differenz $0 - a$ setzt und dann die für Differenzen erwiesenen Gesetze anwendet.

§. 28.

Addition positiver und negativer Zahlen.

I.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (+a)+(+b)=+(a+b) \\ 2)\ (-a)+(-b)=-(a+b) \end{array}\right\} \text{ z. B. } \left\{\begin{array}{l} (+5)+(+4)=+9 \\ (-5)+(-4)=-9 \end{array}\right.$$

II.

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ (-a)+(+b)=-(a-b)=+(b-a) \\ 4)\ (+a)+(-b)=+(a-b)=-(b-a) \end{array}\right\} \text{ z. B. } \left\{\begin{array}{l} (-7)+(+4)=-3 \\ (-5)+(+8)=+3 \\ (+9)+(-2)=+7 \end{array}\right.$$

In Worten: I. Sind Zahlen mit gleichen Vorzeichen zu addiren, so addirt man ihre Glieder und giebt der Summe das gemeinschaftliche Vorzeichen. II. Sind Zahlen mit ungleichen Vorzeichen zu addiren, so subtrahirt man das eine Glied von dem andern (bei bestimmten Zahlen das kleinere von dem größeren) und giebt der Differenz das Vorzeichen des Minuendus.

Beweis: 1) Es ist $(+a)+(+b) = a + b = +(a+b)$

2) $(-a)+(-b) = (0-a)+(0-b) = (0+0)-(a+b) = 0-(a+b) = -(a+b)$ (§. 23. II. 7)

3) $(-a)+(+b) = (0-a)+b = \left\{\begin{array}{l} (0+b)-a \\ 0-(a-b) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} b-a=+(b-a) \\ -(a-b) \end{array}\right\}$ (§. 23. II. 2)

4) $(+a)+(-b) = a+(0-b) = \left\{\begin{array}{l} (a+0)-b \\ 0-(b-a) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a-b=+(a-b) \\ -(b-a) \end{array}\right\}$ (§. 23. II. 2).

§. 29.

Subtraction positiver und negativer Zahlen.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (+a)-(+b)=+(a-b) \\ 2)\ (-a)-(-b)=-(a-b) \\ 3)\ (+a)-(-b)=+(a+b) \\ 4)\ (-a)-(+b)=-(a+b) \end{array}\right\} \text{ z. B. } \left\{\begin{array}{l} (+9)-(+5)=+4 \\ (-9)-(-5)=-4 \\ (+9)-(-5)=+14 \\ (-9)-(+5)=-14 \end{array}\right.$$

Diese Resultate erhält man am einfachsten nach folgender Regel: Sind zwei Zahlen mit beliebigen Vorzeichen zu subtrahiren, so verwandele man das Vorzeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte und addire alsdann nach §. 28.

Beweis: 1) $(+a)-(+b) = a - b = +(a-b)$

2) $(-a)-(-b) = (0-a)-(0-b) = (0-0)-(a-b) = -(a-b)$ (§. 23. II. 8)

3) $(+a)-(-b) = a-(0-b) = (a-0)+b = a+b = +(a+b)$

4) $(-a)-(+b) = (0-a)-b = 0-(a+b) = -(a+b)$.

C. Algebraische Summe. — Auflösen der Klammern.

§. 30.

Eine Summe, deren Summanden positive und negative Zahlen sind, z. B. $(+a)+(-b)+(-c)+(+d)$ heißt eine algebraische Summe; a, b, c und d werden die Glieder, $+a$, $-b$, $-c$, $+d$ die Summanden dieser Summe genannt.

§. 31.

Führt man bei obiger Summe die Addition aus und läßt dabei der Kürze halber diejenigen Klammern fort (§. 13. 2), welche nichts weiter ausdrücken, als daß man von der Linken zur Rechten fortschreitend, Zahl für Zahl zu vereinigen hat, so erhält man nach und nach:

$$(+a) + (-b) + (-c) + (+d) = + a - b + (-c) + (+d)$$
$$= + a - b - c + (+d)$$
$$= + a - b - c + d$$

Gewöhnlich läßt man das Zeichen +, wenn es an der Spitze einer solchen Summe steht, auch noch fort und schreibt:

$$a - b - c + d.$$

Vergleicht man diesen letzten Werth mit der ursprünglichen Form der algebraischen Summe, so erkennt man leicht:

1) In einer algebraischen Summe darf man die Klammern, welche die einzelnen Summanden einschließen und die Additionszeichen fortlassen. Alsdann hat man die Vorzeichen als Rechnungszeichen anzusehen.

2) Sind mehrere Zahlen in beliebiger Reihenfolge zu addiren und zu subtrahiren, z. B. $a + b - c - d$, so kann man dafür auch stets eine algebraische Summe setzen, wenn man jedes Glied mit seinem davorstehenden Rechnungszeichen in eine Klammer schließt und zwischen je zwei der Klammern ein Additionszeichen setzt.

Obiger Ausdruck ist also gleich: $(+a) + (+b) + (-c) + (-d)$.

§. 32.

Da man in jeder Summe die Reihenfolge der Summanden beliebig ändern darf, so darf man in einem Ausdruck wie $a - b - c + d - e$ ebenfalls die Reihenfolge der Zahlen beliebig ändern, nur muß man mit jeder Zahl das davorstehende Zeichen mitnehmen. Z. B.

$$a - b - c + d - e = a - c + d - e - b$$
$$= a + d - b - c - e$$
$$= - b + a - c + d - e \text{ u. s. w.}$$

§. 33.

1) Soll eine algebraische Summe zu irgend einem Ausdruck A addirt werden, so geschieht dies, indem man die Summanden in beliebiger Reihenfolge nach und nach addirt. Z. B.

$$A + (-a + b - c - d) = A + (-a) + (+b) + (-c) + (-d)$$
$$= A - a + b - c - d.$$

2) Eine algebraische Summe wird von irgend einem Ausdruck A subtrahirt, wenn man die Summanden in beliebiger Reihenfolge nach und nach subtrahirt. Letzteres geschieht, indem man das Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandelt und dann addirt. Z. B.

$$A - (-a + b - c - d) = A - (-a) - (+b) - (-c) - (-d)$$
$$= A + (+a) + (-b) + (+c) + (+d)$$
$$= A + a - b + c + d.$$

§. 34.

Durch dieses Addiren oder Subtrahiren der algebraischen Summe verschwindet die Klammer, in welche die Summe eingeschlossen war, man nennt daher die Ausführung des Addirens oder Subtrahirens auch: das Auflösen der Klammern.

Aus dem vorigen §. kann man leicht folgende praktische Regel für das Auflösen der Klammern ableiten:

1) Steht vor einer Klammer das Additionszeichen, so darf man dieses Additionszeichen und die Klammer fortlassen. Z. B.

$$a + (-c + d + e) = a - c + d + e;$$
$$- a + (b - c - d) = - a + b - c - d$$ (hierbei muß man in der Klammer + b statt b gesetzt denken).

2) Steht vor einer Klammer das Subtractionszeichen, so darf man dieses Subtractionszeichen und die Klammer ebenfalls fortlassen, wenn man allen in der Klammer befindlichen Zahlen das entgegengesetzte Vorzeichen giebt.

Z. B. $a - (b - c + d - e) = a - b + c - d + e$ (statt b denkt man sich $+ b$ gesetzt).

$- (- a + b - c + d) = + a - b + c - d$ (man denkt sich 0 vor den ersten Ausdruck gesetzt).

3) Wenn in einer Klammer noch andere Klammern stehen, so werden die Klammern nach und nach aufgelöst.

Z. B. $[6 - (4 - 7) + 3] - [7 - (2 - 1) + (1 - 2)]$
$= 6 - (4 - 7) + 3 - 7 + (2 - 1) - (1 - 2)$
$= 6 - 4 + 7 + 3 - 7 + 2 - 1 - 1 + 2 = 7.$

oder auch
$= [6 - 4 + 7 + 3] - [7 - 2 + 1 + 1 - 2]$
$= 6 - 4 + 7 + 3 - 7 + 2 - 1 - 1 + 2 = 7.$

Bei der wirklichen Berechnung eines solchen Ausdrucks kommt man in der Regel am leichtesten zum Ziele, wenn man zuerst alle additiven, dann alle subtractiven Zahlen mit einander vereinigt und dann von ersterer Summe letztere abzieht.

Dabei beachte man noch, daß zwei Zahlen mit gleichviel Einheiten aber entgegengesetzten Vorzeichen sich gegenseitig aufheben. Man rechne also im vorstehenden Beispiel: $+ 7$ hebt sich gegen $- 7$, mithin hat man

$$(6 + 3 + 2 + 2) - (4 + 1 + 1) = 13 - 6 = 7.$$

Drittes Kapitel.

Multiplication.

§. 35.

1) Sind die Summanden, welche in eine Summe vereinigt werden sollen, sämmtlich einander gleich, wie z. B. in $6 + 6 + 6 + 6 + 6$, so schreibt man gewöhnlich nur einen dieser Summanden nieder, setzt links daneben die Zahl hin, welche angiebt, wieviel gleiche Summanden vorhanden sind und verbindet beide Zahlen durch das dazwischen gesetzte Zeichen: „$\times$ oder $\cdot$", welches „mal" ausgesprochen wird.

Obige Summe $6 + 6 + 6 + 6 + 6$ kann hiernach kürzer geschrieben werden: 5×6, oder $5 \cdot 6$. Man sagt dann 6 soll mit 5 multiplicirt werden.

Allgemein drückt die Verbindung $a \times b$, oder $a \cdot b$ (oder bei Buchstaben auch nur $a\,b$) eine Summe aus, welche den Summanden b, amal enthält. — Die Zahl, welche multiplicirt werden soll, heißt Multiplicandus (6), die Zahl (5), mit welcher man multiplicirt, wird Multiplicator, und das Resultat einer Multiplication (30) Product genannt. Multiplicandus und Multiplicator führen auch den gemeinschaftlichen Namen: Factoren.

2) Tritt ein Product mit einem anderen Zahlenausdruck in Verbindung, so muß es nach §. 13. 2 in eine Klammer eingeschlossen werden. Um jedoch diese Klammern, so viel als möglich zu ersparen, ist man übereingekommen, jedes Product, welches als Summand, als Minuend, oder als Subtrahend auftritt, nicht einzuschließen. Man sieht dann die Verbindung durch das Malzeichen für fester an, als die Verbindung durch das Zeichen $+$ oder $-$.

§. 36.

Das Product zweier Zahlen bleibt unverändert, wenn man den Multiplicandus mit dem Multiplicator vertauscht.

In Zeichen: $a \cdot b = b \cdot a$; $5 \times 6 = 6 \times 5$.

Beweis: Der größeren Deutlichkeit wegen soll das in bestimmten Zahlen gegebene Beispiel $5 \times 6 = 6 \times 5$ dem Beweise zu Grunde gelegt werden.

Löst man den Multiplicandus (6) in seine Einheiten auf und schreibt ihn dann so oft unter einander als der Multiplicator (5) anzeigt,

$$5 \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}^{6} \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array} \right.$$

so ist offenbar die Summe aller niedergeschriebenen Einheiten gleich dem Producte 5×6. — Nun befinden sich in jeder aufrecht stehenden Reihe 5 Einheiten und solcher Reihen stehen 6 neben einander, also stellt obige Summe auch das Product 6×5 bildlich dar und folglich muß $5 \times 6 = 6 \times 5$ sein.

§. 37.

1) Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden ihrer Summanden mit dieser Zahl multiplicirt und die erhaltenen Producte addirt.

In Zeichen: $n \cdot (a + b) = n \cdot a + n \cdot b$; $3 \cdot (8 + 5) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 5$.
$n \cdot (a + b + c + d + \cdots) = n \cdot a + n \cdot b + n \cdot c + n \cdot d + \cdots\cdots$

Beweis: $3 \cdot (8 + 5)$ ist eine kürzere Schreibweise für die Summe:
$(8 + 5) + (8 + 5) + (8 + 5)$. Hierfür darf man setzen (§. 14. 2) $(8 + 8 + 8) + (5 + 5 + 5)$ und hierfür nach der Erklärung der Multiplication (§. 35) $3 \cdot 8 + 3 \cdot 5$.

2) a) Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man sowohl den Minuendus als auch den Subtrahendus mit dieser Zahl multiplicirt und von ersterem Product das letztere abzieht.

In Zeichen: $n \cdot (a - b) = n \cdot a - n \cdot b$; $3 \cdot (12 - 5) = 3 \cdot 12 - 3 \cdot 5$.

Beweis: $3 \cdot (12 - 5)$ ist eine kürzere Schreibweise für die Summe:
$(12 - 5) + (12 - 5) + (12 - 5)$. In dieser Summe ist die Zahl 12 als Summand 3mal vorhanden und die Zahl 5 soll 3mal abgezogen werden. Statt dieses Abziehen 3mal einzeln auszuführen, kann man offenbar auch auf einmal von der Summe aller vorhandenen Einheiten die Summe aller abzuziehenden Einheiten subtrahiren, also ist: $(12 - 5) + (12 - 5) + (12 - 5) = (12 + 12 + 12) - (5 + 5 + 5)$ und hierfür kann man schreiben: $3 \cdot 12 - 3 \cdot 5$. (§. 35.)

Veranschaulichung: Gesetzt du erhieltest 3mal 12 Mk. mit der Verpflichtung, jedesmal 5 Mk. an einen Kameraden abzugeben, also $3 \times (12 - 5)$ Mk. Wieviel hättest du dann in Händen? (3×12) Mk. Wieviel hättest du fortzugeben? (3×5) Mk. Wieviel Mark wären also nur dein? $(3 \times 12 - 3 \times 5)$ Mk.

b) Da man in jedem Product die Factoren vertauschen darf, so folgt aus diesem Gesetz auch umgekehrt:

Eine Zahl wird mit einer Differenz multiplicirt, wenn man sie sowohl mit dem Minuendus als auch mit dem Subtrahendus multiplicirt und von ersterem Product das letztere abzieht.

In Zeichen: $(a - b) \cdot n = a \cdot n - b \cdot n$

$97 \cdot 6 = (100 - 3) \cdot 6 = 600 - 18 = 582.$

3) Eine Summe wird mit einer Summe multiplicirt, wenn man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multiplicirt und die erhaltenen Producte addirt.

Dies Gesetz ergiebt sich durch wiederholte Anwendung von Nr. 1 dieses §. Es ist z. B. $(m + n) \cdot (a + b + c) = (m + n) \cdot a + (m + n) \cdot b + (m + n) \cdot c = m \cdot a + n \cdot a + m \cdot b + n \cdot b + m \cdot c + n \cdot c$; $(3 + 2) \cdot (8 + 5 + 4) = (3 + 2) \cdot 8 + (3 + 2) \cdot 5 + (3 + 2) \cdot 4 = 3 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4$.

4) Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man einen der Factoren (nicht jeden) mit der Zahl und dann das Product mit dem anderen Factor (oder den anderen Factoren) multiplicirt.

In Zeichen: $n \cdot (a \cdot b) = a \cdot (n \cdot b) = b \cdot (n \cdot a)$;

$3 \cdot (5 \cdot 7) = 5 \cdot (3 \cdot 7) = 7 \cdot (3 \cdot 5)$.

Beweis: Statt $5 \cdot 7$ kann man setzen: $7 + 7 + 7 + 7 + 7$ Schreibt man nun solcher Summen 3 untereinander,

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7$$
$$7 + 7 + 7 + 7 + 7$$
$$7 + 7 + 7 + 7 + 7$$

so hat man das Product $3 \cdot (5 \cdot 7)$ in eine Summe aufgelöst. In jeder aufrecht stehenden Reihe steht die Zahl 7 dreimal, jede dieser Reihen drückt also das Product $3 \cdot 7$ aus. Solcher Reihen sind 5 nebeneinander vorhanden, folglich stellt obige Summe auch das Product $5 \cdot (3 \cdot 7)$ bildlich dar, d. h. es ist $3 \cdot (5 \cdot 7) = 5 \cdot (3 \cdot 7)$.

Daß $3 \cdot (5 \cdot 7)$ auch $= 7 \cdot (3 \cdot 5)$ ist, folgt daraus, daß man statt $5 \cdot 7$ auch $7 \cdot 5$ setzen kann.

5) Eine Zahl wird mit einem Producte multiplicirt, wenn man sie mit dem einen Factor und dann das erhaltene Product mit dem anderen multiplicirt.

In Zeichen: $(a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n) = b \cdot (a \cdot n)$;

$15 \times 12 = (5 \cdot 3) \cdot 12 = 3 \,.\, (5 \cdot 12) = 3 \cdot 60 = 180.$

Beweis: Die Richtigkeit dieses Gesetzes ergiebt sich sogleich aus dem vorigen Gesetz, wenn man in $n \cdot (a \cdot b)$ die Factoren vertauscht, also dafür setzt: $(a \cdot b) \,.\, n$.

6) Aus §. 36 in Verbindung mit Nr. 4 und 5 dieses §. folgt:

Sollen mehrere Zahlen mit einander multiplicirt werden, so kann dies in beliebiger Reihenfolge geschehen.

Multiplication dekadischer Zahlen.

§. 38.

Sollen zwei beliebige Zahlen mit einander multiplicirt werden, so erhält man (nach §. 35 und 36) stets das richtige Resultat, wenn man die eine der Zahlen so oft zu sich selbst addirt, als die andere Einheiten hat. Z. B. $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$. Dies Verfahren ist jedoch sehr mühsam, wenn beide Zahlen nur einigermaßen groß sind. Deshalb berechnet man auf diese Weise nur die Producte je zweier einzifferigen Zahlen (das sogenannte kleine Ein mal Eins), prägt die Resultate dem Gedächtnisse ein und verfährt dann wie folgt:

a. Schriftliches Multipliciren.

1) Soll eine Zahl mit einer dekadischen Ordnungszahl (10, 100, 1000 u. s. w.) multiplicirt werden, so hänge man ihr zur Rechten so viel Nullen an, als die dekadische Ordnungszahl Nullen hat. Z. B. $10 \times 456 = 4560$; $1000 \times 456 = 456000$.

Beweis: Hängt man einer Zahl eine Null an, so werden aus den Einern Zehner, aus den Zehnern Hunderter, aus den Hundertern Tausender u. s. w.; es erhält also jede Ziffer und mithin auch die ganze Zahl einen 10 mal größeren Werth. — Hängt man einer Zahl 2, 3, 4 . . . Nullen an, so erkennt man eben so leicht, daß jede Ziffer, also auch die ganze Zahl, einen 100, 1000, 10000 . . mal größeren Werth erhält. Hieraus folgt aber obige Regel.

2) Soll eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen multiplicirt werden, so multiplicire man mit letzterer jede Ordnung der ersteren (§. 37, 1) und ordne das Product nach dem dekadischen Zahlensystem. Um letzteres gleich während des Rechnens bequem thun zu können, fängt man die Rechnung bei den Einern an und multiplicirt dann der Reihe nach die Zehner, Hunderter u. s. w.

Z. B. $\frac{5 \times 6435}{32175}$ oder $\begin{array}{r} 6435 \\ 5 \\ \hline 32175 \end{array}$ Erläuterung: 5 mal 5 Einer = 25 Einer = 2 Zehner + 5 Einer. Die 5 Einer werden unter die Einer des Multiplicandus geschrieben und die 2 Zehner im Sinne behalten. 5 mal 3 Zehner = 15 Zehner. Hierzu die im Sinne behaltenen 2 Zehner hinzugerechnet giebt 17 Zehner = 1 Hunderter und 7 Zehner u. s. w.

3) Besteht der Multiplicator aus einer geltenden Ziffer mit rechts daneben stehenden Nullen, so multiplicire man mit der geltenden Ziffer und hänge dann dem Product so viel Nullen an, als der Multiplicator deren besitzt.

Z. B. $3000 \times 7835 = 1000 \times (3 \cdot 7835) = 1000 \times 23505 = 23505000$.

Beweis: Folgt aus §. 37, 5 in Verbindung mit §. 38, 2 und 1; wenn man den Multiplicator (3000) in zwei Factoren zer-

legt, wovon der eine die geltende Ziffer (3) und der andere (1000) eine dekadische Ordnungszahl ist.

4) Sind beide Factoren mehrzifferig, so multiplicire man (nach §. 37, 3) den Multiplicandus nach und nach einzeln mit jeder Ordnung des Multiplicators (nach Nr. 2 und 3 dieses §.), ordne die einzelnen Productenwerthe (Partialproductenwerthe genannt) so unter einander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen und addire endlich die Partialproductenwerthe um das Resultat (Hauptproduct) zu erhalten.

Z. B. 3787 × 254 oder 3787 (Multiplicandus)

15148		254	(Multiplicator)
18935_0		7574_{00}	(Partialproductenwerthe)
7574_{00}		18935_0	
961898		15148	
		961898	Product.

Bei dem links stehenden Beispiele ist zuerst mit den Einern, dann mit den Zehnern u. s. w. des Multiplicators multiplicirt worden; bei dem rechts stehenden Beispiele hat man zuerst mit der höchsten Ordnung, dann mit der nächst niederen u. s. w. die Multiplication ausgeführt. Beide Verfahrungsweisen führen gleich leicht zum Ziele, erstere ist jedoch gebräuchlicher.

In der Praxis läßt man die nach Nr. 3 dieses §. anzuhängenden (in vorstehendem Beispiele kleingedruckten) Nullen fort und bewirkt die richtige Untereinanderstellung der Partialproductenwerthe dadurch, daß man jeden folgenden Partialproductenwerth um eine Stelle links hinein- oder rechts herausrückt, ersteres, wenn man mit der niedrigsten, letzteres wenn man mit der höchsten Ordnung des Multiplicators zu multipliciren beginnt.

5) Enthält der Multiplicator zwischen den geltenden Ziffern auch Nullen, so entstehen eben so viele Partialproductenwerthe, welche gleich Null sind und daher nicht hingeschrieben werden. Deshalb muß man in diesem Falle den nächsten geltenden Partialproductenwerth um so viel Stellen mehr nach links hinein (oder nach rechts herausrücken), als Nullen übergangen worden sind.

Z. B.
```
     2374302
      203004
------------
     9497208
   7122906..
  4748604.
------------
481992803208
```

Für die Praxis ist es noch bequem sich zu merken, daß bei nebenstehender Form die erste Ziffer jedes Partialproductenwerthes unter die Ziffer des Multiplicators zu stehen kommt, mit welcher man multiplicirt.

Anmerkung: Wer recht gewandt im Multipliciren werden will, muß neben dem kleinen Einmaleins auch noch das große Einmaleins, mindestens für die im Verkehr am häufigsten vorkommenden Zahlen geläufig lernen. Es sind dies die Zahlen 12, 15 und 24; ihre 2- bis 10fachen Producte enthält folgendes Täfelchen:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240

b. Multipliciren im Kopf.

1) Soll eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen multiplicirt werden, so multiplicire man mit letzterer zuerst die höchste Ordnung des Multiplicandus, dann die nächst niedere u. s. w. und addire jedes gefundene Product sogleich zu dem vorhergehenden oder zur Summe der vorhergehenden.

Z. B. Berechne 4 × 346! Lösung: 4 × 3 Hundert = 1200; 4 × 4 Zehner = 160: 1200 + 160 = 1360; 4 × 6 Einer = 24; 1360 + 24 = 1384.

2) Sind beide Factoren mehrzifferig, so multiplicire man die größere von beiden Zahlen zuerst mit der höchsten Ordnung der anderen, dann mit der nächst niederen u. s. w.

Z. B. Wie groß ist 23 × 45? Lösung: 2 × 45 = 90, also 20 × 45 = 900; 3 × 40 = 120; 900 + 120 = 1020; 3 × 5 = 15; 1020 + 15 = 1035.

3) Nicht selten kann man einen Factor als die Differenz zweier bequem zu multiplicirenden Zahlen in Rechnung stellen.

Z. B. 6 × 97 = 6 · (100 — 3) = 600 — 18 = 582; 36 × 999 = 36 · (1000 — 1) = 36000 — 36 = 35964.

4) Zuweilen ist es auch vortheilhaft den Multiplicator in Factoren zu zerlegen (§. 37, 5).

Z. B. 42 × 35 = (42 × 5) × 7 = 210 × 7 = 1470.

§. 39.

Probe: Man vertausche Multiplicandus und Multiplicator mit einander und führe die Multiplication noch einmal aus.

Oder: Man dividire das Product durch einen der beiden Factoren; man muß dann den anderen Factor als Quotienten erhalten und es darf kein Rest übrig bleiben (§. 47, 2).

Diese letztere Probe kann aber natürlich erst dann angewendet werden, wenn man das Dividiren erlernt hat.

§. 40.

Rechenvortheile.

1) Man wähle immer den Factor zum Multiplicator, welcher die wenigsten geltenden Ziffern enthält.

2) Hat der Multiplicandus oder der Multiplicator oder haben beide zur Rechten Nullen, so lasse man beim Multipliciren diese Nullen ganz unberücksichtigt und hänge dann dem Producte so viel Nullen an, als zunächst unberücksichtigt geblieben waren.

Z. B. 43000 × 2140 giebt

$$\begin{array}{r} 214 \times 43 \\ \hline 642 \\ 856 \\ \hline 92020000 \end{array}$$

3) Ist die erste oder die letzte Ziffer des Multiplicators eine Eins, so ist es vortheilhaft, den Multiplicandus gleich als das Partialproduct zu benutzen, welches sich durch Multiplication mit der 1 ergiebt.

Z. B.

$$\begin{array}{r} 3564 \times 18 \\ \hline 28512 \\ \hline 64152 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7326 \times 61 \\ \hline 43956 \\ \hline 446886 \end{array}$$

Im ersteren Falle hat man das zweite Partialproduct 28512 um eine Stelle nach rechts hinaus zu rücken, im letzteren Falle muß das zweite Partialproduct 43956 um eine Stelle nach links hineingerückt werden.

Anhang.

A. Ausführliche Zustammenstellung der Gesetze der Multiplication.

§. 41.

I. Grundgesetz: Ist $a = b$, so ist auch $a . c = b . c$.

In Worten: Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches.

II. Abgeleitete Gesetze: 1) $a . b = b . a$; s. §. 36. Der Beweis ist hier nach Analogie des dort geführten Beweises mit Buchstaben allgemein zu führen.

2) $n . (a + b) = n . a + n . b$.

In Worten: a) s. §. 37. 1. — b) von rechts nach links gelesen: Producte, welche einen gleichen Factor haben, werden addirt, wenn man die Summe der anderen Factoren mit dem gleichen Factor multiplicirt.

Beweis ist hier nach Analogie des in §. 37. 1. gegebenen mit allgemeinen Zahlzeichen zu führen.

3) $n . (a - b) = n . a - n . b$.

In Worten: a) s. §. 37. 2. — b) von rechts nach links gelesen: Zwei Producte, welche einen gleichen Factor haben, werden subtrahirt, wenn man die Differenz der anderen Factoren mit dem gleichen Factor multiplicirt.

Beweis ist hier nach Analogie des in §. 37. 2 gegebenen allgemein mit Buchstaben zu führen.

4) $n . (a . b) = a . (n . b) = b . (n . a)$ (s. §. 37. 4).

Aus diesem Gesetz in Verbindung mit dem ad 1) gegebenen folgt ferner:

5) Sollen mehrere Zahlen mit einander multiplicirt werden, so kann dies in beliebiger Reihenfolge geschehen.

In Zeichen:

$$\{[(a . b) . c] . d\} . e = \{[(a . c) . b] . d\} . e = \{[(a . d) . c] . b\} . e = \ldots abcde.$$

6) Producte werden multiplicirt, wenn man ihre Factoren in beliebiger Reihenfolge multiplicirt.

Z. B. $an . bp = abnp$.

§. 42.

1) Die durch Buchstaben bezeichneten Factoren eines Productes läßt man gewöhnlich in alphabetischer Reihe aufeinander folgen; ist außerdem ein bestimmter, mit Ziffern geschriebener Factor vorhanden, so setzt man diesen an die Spitze und nennt ihn den Coefficienten des Ausdrucks. Z. B. 3 abnp.

2) Aus §. 41. 2 und 3 folgt, wie man Producte, welche in ihren Buchstabenfactoren übereinstimmen, durch Addition oder Subtraction vereinigen kann.

Z. B. $3a + 4a = (3 + 4)a = 7a.$

$8x - 5x = (8 - 5)x = 3x.$

$7ab - 3c - 3ab + 6c - 8np = 7ab - 3ab - 3c + 6c - 8np = 4ab + 3c - 8np.$

$3a - [4b + (2a - 5b) - (8c + 3b) + 6a + 8c]$
$= 3a - 4b - (2a - 5b) + (8c + 3b) - 6a - 8c$
$= 3a - 4b - 2a + 5b + 8c + 3b - 6a - 8c = -5a + 4b$

3) Aus §. 41. 6 folgt, wie in der Praxis Producte zu multipliciren sind.

Z. B.

$4a \times 3b = 4.3.a.b = 12ab$

$5an \times 7bc \times 2ap = 5.7.2.a.a.b.c.n.p = 70aabcnp.$

B. Multipliciren mit 0, entgegengesetzten Zahlen und algebraischen Summen.

§. 43.

1) $a.0 = 0$; 2) $0.a = 0$.

In Worten: Jedes Product, in welchem der Factor 0 vorkommt, ist selbst gleich Null.

Beweis: 1) $a.0 = a.(n - n) = an - an = 0.$
2) $0.a = (n - n)a = na - na = 0.$

§. 44.

I. 1) $(+n) \times (+a) = n \times (+a) = +na.$
2) $(+n) \times (-a) = n \times (-a) = -na.$

Beweis: Nach dem Begriff der Multiplication ist:
1) $n \times (+a) = (+a) + (+a) + (+a)\ldots$ nmal $= +n.a.$
2) $n \times (-a) = (-a) + (-a) + (-a)\ldots$ nmal $= -na.$

II. 1) $(-n) \times (+a) = -na$; $(-3) \times (+4) = -12.$
2) $(-n) \times (-a) = +na$; $(-3) \times (-4) = +12.$

Beweis: Hier ist der Multiplicator $-n$ $(-3) = 0 - n$ $(0 - 3)$ eine Differenz. Mit dieser Differenz $0 - n$ $(0 - 3)$ wird (n. §. 37, 2) multiplicirt, wenn man von dem 0fachen des Multiplicandus das a(3)fache abzieht. Nun ist:
1) das 0fache von $+a$ $(+4) = 0$ und das n(3)fache von $+a$ $(+4)$ $= +na$ $(+12)$, also ist auch
$(-n) \times (+a) = 0 - (+na) = 0 - na = -na$
$(-3) \times (+4) = 0 - (+12) = 0 - 12 = -12,$
2) das 0fache von $-a$ $(-4) = 0$ und das n(3)fache von $-a$ (-4) $= -na$ (-12), also ist auch:
$(-n) \times (-a) = 0 - (-na) = 0 + na = +na$
$(-3) \times (-4) = 0 - (-12) = 0 + 12 = +12.$

Die Resultate dieser vier Gesetze merkt man sich leicht nach folgender praktischen Regel:

Sind positive und negative Zahlen zu multipliciren, so multiplicire man ihre Glieder und gebe dem Product das Vorzeichen +, wenn die Zahlen gleiche Vorzeichen, —, wenn sie ungleiche Vorzeichen haben.

§. 45.

Summen, also auch algebraische Summen, werden multiplicirt, wenn man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multiplicirt und die erhaltenen Producte addirt. Hierbei ordnet man die Partialproducte gleich während der Rechnung so untereinander, daß man die Addition möglichst bequem ausführen kann. Z. B.

$$(4\,a - 3\,b + 2\,c) \times 5\,n$$
$$\overline{20\,an - 15\,bn + 10\,cn}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3\,xy & -\;2\,xz & +\;5\,z & & \\ \times & 2\,xy & +\;4\,xz & -\;z & & \\ \hline & 6\,xxyy & -\;4\,xxyz & +\;10\,xyz & & \\ & & +\;12\,xxyz & & -\;8\,xxzz & +\;20\,xzz \\ & & & -\;3\,xyz & & +\;2\,xzz \;-\; 5\,zz \\ \hline & 6\,xxyy & +\;8\,xxyz & +\;7\,xyz & -\;8\,xxzz & +\;22\,xzz \;-\; 5\,zz. \end{array}$$

Viertes Kapitel.

Division.

§. 46.

1) Eine Zahl (12) durch eine andere (3) dividiren oder theilen heißt entweder:

a. die erstere Zahl (12) in so viel gleiche Theile theilen als die letztere Einheiten hat und angeben, wie groß jeder Theil ist, oder:

b. ermitteln, wie oft die letztere Zahl (3) in der ersteren enthalten ist, d. h. von ihr abgezogen werden kann.

Sollen z. B. 12 Mark unter 3 Personen gleichmäßig vertheilt werden, so tritt der erstere Fall ein; entsteht dagegen die Frage: Unter wie viel Personen können 12 Mark vertheilt werden, so daß jede 3 Mark erhält? dann findet der zweite Fall statt.

Beide Rechnungsfragen führen auf dasselbe Resultat, nämlich auf eine Zahl (4), welche mit der letzteren (3) multiplicirt, die erstere (12) hervorbringt. Aus diesem Grunde können sie in eine vereinigt und der Begriff des Dividirens allgemein wie folgt festgestellt werden:

Eine Zahl (12) durch eine andere (3) dividiren heißt eine neue Zahl (4) ermitteln, welche mit der letzteren (3) multiplicirt, die erstere hervorbringt.

Die Zahl (12), welche dividirt werden soll, heißt Dividendus, die Zahl (3), durch welche man dividirt, Divisor, und die zu ermittelnde Zahl (4) Quotient. Die Forderung, daß eine Zahl durch eine andere dividirt werden soll, wird auf zweifache Weise durch Zeichen ausgedrückt: entweder läßt man auf den Dividendus einen Doppelpunkt und dann den Divisior folgen, oder man setzt unter den Dividendus einen Strich und schreibt dann den Divisor darunter. Z. B. $12 : 3$, oder $\frac{12}{3}$ heißt: 12 dividirt durch 3, oder auch 3 dividirt in 12.

2) Für den Gebrauch der Klammern bei Quotienten gilt dasselbe Gesetz wie für Producte (§. 35, 2). Benutzt man die zweite Schreibweise $\left(\frac{a}{b}\right)$, so werden die Klammern auch dann fortgelassen, wenn ein solcher Quotient als Factor auftritt.

§. 47.

Aus dem Begriff der Division folgt unmittelbar:

1) Wird ein Quotient mit seinem Divisor multiplicirt, so erhält man den Dividendus.

In Zeichen: $\frac{a}{b} \cdot b = a$; $(12:3) \cdot 3 = 12$.

2) Wenn man ein Product durch einen seiner Factoren dividirt, so erhält man den anderen Factor (oder das Product der anderen Factoren).

In Zeichen: $\frac{a \cdot b}{b} = a$; $\frac{4 \cdot 5}{4} = 5$; $\frac{a \cdot b \cdot c}{b} = a \cdot c$.

§. 48.

Wichtig sind ferner folgende Divisionsgesetze:

1) Eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jeden Summanden durch die Zahl dividirt und die erhaltenen Quotienten addirt.

In Zeichen: $\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}$; $\frac{18+6}{3} = \frac{18}{3} + \frac{6}{3} = 6 + 2 = 8$.

Beweis: In $\frac{18+6}{3} = \frac{18}{3} + \frac{6}{3}$ ist $18 + 6$ der Dividend, 3 der Divisor und $\frac{18}{3} + \frac{6}{3}$ der Quotient. Es ist also zu zeigen, daß

$$\left(\frac{18}{3} + \frac{6}{3}\right) \times 3 = 18 + 6 \text{ ist.}$$

Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jeden Summanden multiplicirt, mithin kann man

$$\left(\frac{18}{3} + \frac{6}{3}\right) \cdot 3 = \left(\frac{18}{3} \cdot 3\right) + \left(\frac{6}{3} \cdot 3\right) \text{ setzen.}$$

Es ist aber (nach §. 47, 1) $\frac{18}{3} \cdot 3 = 18$ und $\frac{6}{3} \cdot 3 = 6$, folglich ist auch $\left(\frac{18}{3} + \frac{6}{3}\right) \cdot 3 = 18 + 6$.

Veranschaulichung: Gesetzt 3 Personen haben an einem Orte 18 und an einem anderen 6 Mk. verdient, wie viel erhält jede Person? Offenbar $^{18}/_3 + ^6/_3$ oder auch $\frac{18+6}{3}$ Mk.

2) Eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man Minuendus und Subtrahendus durch die Zahl dividirt und von ersterem Quotienten den letzteren abzieht.

In Zeichen: $\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}$; $\frac{18-6}{3} = \frac{18}{3} - \frac{6}{3} = 6 - 2 = 4$.

Beweis: In $\frac{18-6}{3} = \frac{18}{3} - \frac{6}{3}$ ist $18 - 6$ der Dividend, 3 der

Divisor, und $\frac{18}{3} - \frac{6}{3}$ der Quotient. Es ist also zu zeigen, daß

$$\left(\frac{18}{3} - \frac{6}{3}\right) \cdot 3 = 18 - 6 \text{ ist.}$$

Eine Differenz wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man Minuend und Subtrahend multiplicirt, mithin kann man

$$\left(\frac{18}{3} - \frac{6}{3}\right) \cdot 3 = \left(\frac{18}{3} \cdot 3\right) - \left(\frac{6}{3} \cdot 3\right) \text{ setzen.}$$

Es ist aber (nach §. 47, 1) $\frac{18}{3} \cdot 3 = 18$ und $\frac{6}{3} \cdot 3 = 6$, folglich ist auch $\left(\frac{18}{3} - \frac{6}{3}\right) \cdot 3 = 18 - 6$.

Veranschaulichung: 3 Personen handeln auf gleiche Rechnung. Sie gewinnen bei einem Geschäfte 18 Mk., haben aber, wie sich erst später zeigt, 6 Mk. Unkosten, so daß der eigentliche Gewinn nur (18—6) Mk. beträgt. Vom Gewinn hat jede Person $^{18}/_{3}$ erhalten, wird sie nicht auch zu den Unkosten $^{6}/_{3}$ Mk. beitragen müssen?

3) Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, wenn man sie zuerst durch den einen Factor und dann den erhaltenen Quotienten durch den zweiten, hierauf durch den dritten Factor u. s. w. dividirt.

In Zeichen:

$$\frac{a}{b \cdot c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b; 48 : 12 = 48 : (4 \cdot 3) = (48 : 4) : 3 = 12 : 3 = 4.$$

Beweis: In $48 : (4 \cdot 3) = (48 : 4) : 3$ ist 48 der Dividend, $4 \cdot 3$ der Divisor und $(48 : 4) : 3$ der Quotient. Es ist also zu zeigen, daß

$$[(48 : 4) : 3] \cdot (4 \cdot 3) = 48 \text{ ist.}$$

Mit einem Product wird multiplicirt, wenn man erst mit einem seiner Factoren und dann mit dem anderen multiplicirt (§. 37. 5), mithin kann man

$$[(48 : 4) : 3 \cdot (4 \cdot 3) = \{[(48 : 4) : 3] \cdot 3\} \cdot 4 \text{ setzen.}$$

Es ist aber (nach §. 47, 1) $[(48 : 4) : 3] \cdot 3 = 48 : 4$, demnach

$$[(48 : 4) : 3] \cdot (4 \cdot 3) = (48 : 4) \cdot 4 = 48.$$

Veranschaulichung: Will man einen Streifen Papier in 6 gleiche Theile theilen, so wird man am bequemsten zum Ziele kommen, wenn man den Streifen erst in zwei gleiche Theile theilt und dann jede Hälfte des Streifens in 3.

Division dekadischer Zahlen.

§. 49.

1) Die ursprüngliche Vorstellung, welche man sich von dem Dividiren (Theilen) einer Zahl macht, setzt voraus, daß der Dividendus größer ist als der Divisor. Der Divisor ist dann in dem Dividendus so oft enthalten, als er von letzterem abgezogen werden kann. Um z. B. zu ermitteln, wie oft 4 in 12 enthalten ist, kann man sagen: $12 - 4 = 8$, $8 - 4 = 4$, $4 - 4 = 0$. Die Subtrac-

tion hat 3mal ausgeführt werden können, also ist 4 in 12 dreimal enthalten. Bleibt zuletzt nicht 0, sondern eine geltende Zahl übrig, welche natürlich immer kleiner als der Divisor ist, so wird diese Zahl Divisionsrest genannt. Z. B. Wie oft ist 4 in 15 enthalten? $15 - 4 = 11, 11 - 4 = 7, 7 - 4 = 3$, folglich ist 4 in 15 3mal enthalten und 3 Einheiten bleiben als Rest.

Auch läßt sich der Quotient stets auf folgende Weise finden: Man multiplicire den Divisor mit 1 und dann der Reihe nach mit allen folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe bis man zu einem Producte gelangt, welches gleich dem Dividendus oder von ihm um weniger Einheiten verschieden ist als der Divisor enthält. Die Zahl, mit welcher man zuletzt multiplicirt hat, wird in beiden Fällen Quotient genannt. Genau ist sie es aber nur im ersteren Falle; im letzteren liegt der genaue Quotient zwischen der gefundenen Zahl und der um 1 größeren. Zieht man das Product aus der gefundenen Zahl und dem Divisor vom Dividendus ab, so ist die etwa entstehende Differenz der Divisionsrest. Z. B. Wie groß ist $12 : 4$? $4 \cdot 1 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 3 = 12$, also ist 3 der Quotient. — Wie groß ist: $15 : 4$? $4 \cdot 1 = 4$, $4 \cdot 2 = 8$, $4 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 4 = 16$. Der genaue Quotient liegt also zwischen 3 und 4, 3 ist kleiner, 4 größer als derselbe. Man sagt dann $15 : 4$ giebt den Quotienten 3 mit dem Divisionsreste 3.

Bleibt beim Dividiren zweier Zahlen kein Rest (der Rest 0) so sagt man: die Division geht auf.

2) Geht die Division nicht auf, so läßt sich der Dividendus stets als eine Summe darstellen, deren erster Summand gleich dem Product aus Quotient und Divisor und deren zweiter Summand gleich dem Divisionsrest ist. Eine Summe wird dividirt, indem man jeden Summanden dividirt, also ist z. B. $15 : 4$ oder $\frac{15}{4} = \frac{12 + 3}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4}$. Aus dem ersten Summanden $\frac{12}{4}$ geht eine ganze Zahl (3) hervor, der zweite Summand $^3/_4$ dagegen ist offenbar kleiner als eine Einheit und verlangt, daß eine kleinere Zahl (3) durch eine größere (4) dividirt werden soll. Erst die Summe $3 + {^3/_4}$, wofür man gewöhnlich kürzer $3^3/_4$ schreibt, giebt den genauen Quotienten an.

Was hat man sich aber unter $3^3/_4$ zu denken? Bei dem Begriff des Enthaltenseins zeigt der Quotient $3^3/_4$ an, daß der Divisor 3mal vollständig und daß überdies noch der 4te Theil desselben 3mal in dem Dividendus enthalten ist. Soll dagegen der 4te Theil von 15 gefunden werden, so drückt $3^3/_4$ aus, daß auf jeden Theil 3 volle Einheiten kommen und dann noch der 4te Theil von 3 Einheiten hinzuzufügen ist. Der 4te Theil von 3 Einheiten kann in vielen Fällen unmittelbar genommen werden, z. B. wenn 3 Meter Tuch in 4 gleiche Theile zu theilen sind; in anderen Fällen erhält man den 4ten Theil von 3 Einheiten, indem man den 4ten Theil von jeder der 3 Einheiten einzeln nimmt, z. B. wenn 3 Aepfel unter 4 Personen vertheilt werden sollen. Mitunter ist aber eine wirkliche Thei-

lung der Einheit gar nicht möglich. Ist z. B. zu berechnen: Wie viel Arbeiter sind nöthig, um in 4 Tagen eine Arbeit zu vollenden, welche von 15 Arbeitern in 1 Tage geleistet werden kann? so schließt man zwar: es sind der 4te Theil von 15 Arbeitern, also $3^3/_4$ Arbeiter erforderlich, aber in Wirklichkeit könnte man natürlich nicht $3^3/_4$ Arbeiter anstellen, sondern würde dafür 4 Arbeiter rechnen.

§. 50.

a. Schriftliches Dividiren.

1) Der vorige §. giebt zwar an, wie man beim Dividiren stets den Quotienten sicher und genau finden kann; beide Wege sind jedoch bei großen Zahlen sehr zeitraubend. Deshalb wendet man beim praktischen Rechnen den ersteren nie und den letzteren nur dann an, wenn Divisor und Quotient einzifferig sind. Aber auch in diesem Falle wird der praktische Rechner den Divisor nicht wirklich der Reihe nach mit 1, 2, 3 .. multipliciren, sondern nach einiger Uebung mit Hülfe des Einmaleins den Quotienten weit schneller finden. Z. B. $35 : 5 = 7$, denn $5 \cdot 7 = 35$; $50 : 9 = 5^5/_9$, denn $9 \cdot 5 = 45$ und $50 - 45 = 5$.

2) Bei größeren Zahlen wird jede Ziffer des Quotienten einzeln durch Versuche bestimmt. Man dividirt mit dem Divisor zuerst in die höchste und dann der Reihe nach in jede folgende Ordnung des Dividendus. Bleibt beim Dividiren in irgend einer Ordnung ein Rest, so wird dieser mit den Einheiten der nächst niederen Ordnung vereinigt und dann erst die Division in diese niedere Ordnung ausgeführt. Wählt man außerdem jede Ziffer des Quotienten so hoch als möglich, so ordnet sich der Quotient gleich während des Rechnens von selbst nach dem dekadischen Zahlensystem.

Einige Beispiele werden am leichtesten zum Verständniß führen. Die beiden gebräuchlichsten Formen für Divisionsexempel sollen dabei abwechselnd angewendet werden.

```
   Z.T. + T. + H. + Z. + E.   E.    T. + H. + Z. + E.
a.  1     5    2    8    8  :  6  =  2    5    4    8
    1     2
          3    2
          3    0
               2    8
               2    4
                    4    8
                    4    8
```

Erläuterung: 6 in 1 Zehntausender giebt 0 Zehntausender. Diese 0 Zehntausender werden nicht in den Quotienten gesetzt, weil Nullen, welche links von einer Zahl stehen, keinen Einfluß auf den Werth derselben haben. Die 1 Zehntausender vereinigt man mit den vorhandenen 5 Tausendern zu 15 Tausendern. 6 in 15 Tausender giebt 2 Tausender; 6×2 Tausender = 12 Tausender, 12 Tausender von 15 Tausendern = 3 Tausender. — Die 2 Tausender geben die erste Ziffer des Quotienten; zu dem Rest 3 Tausender = 30 Hunderter zieht man die vorhandenen 2 Hunderter herunter und erhält so 32 Hunderter. — 6 in 32 Hunderter giebt 5 Hunderter. Diese treten als zweite Ziffer in den Quotienten. 6×5 Hunderter = 30 Hunderter, 30 Hunderter von 32 Hundertern = 2 Hunderter. Zu diesen 2 Hundertern = 20 Zehnern zieht man die vorhandenen 8 Zehner herunter und erhält so 28 Zehner. — 6 in 28 Zehner giebt 4 Zehner als dritte Ziffer des Quotienten. 6×4 Zehner

= 24 Zehner, 24 Zehner von 28 Zehnern = 4 Zehner. — Zu diesen 4 Zehnern = 40 Einern zieht man die vorhandenen 8 Einer herunter und erhält so 48 Einer. — 6 Einer in 48 Einern giebt 8 Einer als vierte Ziffer des Quotienten. 6 × 8 Einer = 48 Einer, 48 Einer von 48 Einern = 0 Einer. — Der Quotient ist also 2548.

```
b. 8 | 48347 | 6043 3/8
       48
       --
        34
        32
        --
         27
         24
         --
          3
```

Erläuterung: 8 in 4 Zehntausender geht 0mal. — 8 in 48 Tausender giebt 6 Tausender und keinen Rest. — Man zieht die 3 Hunderter herunter. — 8 in 3 Hunderter giebt 0 Hunderter. (Diese 0 Hunderter müssen nothwendigerweise in den Quotienten eingetragen werden, weil sonst die vorhergehenden Ziffern eine falsche Stelle erhalten würden). — Zu den 3 Hundertern = 30 Zehnern die vorhandenen 4 Zehner heruntergezogen, giebt 34 Zehner. — 8 in 34 Zehner giebt 4 Zehner und den Rest 2 Zehner = 20 Einern. Hierzu die vorhandenen 7 Einer heruntergezogen, giebt 27 Einer. — 8 in 27 Einer giebt 3 Einer und den Rest 3 Einer. Dieser letzte Rest bleibt noch durch 8 zu theilen, daher ist der Quotient = $6043\frac{3}{8}$.

3) Bei einem zwei- oder mehrzifferigen Divisor wird es schwieriger, schnell zu übersehen, wie groß die einzelnen Ziffernwerthe des Quotienten zu wählen sind. Um dabei das Probiren möglichst einzuschränken, wendet man folgendes Verfahren an: Zunächst untersucht man, wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten Ziffer, oder wenn diese zu klein sein sollte, in den beiden ersten Ziffern des Dividendus (oder des Restes in welchen man gerade dividirt) enthalten ist. Sodann multiplicirt man im Kopf mit der gefundenen Ziffer vorläufig nur die beiden ersten Ziffern des Divisors und beurtheilt aus dem erhaltenen Product, ob die gefundene Ziffer in den Quotienten genommen werden kann. Ist das Product größer als die Zahl, welche durch die beiden ersten oder die drei ersten Ziffern des Dividendus (oder des Restes) dargestellt wird, so ist der Versuch mit der nächst kleineren Ziffer zu wiederholen u. s. f. Erst wenn man sich auf diese Weise vor einem groben Irrthum geschützt hat, schreibe man die ermittelte Ziffer in den Quotienten, multiplicire mit ihr den ganzen Divisor und setze das Product wenn es 2, 3, 4 .. Ziffern hat, unter die ersten 2, 3, 4. . oder auch, falls man sonst nicht abziehen könnte, unter die 3, 4, 5... ersten Ziffern des Dividendus. Mitunter kommt es nun dennoch vor, daß das erhaltene Product größer als die Zahl ist, von welcher man abzuziehen hat, dann ist die gewählte Ziffer zu groß; ist dagegen der nach dem Abziehen entstehende Rest größer als der Divisor, so ist dies ein Zeichen, daß eine größere Ziffer in den Quotienten genommen werden muß.

Am leichtesten läßt man sich verleiten eine zu große Ziffer zu wählen, wenn die erste Ziffer kleiner als die folgende und letztere größer als 5 ist. In diesem Falle ist es vortheilhaft den ersten Versuch mit der um 1 erhöhten ersten Ziffer des Divisors anzustellen. Ist z. B. 29... der Divisor, so versucht man nicht, wie oft 2, sondern wie oft 3 in der ersten oder in den beiden ersten Ziffern des Dividendus enthalten ist.

Beispiele: Dividend. Divisor. Quotient.

```
25·0743 : 53 = 4731
212
 387
 371
  16·4
  159
    53
    53
     0
```

Erläuterung: 5 in 25 geht 5mal, da aber $5 \times 53 = 265$ größer als 250 ist, so kann die erste Ziffer des Quotienten höchstens 4 sein. $4 \times 53 = 212$, 212 von 250 = 38; hierzu 7 herunter, giebt 387. — 5 in 38 geht 7mal, $7 \times 53 = 371$, 371 von 387 = 16, hierzu 4 herunter giebt 164. — 5 in 16 geht 3mal, $3 \times 53 = 159$, 159 von 164 = 5; hierzu 3 herunter giebt 53. — 53 in 53 geht 1mal.

Divisor. Dividend. Quotient.

```
298 | 8·1·42 07 | 2732 71/298
    | 596
    | 21·8·2
    | 2086
    |   9·6·0
    |   894
    |     6·67
    |     596
    |      71
```

Erläuterung: Da im Divisor auf die erste Ziffer 2 eine 9 folgt, so ist es zweckmäßiger die Versuche nicht mit 2, sondern mit 3 anzustellen. — 3 in 8 geht 2mal, $2 \times 298 = 596$, 596 von 814 = 218, hierzu 2 herunter giebt 2182. — 3 in 21 geht 7mal, $7 \times 298 = 2086$, Rest 96 u. s. w.

b. Dividiren im Kopf.

Im Allgemeinen muß hierbei auf dieselbe Weise wie beim schriftlichen Dividiren verfahren werden.

Erleichterungen entstehen jedoch nicht selten dadurch,

1) daß man den Divisor passend in Factoren zerlegt und dann mit diesen Factoren nach und nach dividirt. Z. B. $93 : 15 = (93 : 3) : 5 = 31 : 5 = 6\frac{1}{5}$.

2) daß man den Dividendus auf zweckmäßige Weise in eine Summe oder Differenz verwandelt.

Z. B. $$126 : 5 = \frac{100 + 26}{5} = 20 + 5\frac{1}{5} = 25\frac{1}{5}.$$

$$999 : 25 = \frac{1000 - 1}{25} = 40 - \frac{1}{25} = 39\frac{24}{25}.$$

§. 51.

Probe: Man multiplicire den Divisor mit dem Quotienten und addire zu dem erhaltenen Producte den etwa vorhandenen Divisionsrest. Stimmt dann dies Resultat mit dem Dividendus überein, so ist die Division richtig ausgeführt worden.

Rechenvortheile.

§. 52.

1) Man gewöhne sich daran, die Division mit einer einziffrigen Zahl und auch wohl mit 11 und 12 im Kopfe auszuführen und nur die Ziffern des Resultats, wie sie sich nach und nach ergeben, niederzuschreiben. Nöthigenfalls merke man sich auch noch die einzelnen Reste mit kleinen Ziffern an.

Beispiel: 394587 : 8
7 2 1 2
$49323\,^3/_8$

2) Haben Divisor und Dividendus am Ende Nullen, so streiche man von der Zahl, welche die wenigsten Nullen hat, sämmtliche, von der anderen ebensoviel Nullen fort. Z. B. 364000 : 21200 = 3640 : 212.

Warum dies geschehen darf, geht erst aus §. 69. 2 hervor.

3) Besitzt nur der Dividendus am Ende Nullen und man bekommt, bevor die Division beendigt ist, den Rest 0, so breche man die Rechnung ab und setze den bis dahin gefundenen Ziffern des Quotienten noch so viel Nullen rechts hinzu, als Nullen des Dividendus nicht in den Rest heruntergezogen worden sind.

Beispiel: 245 | 5·880000 | 24000
490
980
980
0

4) Hat nur der Divisor rechts Nullen, so streiche man dieselben durch und trenne vom Dividendus rechts ebensoviele Ziffern durch eine Klammer (└─┘) ab. Nun dividire man mit dem von Nullen befreiten Divisor in den Dividendus bis zu den eingeklammerten Ziffern und ziehe hierauf diese in den Rest herunter um dadurch den vollen Divisionsrest zu erhalten.

Beispiel: 23~~000~~ | 14·6 8523 | $63\frac{19523}{23000}$
138 └─┘
8·8
69
1 9523.

Anhang.

A. Ausführliche Zusammenstellung der Divisionsgesetze.

§. 53.

I. Grundgesetze, welche unmittelbar aus dem Begriff der Division (§. 46) folgen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \frac{a}{b} \cdot b = a \\ 2) & \frac{a\,b}{b} = a \end{array}\right\}$$ siehe §. 47. 1 und 2.

3) Wenn $a = b$, so ist auch: $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$.

In Worten: Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.

II. Abgeleitete Gesetze:

$$1) \quad \frac{a \, . \, b}{c} = \frac{a}{c} \, . \, b = a \, . \, \frac{b}{c}.$$

In Worten: Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, wenn man nur einen Factor (beliebig welchen) durch die Zahl dividirt und dann den erhaltenen Quotienten mit dem anderen Factor multiplicirt.

Beweis: Bei jedem Divisionsgesetz ist nachzuweisen, daß der Quotientenwerth (d. h. der Ausdruck, welcher dem Quotienten gleich sein soll) mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus giebt.

In $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} . b$ ist ab der Dividendus, c der Divisor und $\frac{a}{c} . b$ der Quotientenwerth. Das Gesetz ist also richtig, wenn $\left(\frac{a}{c} . b\right) . c = ab$ ist.

Nun ist: $\left(\frac{a}{c} . b\right) . c = \left(\frac{a}{c} . c\right) . b$ (nach §. 41. II. 4.)

$= a . b \left[\text{weil } \frac{a}{c} . c \text{ nach I. 1. dieses §.} = a \text{ ist}\right]$.

Daß $\frac{a \, . \, b}{c} = a \, . \, \frac{b}{c}$ ist, folgt daraus, daß man die Factoren a und b vertauschen darf.

Nach diesem Vorbilde versuche die nachstehenden Gesetze erst in Worten auszudrücken und dann zu beweisen.

$$2) \quad a \, . \, \frac{b}{c} = \frac{a \, . \, b}{c} = \frac{b}{c : a};$$

$$3) \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{b \, . \, c};$$

$$4) \quad \frac{a}{b \, . \, c} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b;$$

$$5) \quad \frac{a}{b} \, . \, c = \frac{a \, . \, c}{b} = a \, . \, \frac{c}{b};$$

$$6) \quad a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \, . \, c = \frac{a \, . \, c}{b};$$

$$7) \quad \frac{a}{b} \, . \, \frac{c}{d} = \frac{a \, . \, c}{b \, . \, d};$$

$$8) \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = \frac{a}{b} \, . \, \frac{d}{c};$$

$$9) \quad \frac{a}{b} = \frac{a \, . \, c}{b \, . \, c};$$

$$10) \quad \frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c};$$

$$11) \quad \frac{a - b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c};$$

$$12) \quad \frac{a}{b} = x + \frac{a - bx}{b}.$$

In Worten: Soll eine Zahl a durch eine Zahl b dividirt werden, so erhält man eine Summe zum Quotienten, wenn man den ersten Summanden x beliebig wählt und dann den zweiten dadurch bildet, daß man das Product aus dem ersten Summanden x und dem Divisor b von dem Dividendus a abzieht und die Differenz $a - bx$ durch den Divisor b dividirt.

B. Dividiren mit positiven und negativen Zahlen.

§. 54.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (+a) : (+b) = +\frac{a}{b} \\ 2)\ (-a) : (-b) = +\frac{a}{b} \\ 3)\ (+a) : (-b) = -\frac{a}{b} \\ 4)\ (-a) : (+b) = -\frac{a}{b} \end{array}\right\} \text{z. B.} \left\{\begin{array}{l} (+12) : (+3) = +4 \\ (-12) : (-3) = +4 \\ (+12) : (-3) = -4 \\ (-12) : (+3) = -4 \end{array}\right.$$

In Worten: Sind positive und negative Zahlen zu dividiren, so dividire man ihre Glieder und gebe dem Quotienten das Vorzeichen +, wenn die Zahlen gleiche Vorzeichen, — wenn sie ungleiche Vorzeichen haben.

Beweis: Man überzeugt sich leicht, daß in allen 4 Fällen Quotient mal Divisor dem Dividendus gleich ist; z. B. bei Nr. 2: $(-b) \cdot \left(+\frac{a}{b}\right) = -\left(b \cdot \frac{a}{b}\right) = -a$.

Dritter Abschnitt.

Von den Theilern und Vielfachen, und von den Brüchen.

Erstes Kapitel.

Von den Theilern und Vielfachen.

§. 55.

1) Eine Zahl heißt ein Theiler (oder Maß) einer anderen Zahl, wenn sie in derselben ohne Rest aufgeht. — 3 ist z. B. ein Theiler von 6; 4 ist ein Theiler von 20.

2) Eine Zahl wird ein Vielfaches einer anderen genannt, wenn sie durch letztere ohne Rest getheilt werden kann. Z. B. 12 ist ein Vielfaches von 4.

3) Eine Zahl heißt ein gemeinschaftlicher Theiler mehrerer Zahlen, wenn sie in jeder der letzteren ohne Rest aufgeht. Z. B. 2 ist ein gemeinschaftlicher Theiler von 4, 6, 8, 10.

4) Eine Zahl wird ein gemeinschaftliches Vielfache mehrerer Zahlen genannt, wenn sie durch jede der letzteren ohne Rest getheilt werden kann. Z. B. 36 ist ein gemeinschaftliches Vielfache von 2, 3, 4, 6, 9, 12 und 18.

5) Jede Zahl, welche nur durch 1 und sich selbst ohne Rest theilbar ist, heißt eine einfache Zahl, absolute Primzahl, oder kurzweg Primzahl. — Alle anderen Zahlen werden zusammengesetzte Zahlen genannt.

Die Primzahlen, welche unter den ersten 100 Zahlen vorkommen, sind: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

6) Zwei oder mehrere Zahlen heißen **relative Primzahlen** oder relativ prim, wenn sie keinen gemeinschaftlichen Theiler, außer 1 haben. Relative Primzahlen sind z. B. 15 und 26; 8, 9 und 21.

7) Jede durch 2 ohne Rest theilbare Zahl heißt eine **gerade Zahl**; jede andere wird eine **ungerade** Zahl genannt.

Die Reihe der geraden Zahlen ist: 2, 4, 6, 8, 10...

Die Reihe der ungeraden Zahlen ist: 1, 3, 5, 7, 9, 11...

§. 56.

1) Jeder gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen ist auch ein Theiler der Summe und der Differenz dieser Zahlen.

Beweis: Ist die Zahl n (z. B. 3) ein Theiler der Zahlen a (12) und b (9), so sind $\frac{a}{n}\left(\frac{12}{3}\right)$ und $\frac{b}{n}\left(\frac{9}{3}\right)$ ganze Zahlen. Werden 2 ganze Zahlen addirt oder subtrahirt, so muß man in beiden Fällen wieder eine ganze Zahl erhalten, also sind $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\left(\frac{12}{3}+\frac{9}{3}\right)$ und $\frac{a}{n}-\frac{b}{n}\left(\frac{12}{3}-\frac{9}{3}\right)$ und folglich auch $\frac{a+b}{n}\left(\frac{12+9}{3}\right)$ und $\frac{a-b}{n}\left(\frac{12-9}{3}\right)$ ganze Zahlen.

2) Jeder Theiler einer Zahl ist auch ein Theiler jedes Vielfachen einer Zahl.

Beweis: Ist n (5) ein Theiler von a (15), so ist (nach 1 dieses §.) n (5) auch ein Theiler von der Summe a + a + a + ... b mal (15 + 15 + 15), d. h. von b . a (3 × 15).

§. 57.

1) Jeder gemeinschaftliche Theiler des Divisors und des Dividendus einer Division ist auch ein Theiler des Divisionsrestes.

2) Jeder gemeinschaftliche Theiler des Divisors und des Divisionsrestes ist auch ein Theiler des Dividendus.

Beweis: Bezeichnet d den Divisor, D den Dividendus, Q den Quotienten und r den Rest, so folgt aus dem Begriff der Division:

I. $D - dQ = r$ (§. 49. 1)
II. $dQ + r = D$ (§. 51).

Ist nun eine Zahl n

1) ein Theiler von D und d, so ist sie auch (nach §. 56. 2) ein Theiler von dQ, also auch von D − dQ (§. 56. 1) und da D − dQ = r ist, auch von r.

2) ein Theiler von d und r, so ist n auch ein Theiler von dQ (§. 56. 2), also auch von dQ + r (§. 56. 1) und da dQ + r = D ist, auch von D.

§. 58.

Aufgabe: Man soll den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier gegebenen Zahlen finden, z. B. von 161 und 253.

Lösung: Man dividire (s. nachstehendes Beispiel) mit der

161 | 253 | 1
161
92 | 161 | 1
92
69 | 92 | 1
69
23 | 69 | 3
69
0

kleineren Zahl (161) in die größere (253), dann mit dem Rest (92) in den vorigen Divisor (161), hierauf wieder mit dem neuen Rest (69) in den vorigen Divisor (92) u. s. f. bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist dann der größte gemeinschaftliche Theiler der gegebenen Zahlen. Ist der letzte Divisor 1, so sind die gegebenen Zahlen relative Primzahlen.

Beweis: Der Beweis zerfällt in drei Theile:

1) Die Rechnung muß in jedem Falle aufgehen. — Da der Rest einer Division stets kleiner ist als der Divisor, so werden die auf einander folgenden Reste (92, 69, 23) immer kleiner und kleiner, folglich muß man, falls die Division nicht schon früher aufgeht, zuletzt auf den Rest 0 kommen.

2) Der letzte Divisor 23 muß ein Theiler der gegebenen Zahlen 161 und 253 sein. — Aus der letzten Division geht hervor, daß 23 ein Theiler von 69 ist. In der vorletzten Division ist nun 23 ein Theiler des Divisors 69 und des Restes 23, folglich auch des Dividendus 92 (§. 57. 2). Hieraus folgt weiter: In der drittletzten Division ist 23 ein Theiler des Divisors 92 und des Restes 69, also auch des Dividendus 161. Ferner kann man schließen: In der viertletzten Division (welche hier auch die erste ist) ist 23 ein Theiler des Divisors 161 und des Restes 92, folglich auch des Dividendus 253.

3) Der letzte Divisor 23 ist der größte gemeinschaftliche Theiler der gegebenen Zahlen 161 und 253. — Denn wäre irgend eine Zahl, welche x heißen mag, größer als 23 und doch ein Theiler von 161 und 253, so wäre sie zunächst in der ersten Division ein Theiler des Divisors und des Dividendus, also (nach §. 57. 1) auch ein Theiler des Restes 92. Nun könnte man weiter schließen: Aus demselben Grunde müßte sie in der zweiten Division wieder ein Theiler des Restes 69 und endlich auch in der dritten Division ein Theiler des Restes 23 sein. Dies letzte ist aber unmöglich, da eine größere Zahl nie in einer kleineren ohne Rest aufgehen kann; folglich muß 23 der größte gemeinschaftliche Theiler von 161 und 253 sein. Beispiele Seite 145. —

§. 59.

Merkmale für die Theilbarkeit der Zahlen.

Eine Zahl ist theilbar (ohne Rest)

1) durch 2, wenn ihre letzte Ziffer durch 2 theilbar oder eine Null ist;

2) durch 3 und 9, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 3, beziehungsweise 9 theilbar ist.

3) durch 4, wenn die Zahl, welche durch ihre beiden letzten Ziffern dargestellt wird, durch 4 theilbar ist, oder wenn ihre beiden letzten Ziffern Nullen sind;

4) durch 5, wenn ihre letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist;

5) durch 6, wenn sie durch 2 und auch durch 3 theilbar ist;

6) durch 8, wenn die Zahl, welche durch ihre 3 letzten Ziffern dargestellt wird, durch 8 theilbar ist, oder wenn ihre 3 letzten Ziffern Nullen sind;

7) durch 10, wenn ihre letzte Ziffer eine Null ist;

8) durch 11, wenn der Unterschied zwischen der Summe der Ziffern in der 1sten, 3ten, 5ten ꝛc. Stelle und der Summe der Ziffern in der 2ten, 4ten, 6ten u. s. w. Stelle durch 11 theilbar oder gleich Null ist.

Beweise:

Um diese Merkmale für die Theilbarkeit der Zahlen zu finden, wollen wir eine beliebige mehrzifferige Zahl wählen und diese jedesmal in zwei Summanden zu zerlegen suchen, wovon der eine Summand stets (also ohne Rücksicht auf die zufälligen Ziffern mit welchen die Zahl geschrieben wird) durch die Zahl, für welche das Merkmal gefunden werden soll, theilbar und so groß als möglich ist. Der andere Summand enthält dann von selbst den Theil der Zahl, welcher nicht stets, sondern nur unter gewissen Bedingungen durch die in Rede stehende Zahl theilbar ist. Aus diesem Summanden wird sich dann leicht das gesuchte Merkmal ablesen lassen. Wir schließen hiernach:

ad 1) Die Einer einer Zahl sind nicht stets durch 2 theilbar, wohl aber die Zehner, da 10 durch 2 theilbar ist. Denke ich mir also die Zahl in Zehner und Einer zerlegt (z. B. $36978 = 3697$ Zehner $+ 8$ Einer $= 3697 \,.\, 10 + 8$), so erkenne ich sogleich, daß die ganze Zahl dann und nur dann durch 2 theilbar sein wird, wenn ihre Einer durch 2 theilbar sind oder wenn sie keine Einer sondern nur Zehner enthält. Das Letztere ist der Fall, wenn ihre letzte Ziffer eine Null ist.

ad 2) Weder die Einer, noch die Zehner, noch die Hunderter u. s. w. einer Zahl sind stets durch 3 oder 9 theilbar. Nun ist aber $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$ u. s. w., daher zerlege ich die Zahl, z. B. 2487 zuerst in: $2 \,.\, 1000 + 4 \,.\, 100 + 8 \,.\, 10 + 7$; dann in $2 \,.\, (999 + 1) + 4 \,.\, (99 + 1) + 8 \,.\, (9 + 1) + 7$, ferner in: $2 \,.\, 999 + 2 + 4 \,.\, 99 + 4 + 8 \,.\, 9 + 8 + 7$, und endlich in: $(2 \,.\, 999 + 4 \,.\, 99 + 8 \,.\, 9) + (2 + 4 + 8 + 7)$. Der erste Summand $(2 \,.\, 999 + 4 \,.\, 99 + 8 \,.\, 9)$ ist dann stets durch 3 und auch durch 9 theilbar, weil 3 und 9 in 999, 99, 9 aufgehen. Es wird daher die ganze Zahl nur dann durch 3 oder 9 theilbar sein, wenn auch der zweite Summand $(2 + 4 + 8 + 7)$ d. i. wenn die Summe der Ziffern, mit welchen die Zahl geschrieben wird, durch 3, beziehungsweise 9 theilbar ist.

ad 3) Einer und Zehner einer Zahl sind nicht immer durch 4 theilbar, wohl aber die Hunderter, da 4 in 100 aufgeht. Denke ich mir daher eine Zahl in 2 Summanden zerlegt, wovon der erste Summand sämmtliche Hunderter, der zweite die Zehner und Einer enthält (z. B. $15728 = 157$ Hunderter $+ 28$ Einer $= 157 \,.\, 100 + 28$), so erkenne ich sogleich, daß eine Zahl durch 4 theilbar ist, wenn die Zahl (28), welche durch ihre beiden letzten Ziffern dargestellt wird, durch 4 theilbar ist, oder wenn keine Einer und Zehner vorhanden sind, also die beiden letzten Ziffern Nullen sind.

ad 4) Die Zehner einer beliebigen Zahl sind stets durch 5 theilbar, weil 5 in 10 aufgeht; von den Einern ist nur 5 durch 5 theilbar. Denke ich mir daher eine Zahl als Summe ihrer Zehner und Einer dargestellt (z. B. $785 = 78$ Zehner $+ 5$ Einer $= 78 \,.\, 10 + 5$) so erkenne ich sogleich die Richtigkeit des angegebenen Merkmals.

ad 5) Der Beweis folgt erst aus §. 62. 2, wenn man beachtet, daß $6 = 2 \times 3$ ist.

ad 6) Einer, Zehner und Hunderter einer Zahl sind nicht stets durch 8 theilbar, wohl aber die Tausender, weil 8 in 1000 aufgeht. Denke ich mir also eine beliebige Zahl in zwei Summanden zerlegt, wovon der erste sämmtliche Tausender, der zweite die Hunderter, Zehner und Einer enthält (z. B. $15104 = 15$ Tausender $+ 104 = 15 \,.\, 1000 + 104$), so erkenne ich, daß eine Zahl nur dann durch 8 theilbar ist, wenn die Zahl (104), welche durch ihre 3 letzten Ziffern dargestellt wird, durch 8 theilbar ist, oder wenn keine Einer, Zehner und Hunderter vorhanden, also die drei letzten Ziffern Nullen sind.

ad 7) Die Einer einer Zahl sind nie durch 10 theilbar, die Zehner dagegen stets, weil 10 in 10 aufgeht. Mithin kann eine Zahl (z. B. $2370 = 237$ Zehner

= 237 . 10) nur dann durch 10 theilbar sein, wenn keine Einer vorhanden sind, d. i., wenn ihre letzte Ziffer eine Null ist.

ad 8) Weder die Einer, noch die Zehner, noch die Hunderter u. s. w. einer Zahl sind durch 11 theilbar. Nun ist aber 10 = 11 − 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 1001 − 1 und so abwechselnd fort, daher zerlege ich die gedachte Zahl, z. B. 38214 zuerst in: 3 . 10000 + 8 . 1000 + 2 . 100 + 1 . 10 + 4,
dann in: 3 . (9999 + 1) + 8 . (1001 − 1) + 2 . (99 + 1) + 1 . (11 − 1) + 4,
ferner in: 3 . 9999 + 3 + 8 . 1001 − 8 + 2 . 99 + 2 + 1 . 11 − 1 + 4,
hierauf in: (3 . 9999 + 8 . 1001 + 2 . 99 + 1 . 11) + (3 − 8 + 2 − 1 + 4),
und endlich in: (3 . 9999 + 8 . 1001 + 2 . 99 + 1 . 11) + [(3 + 2 + 4) − (8 + 1)].

Der erste Summand (3 . 9999 + 8 . 1001 + 2 . 99 + 1 . 11) ist dann stets durch 11 theilbar, weil 9999, 1001 u. s. w. durch 11 theilbar sind. Es wird daher die ganze Zahl (38214) nur dann durch 11 theilbar sein, wenn auch der zweite Summand (3 + 2 + 4) − (8 + 1) d. i. der Unterschied zwischen der Summe der Ziffern in der 1sten, 3ten, 5ten u. s. w. Stelle (3 + 2 + 4) und der Summe der Ziffern in der 2ten, 4ten, 6ten Stelle (8 + 1) durch 11 theilbar, oder = 0 ist.

§. 60.

Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zerlegen, heißt, sie als ein Product von lauter Primzahlen darstellen.

§. 61.

Aufgabe: Eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zu zerlegen, z. B. 1260.

Lösung: (Siehe nebenstehendes Beispiel.) Dividire die gegebene Zahl durch eine (gewöhnlich die kleinste) Primzahl, welche ein Theiler von ihr ist (2), den Quotienten, wenn er nicht eine Primzahl ist, aufs neue durch eine Primzahl, welche darin aufgeht (2) und wiederhole dies Verfahren so lange, bis der letzte Quotient selbst eine Primzahl ist. Sämmtliche Divisoren (2, 2, 3, 3, 5) und der letzte Quotient (7) sind alsdann die Primfactoren der gegebenen Zahl. Dies ist ohne Weiteres klar.

```
    1260
2) ―――――
     630
2) ―――――
     315
3) ―――――
     105
3) ―――――
      35
5) ―――――
       7
```

§. 62.

1) Jede zusammengesetzte Zahl besteht aus bestimmten Primfactoren; sie läßt sich nicht aus anderen Primzahlen durch Multiplication zusammensetzen. (Der Beweis hierfür überschreitet die Grenze dieses Buches.)

2) Jede Zahl ist nur durch ihre Primfactoren und dann noch durch jedes mögliche Product derselben theilbar.

3) Eine Zahl kann nur dann ein Vielfaches einer anderen Zahl sein, wenn die Primfactoren der letzteren sämmtlich unter den Primfactoren der ersteren vorkommen.

§. 63.

Aufgabe: Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen zu finden, z. B. der Zahlen 9, 12, 18, 45, 60, 63.

Lösung: 1) Zerlege jede der gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren und bilde aus denjenigen Primfactoren ein Product, welche

unbedingt nothwendig sind (siehe §. 62. 3), damit eine jede der gegebenen Zahlen darin aufgeht; dann ist dieses Product das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Beispiel:

Die Zahlen	9	12	18	45	60	63
haben zu Primfactoren	3 · 3	2 · 2 · 3	2 · 3 · 3	3 · 3 · 5	2 · 2 · 3 · 5	3 · 3 · 7
Von diesen sind nothwendig:	3 · 3	2 · 2	nichts	5	nichts	7

Daher: Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache: 1260.

In der Praxis vereinigt man gewöhnlich das Zerlegen in Primfactoren und das Herauswählen der nothwendigen nach folgender Regel (siehe nebenstehendes Beispiel):

3) ~~9~~, ~~12~~, 18, 45, 60, 63 (a)
3) 6 15 20 21 (b)
~~2~~ ~~5~~ 20 7

Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache:
$3 \times 3 \times 20 \times 7 = 1260.$

1) Schreibe die gegebenen Zahlen in eine Reihe (a) neben einander und streiche diejenigen durch, welche in einer andern dieser Reihe ohne Rest aufgehen, (die Zahlen 9 und 12). Sind mehrere gleiche Zahlen vorhanden, so werden sie sämmtlich bis auf eine durchgestrichen.

2) Dann suche eine Primzahl (3), welche wenigstens von zwei der nicht durchstrichenen Zahlen ein Theiler ist und dividire mit derselben in alle Zahlen, in welche die Division aufgeht, schreibe diesen Primfactor (3) links heraus und bilde aus den erhaltenen Quotienten und den Zahlen, in welche die Division nicht aufgeht, eine zweite Reihe (b).

3) Nun leite nach demselben Verfahren (ad 1 und 2) aus der zweiten Reihe eine dritte, aus dieser eine vierte u. s. f. ab bis es keinen Primfactor mehr giebt, welcher noch zwei Zahlen der letzten Reihe ohne Rest theilt.

4) Das Product aus allen links herausgeschriebenen Primfactoren und der in der letzten Reihe stehen gebliebenen Zahlen ist alsdann das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen (in nebenstehendem Beispiele: $3 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 7 = 1260$).

Anmerkung. 1) Benutzt man als Divisoren zusammengesetzte Zahlen, so erhält man zwar ein Vielfaches der gegebenen Zahlen, aber nicht immer das kleinste.

2) Die Lösung dieser Aufgabe ist beim Addiren und Subtrahiren der Brüche wichtig, denn sie lehrt den sogenannten Generalnenner finden (§. 72).

Zweites Kapitel.

Von den gewöhnlichen Brüchen.

§. 64.

1) Theilt man eine beliebige Größe, die man als eine Einheit oder ein Ganzes ansieht, in:

2, 3, 4, 5, allgemein in n gleiche Theile, so wird ein jeder der erhaltenen Theile beziehungsweise 1 Halb, 1 Drittel, 1 Viertel, 1 Fünftel, allgemein 1 — ntel der Größe genannt.

Nimmt man nun einen oder mehrere solcher Theile, z. B. 3 Fünftel (allgemein m — ntel), so heißt der dadurch erhaltene Zahlwerth ein **Bruch**, oder eine **gebrochene** Zahl. Die anderen Zahlwerthe werden zum Unterschiede von den Brüchen ganze Zahlen genannt.

2) Der Werth eines Bruches wird hiernach durch 2 Zahlen bestimmt:

a. durch **die** Zahl, welche angiebt, in wieviel gleiche Theile die Einheit getheilt worden ist, und

b. durch **die** Zahl, welche anzeigt, wieviel solcher Theile genommen worden sind.

Erstere Zahl bestimmt den Namen der Theile und wird aus diesem Grunde **Nenner** genannt, letztere zählt die Theile und heißt deshalb **Zähler** des Bruches.

3) Um Brüche kurz zu bezeichnen, schreibt man den Nenner unter den Zähler und sondert beide durch einen Strich von einander ab. Z. B. $\frac{3}{5}$ bedeutet: Eine Einheit ist in 5 gleiche Theile getheilt und es sind 3 dieser Theile genommen worden.

Was bedeutet demnach $^5/_6$ Mark?

4) Der Bruch $\frac{3}{5}$ drückt aus, daß $\frac{1}{5}$ 3mal vorhanden ist. Ob alle diese Fünftel von einem einzigen oder von mehreren in 5 gleiche Theile getheilten (gleichen) Ganzen herrühren, ist offenbar in Beziehung auf den Werth von $\frac{3}{5}$ gleichgültig. Denkt man sich nun 3 gleiche Einheiten und von jeder derselben $\frac{1}{5}$ entnommen, so hat man offenbar in diesen 3 Fünfteln den 5ten Theil von 3 Einheiten. Es stimmt also der Werth des Bruches $\frac{3}{5}$ mit dem Werthe des Quotienten $\frac{3}{5}$ überein. Aus diesem Grunde dürfen Bruch und Quotient auf dieselbe Weise bezeichnet und in der Praxis mit einander verwechselt werden.

Hieraus folgt auch: Jede ganze Zahl kann als ein Bruch angesehen werden, dessen Zähler die Zahl selbst und dessen Nenner 1 ist; z. B. $4 = \frac{4}{1}$, $12 = \frac{12}{1}$, $n = \frac{n}{1}$.

5) Ist der Zähler eines Bruches seinem Nenner gleich, so hat man die volle Einheit. $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \ldots \frac{n}{n} = 1$.

§. 65.

1) Werden zwei oder mehrere gleiche Einheiten in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt, so kann man auch mehr Theile zu einer gebrochenen Zahl vereinigen als zu einer Einheit gehören; z. B. $\frac{12}{5}$. Solche Brüche werden jedoch unechte Brüche genannt. Zu den echten Brüchen zählt man nur diejenigen, welche kleiner als eine Einheit sind. Als äußerliches Merkmal gilt: Bei den echten Brüchen ist der Zähler kleiner, bei den unechten gleich oder größer als der Nenner. Z. B. $^3/_4$ ist ein echter, $^9/_4$ ein unechter Bruch.

2) Die Verbindung einer ganzen Zahl mit einem Bruch zu einem Zahlwerthe, z. B. $4^3/_5$ (eigentlich $4 + ^3/_5$) wird ein gemischter Bruch oder eine gemischte Zahl genannt.

3) Brüche mit gleichen Nennern heißen gleichnamige Brüche; z. B. $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{11}{12}$.

§. 66.

1. Aufgabe: Eine gemischte Zahl, z. B. $5^3/_4$, in einen unechten Bruch zu verwandeln (einzurichten).

Lösung: Eine Einheit enthält 4 Viertel, folglich enthalten 5 Einheiten $5 \times 4 = 20$ Viertel. Hierzu die außerdem vorhandenen 3 Viertel hinzugezählt, giebt $\frac{23}{4}$.

2. Aufgabe: Einen unechten Bruch, z. B. $\frac{47}{6}$ in eine gemischte Zahl zu verwandeln.

Lösung: $\frac{47}{6}$ drückt den 6ten Theil von 47 Einheiten aus. 6 ist in 47 7mal enthalten und 5 Einheiten bleiben übrig, also ist $\frac{47}{6} = 7^5/_6$ (§. 48. 2) oder: Zu einer Einheit gehören 6 Sechstel, mithin sind in 47 Sechsteln so viel Einheiten enthalten als 6 in 47 enthalten ist. Dies ist 7mal der Fall. 7 Einheiten sind gleich $7 \times 6 = 42$ Sechstel, folglich sind außer den 7 Einheiten noch 5 Sechstel, im Ganzen also $7^5/_6$ vorhanden.

Anmerkung. Soll man wirklich immer so weitläufig rechnen wie hier geschehen? Gewiß nicht! Ist erst durch wiederholtes Zergliedern der Lösung in alle einzelnen Schlüsse, welche der Verstand zu machen hat, ein klares Verständniß gewonnen, so leitet sich der Schüler darauf die praktische Regel von selbst ab. Bis dahin wehre man aber ganz entschieden dem mechanischen, gedankenlosen Rechnen. Geradezu verderblich würde es wirken, wollte man z. B. zur Lösung der ersten Aufgabe gleich von vornherein die mechanische Regel zum Auswendiglernen geben: Multiplicire die Ganzen mit dem Nenner des Bruches, addire zum Product den Zähler und setze unter die erhaltene Summe den Nenner. Geistesträgen Schülern sind solche Regeln allerdings eine höchst willkommene Sache. Aber für diese ist es ganz besonders nothwendig, daß sie durch die Forderung ausführlicher Schlüsse an klares Denken und Begründen gewöhnt werden. Dann wird das bekannte Sprichwort: „Er ist in die Brüche gerathen“ seine Geltung bald verlieren.

§. 67.

1) Haben zwei Brüche gleiche Nenner, so drückt derjenige den größeren Werth aus, welcher den größeren Zähler hat;

denn er enthält mehr ebenso große Theile als der andere. $^6/_{13}$ ist z. B. größer als $^4/_{13}$.

2) Haben zwei Brüche gleiche Zähler, so drückt derjenige den größeren Werth aus, welcher den kleineren Nenner hat;

denn er enthält zwar nur ebensoviel, aber größere Theile als der andere, weil bei ihm die Einheit in weniger Theile getheilt ist.

Z. B. $^3/_4$ ist größer als $^3/_5$.

Anmerkung. Beim Vergleichen von unbenannten Brüchen wird stillschweigend vorausgesetzt, daß sie sich auf dieselbe Einheit beziehen.

§. 68.

1) Macht man den Zähler eines Bruches um 2, 3, 4... allgemein nmal größer, so wird dadurch der Werth des Bruches um 2, 3, 4... nmal größer;

denn man erhält dadurch 2, 3, 4... nmal mehr ebenso große Theile. Z. B. $^6/_7$ ist 3mal so groß als $^2/_7$.

2) Macht man den Nenner eines Bruches um 2, 3, 4... nmal größer, so wird der Werth des Bruches um 2, 3, 4... nmal kleiner;

denn die Einheit wird nun in 2, 3, 4... nmal mehr Theile getheilt, folglich erhält jeder Theil und somit auch der ganze Bruch einen 2, 3, 4... nmal kleineren Werth. Z. B. $^2/_{15}$ ist 5mal kleiner als $^2/_3$.

3) Macht man den Zähler eines Bruches um 2, 3, 4... nmal kleiner, so wird der Werth des Bruches um 2, 3, 4... nmal kleiner;

denn man erhält dadurch 2, 3, 4... nmal weniger ebenso große Theile. Z. B. $^3/_{10}$ ist 3mal kleiner als $^9/_{10}$.

4) Macht man den Nenner eines Bruches um 2, 3, 4... nmal kleiner, so wird der Werth des Bruches um 2, 3, 4... nmal größer;

denn die Einheit wird nun in 2, 3, 4... nmal weniger Theile getheilt; folglich erhält jeder Theil und somit auch der ganze Bruch einen 2, 3, 4... nmal größeren Werth. Z. B. $^5/_2$ ist 4mal größer als $^5/_8$.

Anmerkung. Die Gesetze dieses §. bilden die Grundlage für das ganze Bruchrechnen. Auf ein klares, geläufiges Verständniß derselben ist daher ein besonderer Werth zu legen; nöthigenfalls muß der Lehrer noch zu besonderen Veranschaulichungsmitteln seine Zuflucht nehmen.

§. 69.

1) Aus §. 68. 1, in Verbindung mit 2 folgt:

Der Werth eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt.

$$\text{Z. B.}\quad \frac{4}{5}=\frac{4\times 3}{5\times 3}=\frac{12}{15}.$$

2) Aus §. 68. 3 in Verbindung mit 4 folgt:

Der Werth eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man seinen Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt:

$$\text{Z. B.}\quad \frac{9}{12}=\frac{9:3}{12:3}=\frac{3}{4}.$$

3) Der Werth eines Bruches kann hiernach durch unendlich viele verschiedene Zahlenpaare ausgedrückt werden:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}\ \text{u. s. w.};\quad \frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Das Multipliciren von Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl wird Erweitern, das Dividiren Heben oder Reduciren genannt.

§. 70.

Heben der Brüche. Haben Zähler und Nenner eines Bruches einen gemeinschaftlichen Theiler, so ist es in den mehrsten Fällen vortheilhaft, durch diesen den Bruch zu heben. Man versuche also, zunächst mit Hülfe der Merkmale für die Theilbarkeit der Zahlen, oder mitunter auch durch bloßes Probiren, eine Zahl zu finden, welche im Zähler und Nenner des Bruches ohne Rest aufgeht. Gelingt dies, so hebt man den Bruch durch diese Zahl und wendet dann auf den neu entstehenden Bruch wieder dasselbe Verfahren an u. s. f. bis man keine Zahl mehr findet, welche im Zähler und Nenner des Bruches ohne Rest aufgeht. Die nachfolgenden Beispiele zeigen die gebräuchlichste Anordnung der Rechnung:

$$1)\ \frac{132}{198}\,\Big|\,\overset{2}{\frac{66}{99}}\,\Big|\,\overset{11}{\frac{6}{9}}\,\Big|\,\overset{3}{\frac{2}{3}};\quad 2)\ \frac{30\cancel{0}}{36\cancel{0}}\,\Big|\,\overset{6}{\frac{5}{6}};\quad 3)\ \frac{60\cancel{000}}{75\cancel{000}}\,\Big|\,\overset{5}{\frac{12}{15}}\,\Big|\,\overset{3}{\frac{4}{5}}.$$

Auf diesem Wege gelangt man jedoch nicht immer sicher zum Ziele. Sind Zähler und Nenner absolute Primzahlen oder übersieht man, daß kein Primfactor des Zählers unter den Primfactoren des Nenners vorhanden ist, so weiß man bestimmt, daß ein Reduciren des Bruches nicht mehr möglich ist. Aber nicht selten, besonders bei großen Zahlen, bleibt es zweifelhaft, ob ein gegebener (oder schon theilweise reducirter) Bruch gehoben werden kann oder nicht. In diesem Falle suche man nach §. 58 zum Zähler und Nenner den größten gemeinschaftlichen Theiler. Ist dieser die Zahl 1, so läßt sich der Bruch nicht heben; ist er eine größere Zahl, so hebt man durch diese und ist dann sicher, daß ein weiteres Reduciren nicht möglich ist.

Beispiel: $\frac{133}{247}\Big|\frac{7}{13}$ (gekürzt durch 19)

Suchen des größten gemeinschaftlichen Theilers.

```
133|247|1
   |133|
 114|13·3|1
    |11 4|
     19|114|6
       |114|
         0.
```

§. 71.

Erweitern der Brüche. Oft wünscht man dagegen einen Bruch in einen andern zu verwandeln, dessen Nenner ein bestimmtes Vielfache von dem Nenner des gegebenen Bruches ist; z. B. $^4/_5$ in Funfzehntel. Dann dividire man mit dem Nenner (5) des gegebenen Bruches in die Zahl (15), welche der neue Nenner werden soll und multiplicire mit dem erhaltenen Quotienten (3) Zähler und Nenner des gegebenen Bruches.

Hiernach ist $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$.

Die Begründung folgt aus §. 69. 1.

Auch kann man schließen: $\frac{1}{5}$ ist gleich $\frac{3}{15}$, also sind $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

§. 72.

Aufgabe: Gegebene Brüche gleichnamig zu machen.

Lösung: Man ermittelt nach §. 63 das kleinste gemeinschaftliche Vielfache sämmtlicher Nenner der gegebenen Brüche und verwandele nach §. 71 jeden gegebenen Bruch in einen anderen, welcher dieses Vielfache zu seinem Nenner hat.

Dieses Vielfache wird der Hauptnenner oder Generalnenner der Brüche genannt.

§. 73.

Addition der Brüche.

1) Gleichnamiger Brüche. Man addire die Zähler und setze unter die Summe den gemeinschaftlichen Nenner. Z. B. $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{15}{8} = 1^7/_8$.

Beweis: Von der Richtigkeit dieses Verfahrens überzeugt man sich sogleich, wenn man statt $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{7}{8}$ setzt: 3 Achtel + 5 Achtel + 7 Achtel. Diese Summe ist aus demselben Grunde = (3 + 5 + 7) Achtel = $\frac{15}{8}$, aus welchem 3 ℌ + 5 ℌ + 7 ℌ = 15 ℌ sind.

2) Ungleichnamiger Brüche. Man verwandele die gegebenen Brüche nach §. 72 in gleichnamige und addire hierauf wie vorher. Die gewöhnliche Anordnung der Rechnung ist aus nachstehendem Beispiele zu ersehen:

	1008		
$27\frac{1}{9}$	112	$^{112}/_{1008}$	
$152\frac{5}{12}$	84	$^{420}/_{1008}$	
$85\frac{11}{16}$	63	$^{693}/_{1008}$	
$3\frac{5}{7}$	144	$^{720}/_{1008}$	
$48\frac{2}{21}$ 2	48	$^{96}/_{1008}$	
$317\frac{25}{1008}$	1008	2041	2
		2016	
		25	

Suchen des Generalnenners:

$$3)\ \frac{9,\ 12,\ 16,\ \not{7},\ 21}{3,\ \not{4},\ 16,\ \ 7}$$

$$3 \times 3 \times 16 \times 7 = 1008.$$

Erläuterung: 1) Schreibe — des bequemen Rechnens wegen — die Summanden so unter einander, daß genau Bruch unter Bruch, Einer unter Einer u. s. w. stehen. 2) Suche zu den gegebenen Brüchen (nach §. 63) den Generalnenner und schreibe diesen oben rechts hin, hier 1008. 3) Verwandele jeden der gegebenen Brüche in einen solchen, welcher den Generalnenner zu seinem Nenner hat. Hierzu schließe (§. 71) : 9 in 1008 giebt 112, $112 \times 1 = 112$, 112×9 (wie sich schon von selbst versteht) $= 1008$, also $^1/_9 = {}^{112}/_{1008}$. Die Zahl 112 wird dabei rechts neben $^1/_9$ und der Bruch $^{112}/_{1008}$ rechts neben 112 gesetzt. — Auf diese Weise ergeben sich nach und nach die Brüche $^{420}/_{1008}$, $^{693}/_{1008}$ u. s. w. 4) Addire die Zähler der gleichnamigen Brüche; dies giebt 2041, also ist die Summe aller Brüche $= {}^{2041}/_{1008}$. 5) Ist die erhaltene Summe, wie hier, ein unechter Bruch, so verwandele diesen sogleich in eine gemischte Zahl, indem du mit dem Generalnenner 1008 in die Summe der Zähler 2041 dividirst — giebt $2^{25}/_{1008}$. 6) Endlich werden die herausgezogenen Ganzen — hier 2 — und die vorhandenen Ganzen auf bekannte Weise addirt — giebt 317 — also im Ganzen $317^{25}/_{1008}$.

Anmerkung. In der Praxis werden die (in vorstehendem Beispiele klein gedruckten) Nenner der gleichnamig gemachten Brüche nicht wirklich hingeschrieben; man denkt sich nur unter jeden der erhaltenen Zähler (112, 420 ꝛc.) den Generalnenner (1008) gesetzt.

§. 74.

Subtraction der Brüche.

1) Gleichnamiger Brüche:

a. Man ziehe vom Zähler des Minuendus den Zähler des Subtrahendus ab und setze unter die Differenz den gleichen Nenner.

$$\text{Z. B. } \frac{13}{15} - \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Beweis: Von der Richtigkeit dieses Verfahrens überzeugt man sich sogleich, wenn man statt $\frac{13}{15} - \frac{4}{15}$ schreibt 13 Funfzehntel — 4 Funfzehntel.

b. Ist der Minuendus eine gemischte Zahl und der Bruch des Subtrahendus größer als der des Minuendus, so entnimmt (borgt)

man von der ganzen Zahl des Minuendus eine Einheit, zieht von dieser den Bruch ab und zählt zum Rest den Bruch des Minuendus hinzu.

Z. B. Minuendus: $6 \cdot {}^5/_8$	Erläuterung: 7 Achtel von 5 Achteln geht nicht. Von 6 eine Einheit entnommen (geborgt) giebt 8 Achtel. — 7 Achtel von 8 Achteln bleibt 1 Achtel und hierzu 5 Achtel giebt 6 Achtel $= {}^6/_8$; 2 von 5 bleibt 3.
Subtrahendus: $2^7/_8$	
Differenz: $3^6/_8$	

c. Ist der Minuendus nur eine ganze Zahl, so verfährt man ganz analog (ähnlich).

Z. B. Minuendus: $8 \cdot$	Erläuterung: 3 Fünftel von keinen Fünfteln geht nicht. Von 8 eine Einheit entnommen (geborgt) giebt 5 Fünftel. — 3 Fünftel von 5 Fünfteln bleiben $^2/_5$. — 5 von 7 läßt 2.
Subtrahendus: $5^3/_5$	
Differenz: $2^2/_5$	

2) Ungleichnamiger Brüche:

Man verwandele die gegebenen Brüche nach §. 72 in gleichnamige und verfahre dann wie vorher. Z. B.

	12				40	
$12^3/_4$	3	$^9/_{12}$		$16 \cdot {}^3/_5$	8	$^{24}/_{40}$
$4^2/_3$	4	$^8/_{12}$		$5\ {}^7/_8$	5	$^{35}/_{40}$
$8^1/_{12}$		1		$10^{29}/_{40}$		29.

Anmerkung. Die in vorstehenden Beispielen klein gedruckten Nenner (12, 40) werden in der Praxis gewöhnlich fortgelassen.

Multiplication und Divison mit Brüchen.

§. 75.

1) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man mit der ganzen Zahl entweder den Zähler desselben multiplicirt, oder den Nenner dividirt.

Letzteres geschieht dann mit Vortheil, wenn die ganze Zahl in dem Nenner ohne Rest aufgeht. Z. B.

$$7 \times \frac{5}{6} = \frac{7 \times 5}{6} = \frac{35}{6} = 5^5/_6;\ 3 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6:3} = \frac{5}{2} = 2^1/_2.$$

Haben im ersteren Falle der Nenner des Bruches und die Zahl mit welcher multiplicirt werden soll, einen gemeinschaftlichen Theiler, so hebe man vor der Multiplication durch letzteren; z. B. $4 \times \frac{5}{6} = \overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{10}{3} = 3^1/_3.$

Beweis folgt unmittelbar aus §. 68. 1 und 4.

2) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man entweder durch die ganze Zahl den Zähler dividirt oder mit ihr den Nenner multiplicirt.

Ersteres geschieht dann mit Vortheil, wenn die ganze Zahl in dem Zähler ohne Rest aufgeht.

Z. B. $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5};\ \frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5 \times 3} = \frac{4}{15}.$

Haben im letzteren Falle der Zähler des Bruches und die Zahl durch welche dividirt werden soll, einen gemeinschaftlichen Theiler, so hebe man vorher durch diesen. Z. B. $\frac{8}{9}:6=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{9\times\underset{3}{\cancel{6}}}=\frac{4}{27}$.

Beweis folgt unmittelbar aus §. 68. 2 und 3.

3) Eine gemischte Zahl wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man entweder:

a. die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann diesen multiplicirt, oder (was gewöhnlich vortheilhafter ist)

b. sie als Summe auffaßt und jeden Summanden multiplicirt. Entsteht bei dem Multipliciren des Bruches ein unechter Bruch, so verwandelt man diesen in eine gemischte Zahl und zählt die erhaltenen Ganzen zu den anderen Ganzen hinzu.

Z. B. $4\times 6^2/_3=4\times {}^{20}/_3={}^{80}/_3=26^2/_3$. Oder man rechnet:
$4\times 6=24;\ 4\times {}^2/_3={}^8/_3=2^2/_3;\ 24+2^2/_3=26^2/_3$.

Beweis: ad a ist selbstverständlich; ad b folgt aus §. 37. 1.

4) Eine gemischte Zahl wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man entweder:

a. die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann diesen dividirt, oder (was gewöhnlich vortheilhafter ist)

b. sie als Summe auffaßt, zuerst die Ganzen derselben dividirt, dann, falls ein Rest bleibt, diesen mit dem Bruche zu einem unechten Bruche vereinigt, und hierauf letzteren dividirt.

Z. B. $11^3/_4:4={}^{47}/_4:4={}^{47}/_{16}=2^{15}/_{16}$. Oder man rechnet: 4 in 11 giebt 2 und 3 bleibt Rest; $3+{}^3/_4={}^{15}/_4;\ {}^{15}/_4:4={}^{15}/_{16}$, also ist $11^3/_4:4=2^{15}/_{16}$.

Beweis: ad a ist selbstverständlich; ad b folgt aus §. 48. 1.

§. 76.

1) Ein beliebiger Zahlwerth (er sei ganze Zahl, Bruch, gemischte Zahl oder — eine §. 95 erklärte — mehrfach benannte Zahl) wird mit einem Bruche multiplicirt, wenn man nach einander, in beliebiger Reihenfolge, mit dem Zähler multiplicirt und durch den Nenner dividirt.

Z. B. $^2/_3\times 4=\frac{2\times 4}{3}={}^8/_3=2^2/_3;\ {}^2/_3\times 7^3/_4=(2\times 7^3/_4):3$
$=15^1/_2:3=5^1/_6;\ {}^2/_3\times {}^7/_9=(2\times {}^7/_9):3=\frac{14}{9}:3=\frac{14}{27}$.

Beweis: Ist z. B. $7^3/_4$ mit $^2/_3$ zu multipliciren, so kann man schließen: Mit $^2/_3$ multipliciren heißt mit dem 3ten Theile von 2 multipliciren; man wird also, wenn man mit $^2/_3$ multiplicirt, auch nur den 3ten Theil des Products erhalten, welches sich ergiebt, wenn man mit 2 vervielfältigt. Nun ist
$2\times 7^3/_4=15^1/_2$ folglich $^2/_3\times 7^3/_4=(2\times 7^3/_4):3=15^1/_2:3=5^1/_6$.

Anmerkung: Zur vollen Klarheit über das Multipliciren mit einem Bruch gelangt man am leichtesten, wenn man ein Beispiel aus der Praxis der Betrachtung zu Grunde legt. Ein Neuloth kostet $7^3/_4$ Mk., wie viel hat man für $^2/_3$ Neuloth zu zahlen? Man schließt $^2/_3$mal soviel, weil man weiß, daß 2 Loth 2mal, 3 Loth 3mal, 4 Loth 4mal... soviel kosten als 1 Loth. Was heißt es aber, $^2/_3$mal soviel? Der gewöhnliche Begriff des Multiplicirens reicht hier nicht aus, weil $7^3/_4$ nicht $^2/_3$mal als Summand gesetzt werden kann. Wohl aber sind unzweifelhaft folgende Schlüsse richtig. Wenn ein Loth $7^3/_4$ Mk. kostet, so hat man für $^1/_3$ Loth 3mal weniger also $(7^3/_4 : 3)$ und für $^2/_3$ Loth 2mal mehr, folglich $(7^3/_4 : 3) \times 2$ zu bezahlen. Dies Resultat stimmt mit dem obigen überein.

2) Hieraus geht unmittelbar folgende — für das praktische Rechnen sehr bequeme — Regel hervor:

Ein Bruch wird mit einem Bruch multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt;

$$\text{denn: } \frac{2}{3} \times \frac{7}{9} = \left(2 \times \frac{7}{9}\right) : 3 = \frac{2 \times 7}{9} : 3 = \frac{2 \times 7}{3 \times 9}.$$

Hat hierbei ein Zähler mit einem Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler, so hebe man durch diesen vor der Multiplication.

$$\text{Z. B. } \frac{11}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{11 \times \not{3}}{\underset{4}{\not{12}} \times 4} = \frac{11}{16}; \quad \frac{8}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{\overset{2}{\not{8}} \times \not{3}}{\underset{3}{\not{9}} \times \not{4}} = \frac{2}{3}.$$

§. 77.

1) Ein beliebiger Zahlwerth wird durch einen Bruch dividirt, wenn man nach einander, in beliebiger Reihenfolge, durch den Zähler dividirt und mit dem Nenner multiplicirt.

Beweis: Ist z. B. 8 durch $^3/_4$ zu dividiren, so kann man schließen: Durch $^3/_4$ dividiren heißt durch den 4. Theil von 3 dividiren, man wird also, wenn man durch $^3/_4$ theilt, 4mal mehr erhalten, als wenn man durch 3 dividirt, denn es ist z. B. $36 : 12 = 3$, und $36 : 3 = 12$.

$$\text{Nun ist } 8 : 3 = \frac{8}{3}, \text{ folglich } 8 : \frac{3}{4} = \frac{8}{3} \times 4 = \frac{8 \cdot 4}{3} = 10^2/_3.$$

Anmerkung: In der Praxis gestalten sich diese Schlüsse ganz anschaulich. Z. B. Wie viel kostet 1 Neuloth, wenn für $^3/_4$ Loth 8 Mk. bezahlt werden müssen? Man schließt analog wie bei ganzen Zahlen; $^3/_4$mal weniger, also $(8 : {}^3/_4)$ Mk. Was unter $^3/_4$mal weniger zu verstehen ist, ergiebt sich nun aus folgenden Schlüssen: Wenn $^3/_4$ Loth 8 Mk. kosten, so hat man für $^1/_4$ Loth 3mal weniger, also $^8/_3$ Mk. und für 1 Loth 4mal mehr, folglich $\frac{8}{3} \times 4 = \frac{8 \times 4}{3}$ Mk. zu bezahlen.

2) Hieraus geht unmittelbar folgende — für das praktische Rechnen sehr bequeme — Regel hervor.

Durch einen Bruch wird dividirt, wenn man ihn umkehrt (d. h. Zähler und Nenner vertauscht) und dann multiplicirt.

$$\text{Denn: } \frac{7}{8} : \frac{2}{3} = \left(\frac{7}{8} : 2\right) \times 3 = \frac{7}{8 \times 2} \times 3 = \frac{7 \times 3}{8 \times 2}.$$

Auch hier ist es vortheilhaft, vor der Multiplication möglichst viel zu heben. $\text{Z. B. } 8 : \frac{4}{5} = \frac{\overset{2}{\not{8}} \times 5}{\not{4}} = 10; \quad \frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{\overset{4}{\not{8}}}{\underset{3}{\not{9}}} = \frac{\not{3}}{\not{2}} = \frac{4}{3} = 1^1/_3.$

Frage: Wie erklären sich die für den ersten Blick auffallenden Erscheinungen, daß wenn man mit einem echten Bruch multiplicirt, das Product kleiner wird als die multiplicirte Zahl? und daß, wenn man durch einen echten Bruch theilt, der Quotient größer wird, als die getheilte Zahl?

§. 78.

Soll eine gemischte Zahl mit einem Bruch oder einer anderen gemischten Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so verwandele man die gemischten Zahlen in unechte Brüche und führe dann die Multiplication oder Division aus.

Z. B. $5^7/_8 \times {}^2/_3 = \frac{47}{\cancel{8}_4} \times \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{47}{12} = 3^{11}/_{12}$; $7^3/_5 : 2^2/_5 = \frac{38}{5} : \frac{12}{5} =$

$$\frac{\overset{19}{\cancel{38}} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \underset{6}{\cancel{12}}} = 3^1/_6.$$

§. 79.

Sämmtliche Gesetze für das Multipliciren und Dividiren mit Brüchen lassen sich in folgende practische Regel zusammenfassen:

Gemischte Zahlen verwandele in unechte Brüche und unter jede ganze Zahl setze den Nenner 1. Soll nun multiplicirt werden, so multiplicire Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner, soll dividirt werden, so kehre den Divisorbruch um und multiplicire dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.

§. 80.

1) Durch einen Bruchstrich angedeutete Divisionen mit Brüchen wie $\frac{^1/_2}{3}$, $\frac{4}{^2/_3}$, $\frac{^1/_2}{^5/_6}$, $\frac{1^2/_3}{5}$, $\frac{7^1/_2}{4^2/_3}$ werden häufig Doppelbrüche, auch wohl Bruchsbrüche genannt. Den Hauptbruchstrich muß man bei dieser Schreibweise deutlich hervorheben, wenn keine Zweideutigkeit entstehen soll. Die über demselben stehenden Zahlwerthe ($^1/_2$, 4, $^1/_2$, $1^2/_3$, $7^1/_2$) heißen immer noch Zähler und die unter demselben stehenden (3, $^2/_3$, $^5/_6$, 5, $4^2/_3$) Nenner.

2) Doppelbrüche werden in gewöhnliche Brüche verwandelt, wenn man die Division des Zählers durch den Nenner wirklich ausführt.

Z. B. $\frac{^1/_2}{3} = \frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$; $\frac{4}{^2/_3} = 4 : \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$; $\frac{^1/_2}{^5/_6} = \frac{1}{2} : \frac{5}{6}$ $= \frac{1 \cdot \cancel{6}_3}{\cancel{2} \cdot 5} = \frac{3}{5}$; $\frac{1^2/_3}{5} = 1^2/_3 : 5 = \frac{1}{3}$; $\frac{7^1/_2}{4^2/_3} = 7^1/_2 : 4^2/_3 =$

$$\frac{15}{2} : \frac{14}{3} = \frac{15}{2} \times \frac{3}{14} = \frac{45}{28} = 1^{17}/_{28}.$$

§. 81.

Im gewöhnlichen Verkehrsleben sagt man oft:

anderthalb	für $1\frac{1}{2}$	ein halbes Drittel	für $\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$
drittehalb	„ $2\frac{1}{2}$	„ „ Viertel	„ $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$
viertehalb	„ $3\frac{1}{2}$	„ „ Fünftel	„ $\frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{10}$
rc.		rc.	

Drittes Kapitel.

Von den Decimalbrüchen.

§. 82.

1) Ist der Nenner eines Bruches eine dekadische Ordnungszahl (10, 100, 1000...), so kann das Niederschreiben desselben offenbar erspart werden, wenn man auf irgend eine Weise andeutet, wieviel Nullen er besitzt. Dies geschieht häufig nach folgender Regel:

Man schneide im Zähler, von rechts nach links zählend, durch ein Komma so viel Ziffern ab, als der Nenner Nullen hat.

Z. B. Für $\frac{3682}{10}$ schreibt man kürzer: 368,2

„ $\frac{26983}{10000}$ „ „ „ 2,6983.

Umgekehrt ist:

64,93 nur eine kürzere Schreibweise für $\frac{6493}{100}$.

Besitzt dabei der Zähler nur ebensoviel oder weniger Stellen als der Nenner Nullen hat, so werden ihm soviel Nullen vorgesetzt, daß nach Anwendung obiger Regel links des Kommas noch eine Null steht.

Z. B. Für $\frac{3}{10}$ schreibt man kürzer: 0,3

„ $\frac{23}{10000}$ „ „ „ 0,0023.

Umgekehrt ist: 0,0632 nur eine kürzere Schreibweise für $\frac{632}{10000}$.

2) Brüche, welche auf diese abgekürzte Art geschrieben sind, werden Decimalbrüche, die Komma, aus deren Stelle der Werth des Nenners erkannt wird, Decimalstriche, und die Ziffern, welche rechts des Kommas stehen, Decimalziffern oder Decimalen genannt.

Zum Unterschiede von den Decimalbrüchen heißen die im vorigen Kapitel behandelten Brüche gewöhnliche oder gemeine Brüche.

§. 83.

Das oben angegebene Verfahren, den Nenner der Decimalbrüche nicht wirklich hinzuschreiben, sondern nur im Zähler anzudeuten, ist sehr glücklich gewählt; denn es werden dadurch außer der Zeitersparniß beim Schreiben, gleichzeitig noch andere wesentliche Vortheile erreicht:

1) Jeder unechte Decimalbruch wird durch das Komma sogleich in eine gemischte Zahl zerlegt. Links vom Decimalstrich steht die ganze Zahl, rechts der Zähler des echten Bruches; sein Nenner ist der Nenner des Decimalbruches.

Denn es ist z. B.

$$3,6 = 3\frac{6}{10}; \text{ weil } 3,6 = \frac{36}{10} = \frac{30+6}{10} = \frac{30}{10} + \frac{6}{10} = 3\frac{6}{10}.$$

$$17,82 = 17\frac{82}{100}; \text{ weil } 17,82 = \frac{1782}{100} = \frac{1700+82}{100} = \frac{1700}{100} + \frac{82}{100} = 17\frac{82}{100}.$$

2) Löst man den Zähler eines beliebigen Decimalbruches, z. B. 6,3856, nachdem man die Ganzen abgetrennt hat, in seine dekadischen Bestandtheile auf und dividirt dann jeden Summanden des Zählers durch den Nenner, so erhält man:

$$6,3856 = 6\frac{3856}{10000} = 6 + \frac{3000+800+50+6}{10000}$$
$$= 6 + \frac{3000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{6}{10000}.$$
$$= 6 + \frac{3}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{6}{10000}.$$

Die Decimalziffern sind also nach demselben Gesetz geordnet, wie die Ziffern einer dekadischen Zahl. Jede Ziffer hat einen 10mal kleineren Werth als sie haben würde, wenn sie um eine Stelle weiter links und einen 10mal größeren Werth als sie haben würde, wenn sie um eine Stelle weiter rechts stände.

Durch Einführung der Decimalbrüche ist also das dekadische Zahlensystem auch über die Einer nach rechts hin ohne Ende fortgeführt; der Decimalstrich zeigt nur an, wo die Ordnung der Einer steht.

3) Aus dem Vorhergehenden ergeben sich die drei gebräuchlichen Lesarten für Decimalbrüche. Man liest z. B.: 65,6234 entweder $\frac{656234}{10000}$, oder $65\frac{6234}{10000}$ oder $65 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000}$, mitunter auch abgekürzt: 65 Komma, 6,2,3,4.

§. 84.

Liest man die Decimalbrüche nach der dritten Lesart, so erkennt man ohne Weiteres:

1) Der Werth eines Decimalbruches wird nicht geändert, wenn man auf seiner rechten Seite beliebig viele Nullen anhängt oder wegläßt. Z. B. 78,3 = 78,3000; 2,600 = 2,6.

2) Jede ganze Zahl kann als ein Decimalbruch angesehen werden, dessen Decimalstellen Nullen sind. Z. B. 25 = 25,000.

3) Um Decimalbrüche gleichnamig zu machen, hat man nur allen, durch Anhängen von Nullen, soviel Decimalstellen zu geben, als der besitzt, welcher die mehrsten hat. Z. B. 0,3, 23,456 und 7,43 heißen gleichnamig gemacht: 0,300, 23,456, 7,430.

§. 85.

1) Rückt man in einem Decimalbruch das Komma um 1, 2, 3, 4... Stellen nach rechts, so erhält (nach §. 83. 2) jede Ziffer, also auch der ganze Decimalbruch, beziehungsweise den

10, 100, 1000, 10000...fachen Werth;

daher die Regel:

Ein Decimalbruch wird mit einer dekadischen Ordnungszahl (10, 100, 1000 u. s. w.) multiplicirt, wenn man seinen Decimalstrich um soviel Stellen nach rechts rückt, als die dekadische Ordnungszahl Nullen hat.

Z. B. 4,268 × 100 = 426,8; 0,0362 × 10000 = 362.

Besitzt hierzu der Decimalbruch nicht genug Decimalstellen, so werden ihm rechts nach Bedürfniß Nullen angehängt.

Z. B. 1,9 × 1000 = 1900; 0,5 × 100 = 50.

2) Rückt man in einem Decimalbruch das Komma um 1, 2, 3... Stellen nach links, so erhält (nach §. 83. 2) jede Ziffer, also auch der ganze Decimalbruch, beziehungsweise einen

10, 100, 1000...mal kleineren Werth;

daher die Regel:

Ein Decimalbruch wird durch eine dekadische Ordnungszahl (10, 100, 1000 u. s. w.) dividirt, wenn man den Decimalstrich um soviel Stellen weiter nach links rückt, als die dekadische Ordnungszahl Nullen hat.

Z. B. 6713,4 : 100 = 67,134; 13,6 : 10 = 1,36.

Nöthigenfalls werden hierbei dem Decimalbruch links Nullen vorgeschrieben.

Z. B. 6,57 : 10 = 0,657; 0,03 : 1000 = 0,00003.

§. 86.

Decimalbrüche sind nur eine besondere Art der gewöhnlichen Brüche, daher wird man mit ihnen auch nach denselben Regeln rechnen können, welche für die gewöhnlichen Brüche gelten. Bei Anwendung dieser Regeln auf Decimalbrüche findet man jedoch bald zweckmäßige Abkürzungen. Andere Erleichterungen gehen unmittelbar aus dem Umstande hervor, daß jeder Decimalbruch ein nach dem dekadischen Zahlensystem geordneter Zahlwerth ist. Letzteres ist z. B. der Fall bei dem

Addiren und Subtrahiren der Decimalbrüche. Hierbei kann man ohne Weiteres wie bei ganzen Zahlen die gleichnamigen Ordnungen (Einer und Einer, Zehntel und Zehntel u. s. w.) addiren oder subtrahiren und dann im Resultat zwischen die Einer und Zehntel ein Komma setzen.

Am einfachsten geschieht dies nach folgenden Regeln:

1) Sollen Decimalbrüche addirt werden, so schreibe man sie so untereinander, daß die Decimalstriche untereinander stehen, addire hierauf, bei der niedrigsten Ordnung anfangend, wie bei ganzen Zahlen und setze

in der Summe einen Decimalstrich unter die Decimalstriche der Summanden.

Z. B. 32,36
1,428
0,8
16,53
2 1
51,118

Erläuterung: Nichts zu 8 Tausendteln = 8 Tausendtel; 3 Hundertel + 2 Hundertel + 6 Hundertel = 11 Hundertel = 1 Zehntel und 1 Hundertel; 1 Zehntel + 5 + 8 + 4 + 3 Zehntel = 21 Zehntel = 2 Einer + 1 Zehntel; 2 Einer + 6 + 1 + 2 Einer = 11 Einer = 1 Zehner + 1 Einer u. s. w.

2) Sollen Decimalbrüche subtrahirt werden, so schreibe man den Subtrahendus so unter den Minuendus, daß die beiden Decimalstriche untereinander stehen, subtrahire dann wie bei ganzen Zahlen und setze in der Differenz einen Decimalstrich unter die Decimalstriche des Minuendus und Subtrahendus.

Z. B. 78,4275
14,613
63,8145

Erläuterung: Nichts von 5 Zehntausendteln bleiben 5 Zehntausendtel; 3 Tausendtel von 7 Tausendteln bleiben 4 Tausendtel; 1 Hundertel von 2 Hunderteln bleibt 1 Hundertel; 6 Zehntel von 4 Zehnteln geht nicht, man nimmt daher von den 8 Einern des Minuendus 1 Einer = 10 Zehntel zu den 4 Zehnteln hinzu; 6 Zehntel von 14 Zehnteln bleiben 8 Zehntel. Nun setzt man ein Komma und rechnet weiter: 4 Einer von 7 Einern bleiben 3 Einer; 1 Zehner von 7 Zehnern bleiben 6 Zehner.

Enthält der Subtrahendus mehr Decimalziffern als der Minuendus, so gebe man letzterem durch Anhängen von Nullen soviel Decimalstellen als der Subtrahendus besitzt. (Der geübte Rechner denkt sich jedoch die nöthigen Nullen nur angehängt.)

Z. B. Soll 28,4 — 3,0426 berechnet werden, so erhält man:

28,4000	oder wenn man sich die	28,4
3,0426	Nullen nur angehängt	3,0426
25,3574	denkt:	25,3574

§. 87.

Multipliciren mit Decimalbrüchen. Brüche, also auch Decimalbrüche, werden multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt. Das Product der Zähler ergiebt sich, wenn man die Decimalbrüche, ohne auf die Kommata Rücksicht zu nehmen, multiplicirt und das Product der Nenner ist offenbar eine 1 mit soviel Nullen zur rechten Hand, als beide Nenner zusammen Nullen, oder (was dasselbe sagt) als beide Decimalbrüche zusammen Decimalstellen haben.

Daher die Regel:

Man denke sich die Decimalstriche (und auch die etwa links stehenden Nullen) fort, multiplicire die dadurch entstehenden ganzen Zahlen und gebe dem Product soviel Decimalstellen, als die Factoren zusammen Decimalstellen haben.

```
Z. B.   62,384            0,0329
         4,26             0,00045
      ---------          ----------
       3 743 04               1645
      12 476 8                1316
     249 536             -----------
     ----------          0,000014805
     265,75584
```

Ist einer der Factoren eine ganze Zahl, so wird er als ein Decimalbruch betrachtet, welcher 0 Decimalstellen hat.

```
Z. B.   0,0253           36 45
            62            0,35
        ------          -------
           506           182 25
         1 518          1093 5
        ------          -------
         1,5686         1275,75
```

§. 88.

Für das *Dividiren mit Decimalbrüchen* giebt es verschiedene Regeln; am bequemsten führt folgende zum Ziele:

a. *Ist der Divisor eine ganze Zahl, so dividire man wie bei ganzen Zahlen, zunächst bis zum Decimalstrich des Dividendus, setze sodann im Quotienten ein Komma hinter die bis dahin erhaltenen Ziffern und führe nun die Division weiter fort.*

```
Z. B. 18|104,364|5,798
        | 90
         ----
          14 3
          12 6
          ----
           1 76
           1 62
           ----
             144
             144
             ---
               0
```

Erläuterung: Von der Richtigkeit dieser Regel überzeugt man sich sogleich, wenn man beim Dividiren auf den Stellenwerth der einzelnen Ziffern achtet, also in Gedanken spricht: 18 in 104 Ganze giebt 5 Ganze und 14 Einer bleiben Rest = 140 Zehntel; hierzu 3 Zehntel heruntergezogen, giebt 143 Zehntel. 18 in 143 Zehntel giebt 7 Zehntel und 17 Zehntel bleiben Rest. 17 Zehntel = 170 Hundertel, hierzu 6 Hundertel heruntergezogen, giebt 176 Hundertel. 18 in 176 Hundertel giebt 9 Hundertel und 14 Hundertel bleiben übrig. Zu 14 Hundertel 4 Tausendtel heruntergezogen giebt 144 Tausendtel. 18 in 144 Tausendtel giebt 9 Tausendtel und 0 bleibt Rest.

Ist hierbei der Divisor größer als der Dividendus, so wird im Quotienten die Stelle der ersten geltenden Decimalziffer am einfachsten dadurch bestimmt, daß man dennoch zuerst in die Ganzen, dann in jede folgende Ordnung dividirt und im Quotienten so lange Nullen setzt, bis die Division eine geltende Ziffer liefert.

```
Z. B. 17|0,09571|0,00563
        |   85
          -----
           107
           102
           ---
             51
             51
             --
              0
```

Erläuterung: 17 in 0 Ganze giebt 0 Ganze. 17 in 0 Zehntel giebt 0 Zehntel; 17 in 9 Hundertel giebt 0 Hundertel: 17 in 95 Tausendtel giebt 5 Tausendtel u. s. w.

b. Ist der Divisor ein Decimalbruch, so multiplicirt man Divisor und Dividendus mit dem Nenner des Divisors. Dies geschieht nach §. 85 indem man im Divisor das Komma durchstreicht und es im Dividendus um soviel Stellen weiter nach rechts rückt, als der Divisor Decimalstellen hat. Dadurch wird der Divisor eine ganze Zahl und man kann nun wie vorher (unter a) verfahren.

Beispiele: $9{,}62 : 2{,}6 = 96{,}2 : 26 = 3{,}7$
$0{,}000085 : 0{,}017 = 0{,}085 : 17 = 0{,}005$
$8 : 0{,}02 = 800 : 2 = 400.$

Der Grund dieses Verfahrens liegt in dem Gesetze, daß ein Bruch und daher auch ein Quotient seinem Werthe nach unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner oder Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt.

c. Bleibt am Schlusse der Division ein Rest, so denke man sich an den Dividendus Nullen angehängt, ziehe diese nach und nach zu dem Rest herunter und setze die Division fort. Nicht selten geht sie dann noch auf.

Z. B. $0{,}482 : 2{,}5 = 0{,}1928$; $3{,}4 : 32 = 0{,}10625$.

Ausrechnungen.

```
2,5|0,4,8 2|0,1928        32|3,4|0,10625
   | 2 5   |                |3 2|
   ---------              --------
    2 3·2                   20·0
    2 2 5                   19 2
   ------                  ------
       70                     8·0
       50                     6 4
     ----                   -----
      200                     1 60
      200                     1 60
     ----                   ------
        0                        0
```

d. Oft giebt aber die fortgesetzte Division immer neue Reste ohne Ende fort. In diesem Falle läßt sich der Quotient nicht genau als Decimalbruch ausdrücken. Man muß dann entweder auf den Vortheil, welchen das Rechnen mit Decimalbrüchen gewährt, verzichten, die Decimalbrüche als gewöhnliche Brüche schreiben und behandeln, oder man ist genöthigt, sich mit einem Näherungswerthe, d. h. mit einer bestimmten Anzahl Decimalziffern zu begnügen und die folgenden (welche ohne Ende fortgehen) unberücksichtigt lassen. Je mehr Decimalziffern man in diesem Falle berechnet, desto mehr wird sich das Resultat dem genauen Quotienten nähern.

Z. B. $6{,}245 : 0{,}32 = 19{,}515\ldots$; $0{,}2 : 3{,}643 = 0{,}0548\ldots$

Ausrechnungen.

```
0,32|6,24,5|19,5156...          3,643|0,2·0·0·,0·0|0,0548998...
    |32                               | 18215
     30·4                               17 8·5·0
     28 8                               14 572
      165                                3·278·0
      160                                29144
        5·0                               36·3·6·0
        32                                32787
        180                                35·7·3·0
        160                                32787
         200                                294·3·0
         192                                29144
           8                                  286
```

§. 89.

1) Decimalbrüche mit unendlich vielen Decimalstellen nennt man unvollständige oder *irrationale Decimalbrüche* und im Gegensatze hierzu die andern vollständige oder *rationale*. Um anzudeuten, daß ein Decimalbruch irrational ist, pflegt man, wie in obigen Beispielen geschehen ist, in Stelle der fehlenden Decimalziffern einige Punkte zu setzen.

2) Rechnet man mit unvollständigen Decimalbrüchen, oder kürzt man vollständige Decimalbrüche ab, indem man einige der am weitesten rechts stehenden Decimalziffern fortläßt, so ist es durchaus nothwendig, in jedem Falle die Größe des begangenen Fehlers zu bestimmen. Hierzu giebt der folgende Lehrsatz Anleitung.

§. 90.

1) *In jedem Decimalbruch drückt eine Einheit irgend einer Stelle einen größeren Werth aus, als die Ziffern aller folgenden Stellen zusammengenommen.*

Beweis: Es ist $1 > 0{,}9999\ldots$ Dividirt man nun auf beiden Seiten mit den dekadischen Ordnungszahlen 10, 100, 1000 u. s. w., so erhält man: $0{,}1 > 0{,}09999\ldots$; $0{,}01 > 0{,}00999\ldots$; $0{,}001 > 0{,}000999\ldots$ u. s. w. — Stehen an Stelle der Neunen andere Ziffern, so gilt das Behauptete natürlich um so mehr.

2) Schreibt man also z. B. statt 3,76823.... nur 3,768... so ist dieser Werth zu klein, aber der begangene Fehler beträgt noch nicht $^1/_{1000}$.

Ein solcher Fehler wird, wie man ohne Weiteres einsieht, noch um die Hälfte vermindert, wenn man folgende Regel anwendet:

Ist die erste der weggelassenen Decimalziffern 5 oder größer als 5, so vergrößere man die letzte beibehaltene Ziffer um eine Einheit. Setzt man z. B. statt 6,42675. .

6,4, so ist dieser Bruch zu klein, aber noch nicht um die Hälfte von $^1/_{10}$; setzt man
6,43, so ist dieser Bruch zu groß, aber noch nicht um die Hälfte von $^1/_{100}$; setzt man
6,4268, so ist dieser Bruch zu groß, aber noch nicht um die Hälfte von $^1/_{10000}$.

§. 91.

Verwandelung der gewöhnlichen Brüche in Decimalbrüche.

1) Soll ein gewöhnlicher Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werden, so betrachte man den Zähler als einen Decimalbruch, dessen Decimalziffern Nullen sind und dividire ihn dann durch den Nenner.

Z. B. $\frac{7}{8} = 0{,}875$; $\frac{112}{125} = 0{,}896$.

Ausrechnungen.

```
8|7·,00|0,875          125|112,0 0. . |0,896
 |6 4  |                  |100 0      |
 ------                   ---------
   6·0                      12·0·0
   5 6                      11 2 5
 ------                   ---------
    40                         7 50
    40                         7 50
 ------                   ---------
     0                            0
```

2) Enthält der Nenner keine anderen Primfactoren als 2 und 5, so läßt sich der gewöhnliche Bruch genau als Decimalbruch wiedergeben. Anderenfalls erhält man als Resultat einen unvollständigen (irrationalen) Decimalbruch, in welchem eine Anzahl Decimalziffern in derselben Ordnung immer wiederkehrt.

Z. B. $\frac{5}{6} = 0{,}8\overline{3}33\ldots$; $\frac{13}{37} = 0{,}\overline{351}351\ldots$

Ausrechnungen.

```
6|5·,00. . .|0,8333. . . .; 37|13·,0 0. . .|0,351351. . .
 |4 8       |                 |11 1        |
 ----                          --------
   2·0                          1 9·0
   1 8                          1 8 5
   ----                          ------
    2·0                            5·0
    1 8                            3 7
    ----                          ------
     2·0                          1 3·0
     1 8                          1 1 1
     ----                          ------
      2                             1 9·0
                                    1 8 5
                                    ------
                                       5·0
                                       3 7
                                    ------
                                      1 3.
```

Eine solche Partie von Decimalziffern, welche in einem Decimalbruch beständig wiederkehrt, heißt eine Periode. Die erste Periode wird häufig (wie dies auch in obigen Beispielen geschehen ist) durch einen darüber gesetzten Strich hervorgehoben. Beginnt mit der ersten Decimalziffer auch die erste Periode, so heißt der Decimalbruch vollständig oder rein periodisch, z. B. $0,\overline{35}35\ldots$, gehen aber der ersten Periode noch eine oder mehrere Decimalziffern voran, so wird er unvollständig oder unrein periodisch genannt, z. B. $3,753\overline{26}26\ldots$

Anmerkung. Ein periodischer Decimalbruch entsteht bei jeder Division, sobald der Quotient die Form des Decimalbruches erhält, die Division nicht aufgeht und weit genug fortgesetzt wird. Der Grund hiervon liegt nahe: Erscheint ein Divisionsrest, der schon als Rest da war nachdem zum weiteren Dividiren stets Nullen an den Rest gehängt wurden, so wiederholt sich die Division von da ab vollkommen, muß also auch dieselben Ziffern in den Quotienten liefern. Dieser Fall muß aber stets eintreten, weil nur die Zahlen Reste werden können, welche kleiner als der Divisor sind. Ist der Divisor die Zahl n, so sind nur n — 1 verschiedene Reste möglich. Sind nun im ungünstigsten Falle alle diese n — 1 möglichen Zahlen als Reste erschienen, so muß der nächste Rest schon einmal dagewesen sein und die zweite Periode beginnen Hieraus folgt zugleich, daß eine Periode höchstens soviel Ziffern bekommen kann, als der Divisor Einheiten hat weniger 1.

§. 92.

Verwandelung der Decimalbrüche in gewöhnliche.

Hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Der Decimalbruch ist ein vollständiger, z. B. 3,625. Dann schreibe man ihn in der Form eines gewöhnlichen Bruches und hebe letzteren soviel als möglich: $3,625 = 3^{625}/_{1000} = 3^{5}/_{8}$.

2) Der Decimalbruch ist ein unvollständiger und zwar

a. ein vollständig periodischer, z. B. $6,\overline{261}261\ldots$ Zerlegt man $6,\overline{261}261\ldots$ in $6 + 0,\overline{261}261\ldots$ und bezeichnet den Werth von $0,\overline{261}261\ldots$ mit x, so ist:

$$1)\quad x = 0,\overline{261}261\ldots$$

Multiplicirt man beide Werthe mit dem Nenner der ersten Periode, so muß man wieder gleiche Werthe erhalten, nämlich

$$2)\quad 1000\,x = 261,\overline{261}261\ldots$$

und wenn man die obere Gleichung von der unteren subtrahirt, ergiebt sich:

$$3)\quad 999\,x = 261, \text{ folglich}$$

$$4)\quad x = \frac{261}{999} = \frac{29}{111}.$$

Es ist also: $6,\overline{261}261 = 6\frac{29}{111}$.

Auf diese Weise kann in jedem Falle geschlossen werden, unabhängig von den zufälligen Zahlen des vorstehenden Beispiels. Man erhält stets ein Resultat, welches auf folgende praktische Regel führt:

Um einen echten, vollständig periodischen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, nehme man eine Periode (als ganze Zahl betrachtet) zum Zähler und zum Nenner soviel Neunen als die Periode Ziffern hat. Z. B.

$$0,\overline{2}22.. = \frac{2}{9};\ 2,\overline{75}75 = 2\frac{75}{99} = 2\frac{25}{33};\ 0,\overline{612}612 = \frac{612}{999} = \frac{68}{111}$$

b. ein unvollständig periodischer, z. B. $7,25\overline{136}136\ldots$
Zerlegt man $7,25\overline{136}136\ldots$ in $7 + 0,25\overline{136}136\ldots$ und bezeichnet den Werth von $0,25\overline{136}136\ldots$ mit x, so ist:

$$1)\quad x = 0,25\overline{136}136\ldots$$

also, wenn man mit dem Nenner der Decimalziffern bis zum Ende der ersten Periode (100000) multiplicirt,

$$2)\quad 100000\,x = 25136,\overline{136}136\ldots$$

und wenn man Gleichung 1 auch mit dem Nenner der Decimalziffern, welche der ersten Periode vorangehen, multiplicirt:

$$3)\quad 100\,x = 25,136136\ldots$$

folglich, wenn Gleichung 3 von Gleichung 2 subtrahirt wird,

$$4)\quad 99900\,x = 25136 - 25$$

$$x = \frac{25136 - 25}{99900} = \frac{25111}{99900}$$

Es ist also: $7,25\overline{136}136 = 7\frac{25111}{99900}$.

Auch diese Schlüsse sind, wie man leicht übersieht, unabhängig von den zufälligen Zahlen des obigen Beispiels und führen für die Verwandelung eines echten, unvollständig periodischen Decimalbruches auf folgende praktische Regel:

Man betrachte die Decimalziffern bis zum Ende der ersten Periode und auch die Decimalziffern, welche der ersten Periode vorangehen, als die Ziffern einer ganzen Zahl, ziehe letztere Zahl von ersterer ab und nehme den Rest zum Zähler. Unter diesen setze man als Nenner soviel Neunen, als die Periode Ziffern hat und rechts daneben soviel Nullen, als der ersten Periode Decimalziffern vorangehen. Z. B.

$$0,2\overline{3}33\ldots = \frac{23-2}{90} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30};\ 3,6\overline{25}25 = 3\frac{625-6}{990} = 3\frac{619}{990}$$

c. ein unvollständiger nicht periodischer. In diesem Falle kann kein gewöhnlicher Bruch gefunden werden, welcher dem gegebenen Decimalbruche vollkommen gleich ist. Ist dessen ungeachtet die Verwandelung wünschenswerth, so muß man sich mit einem Näherungswerthe begnügen, welchen man erhält, indem man den Decimalbruch wie einen vollständigen behandelt; z. B.

$$2,3645\ldots \text{ annähernd } = 2\frac{3645}{10000} = 2\frac{729}{2000}.$$

Anhang.

Das Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen.

§. 93.

Das Rechnen mit Decimalbrüchen ist in vielen Fällen sehr bequem; es kann jedoch auch zu bedeutenden Ungenauigkeiten Veranlassung geben, wenn man beim Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen nicht die nothwendige Vorsicht anwendet. Schreibt man z. B. statt 2,36435 nur 2,36, so beträgt der Fehler noch nicht $^1/_2$ Hundertel und es können gewiß in vielen Fällen die folgenden Decimalstellen unberücksichtigt bleiben; wird dieser Bruch aber hinterher noch multiplicirt, z. B. mit 1000, so wird auch der Fehler mit vervielfältigt und beinahe $^1/_2$ Hundertel mal $1000 = {}^1/_{200} \times 1000 = 5$ Ganze betragen. Aus diesem Grunde ist beim Rechnen mit unvollständigen Decimalbrüchen zweierlei unerläßlich:

a. Man stelle im Voraus fest, wie viel sichere Decimalstellen das Endresultat haben muß. Dies hängt besonders von dem Werthe der Einheit ab, auf welche sich das Resultat bezieht. Handelt es sich z. B. um Mark, so wird man im Allgemeinen mehr Decimalstellen nöthig haben, als wenn es sich um Pfennige handelt.

b. Man behalte im Laufe der Rechnung stets im Auge, welchen Einfluß die durch das Abkürzen von Decimalbrüchen unvermeidlich entstehenden Fehler auf das Endresultat haben werden. Hierzu möge folgende Betrachtung dienen:

1) Addition. Haben die zu addirenden unvollständigen Decimalbrüche nicht gleich viel Decimalstellen, so können von jedem nur so viel benutzt werden als der besitzt, welcher die wenigsten hat. Dann sind im ungünstigsten Falle alle Brüche zu groß oder alle zu klein; bei jedem beträgt der Fehler aber weniger als die halbe Einheit der letzten Decimalstelle, also muß die erhaltene Summe auch weniger von ihrem genauen Werthe abweichen, als die halbe Einheit der letzten Decimalstelle multiplicirt mit der Anzahl der Summanden beträgt. Sind z. B. 6 unvollständige Decimalbrüche, von denen jeder bis auf Tausendtel angegeben ist, zu addiren, so ist die Summe noch nicht um $\frac{1}{2000} \times 6 = \frac{3}{1000}$ zu groß oder zu klein.

2) Subtraction. Werden auch hier eine gleiche Anzahl Decimalstellen vorausgesetzt, so ist im ungünstigsten Falle der Minuendus zu groß und der Subtrahendus zu klein oder umgekehrt. Der Fehler beträgt bei jedem der beiden Decimalbrüche weniger als die halbe Einheit der letzten Decimalziffer: folglich muß in der Differenz der Fehler geringer sein als eine volle Einheit der letzten Decimalziffer. Sind z. B. Minuendus und Subtrahendus bis auf Milliontel angegeben, so ist die Differenz um weniger als 1 Milliontel zu groß oder zu klein.

3) Multiplication. Es seien a und b zwei beliebige unvollständige Decimalbrüche, x und y ihre Ergänzungen (Fehler), also $a + x$ und $b + y$ die genauen Werthe, so ist: $(a + x) \times (b + y) = ab + ay + bx + xy$ der genaue Werth des Productes. Das Product ab der abgekürzten Decimalbrüche ist also um $ay + bx + xy$ zu groß oder zu klein. Hierbei ist das letzte Glied xy im Verhältniß zu den beiden anderen sehr klein, so daß es ausreicht, den Fehler $= ay + bx$ zu setzen. x und y sind kleiner als die halbe Einheit der letzten Decimalziffer von a und b; bringt man daher diese letztere statt x und y in Rechnung, so erhält man einen Zahlenwerth, welcher immer noch um etwas größer ist als der Fehler und nach welchem man den letzteren beurtheilen kann. Z. B. sind 6,37... und 0,05... unvollständige Decimalbrüche, so ist das Product $6{,}37\ldots \times 0{,}05\ldots = 0{,}3185\ldots$ um weniger als $\frac{0{,}01}{2} \times 0{,}05 + \frac{0{,}01}{2} \times 6{,}37$ d. i. um weniger als 0,0321 von dem genauen Producte verschieden.

4) Division. Haben a, b, x und y die oben angegebene Bedeutung, so ist

$$(a + x) : (b + y) = \frac{a}{b} + \frac{bx - ay}{b\,(b + y)},$$ denn:

$$\begin{array}{r|l|l} b+y & a+x & \frac{a}{b} \\ & a+\frac{ay}{b} & \\ \hline & x-\frac{ay}{b}. & \end{array}$$

Für den Rest $x - \frac{ay}{b}$ kann man schreiben: $\frac{bx - ay}{b}$. Der Fehler beträgt hier also: $\frac{bx - ay}{b(b+y)}$, wobei jedoch angenommen ist, daß a und b beide zu klein, also nicht in der letzten Decimalziffer vermehrt sind. Läßt man im Nenner y fort, wodurch der Quotient nicht erheblich geändert wird, so kann der Fehler $= \frac{bx - ay}{b^2}$ gesetzt werden.

§. 94.

1) **Abgekürzte Multiplication.** Sind zwei unvollständige Decimalbrüche zu multipliciren, z. B. 7,6324.. und 0,5631.. und man ordnet die Multiplication wie folgt an (§. 38. a. 4),

```
 7,6324 ..
 0,5631 ..
----------------
38 1620|....
 4 5794|4...
   2289|72..
     76|324
----------------
4,29780|444
```

so ist klar, daß die rechts des Verticalstrichs stehenden Decimalziffern unbrauchbar sind; denn in Stelle der Punkte würden noch geltende Ziffern stehen, wenn in den Decimalbrüchen noch mehr Decimalziffern angegeben wären.

Häufig richtet man die Rechnung daher so ein, daß diese unbrauchbaren Decimalziffern gleich fortfallen. Dies Verfahren heißt die **abgekürzte Multiplication.**

```
z. B.  7,6324..   (324 durchstrichen)
        0,5631..
----------------
       38,1620
        4 5794
          2290
            76
----------------
       4,29780
```

Erläuterung: 1) Multiplicire mit der höchststelligen Ziffer 5 des Multiplicators den ganzen Multiplicandus. 2) Streiche die letzte Ziffer 4 des Multiplicandus durch und multiplicire mit der nächsten Ziffer 6 des Multiplicators den Multiplicandus (mit Einschluß der durchstrichenen Ziffer), lasse aber beim Niederschreiben des Partialproductes die Ziffer (4), welche rechts hinausgerückt werden müßte, fort. — 3) Streiche die nächste Ziffer 2 des Multiplicandus durch, multiplicire mit der nächsten Ziffer 3 des Multiplicators die zuletzt durchstrichene Ziffer 2 und die nicht durchstrichenen Ziffern (also 7632) und lasse wieder beim Niederschreiben des Partialproductes die letzte (rechts hinaus zu rückende) Ziffer 6 fort. Diese Ziffer ist größer als 5, deshalb ist zur ersten niederzuschreibenden Ziffer 9 eine Einheit hinzugezählt worden. — 4) Streiche die nächste Ziffer 3 des Multiplicandus durch und multiplicire die zuletzt durchstrichene Ziffer 3 und die nicht durchstrichenen Ziffern des Multiplicandus (also 763) mit der nächsten Ziffer 1 des Multiplicators und lasse beim Niederschreiben des Partialproductes die letzte Ziffer 3 fort. 5) Dem erhaltenen Producte giebt man soviel Decimalziffern als beide Factoren zusammen Decimalziffern haben minus soviel, als beim vollständigen Multipliciren Decimalziffern rechts hinaus gerückt worden wären. Letztere Anzahl stimmt mit der Anzahl der im Multiplicandus durchstrichenen Ziffern überein.

```
2,364|54,6·32 |...23,1099..
     |4728
     ----------
       73·52 |...
       1092  |...
     ----------
        260· |0..
        236  |4..
     ----------
         23  |000
         21  |276
     ----------
          2  |3·240
          2  |1276
     ----------
             |1964
```

2) **Abgekürzte Division.** Eine ganz ähnliche Abkürzung kann man auch bei der Division anwenden. Sind 2,364.. und 54,632.. abgekürzte Decimalbrüche und man dividirt wie gewöhnlich, so erkennt man leicht, daß die rechts des Verticalstriches stehenden Ziffern unbrauchbar sind, weil die Punkte in Stelle unbekannter Decimalziffern stehen. Diese unbrauchbaren Ziffern fallen gleich während des Rechnens fort, wenn man

statt im Dividendus eine Null anzuhängen, stets im Divisor die letzte Ziffer durchstreicht. Die zuletzt durchstrichene Ziffer wird jedoch im Kopfe mit multiplicirt um zu erfahren, wie viel Einheiten zur nächsten Ordnung hinzuzuzählen sind.

Z. B. 2,~~364~~|54,632|23,110

47 28
7 352
7 092
260
236
24
23
1

Erläuterung: 1) Dividire 2364 in 54632 wie gewöhnlich, giebt 23 Ganze. — 2) Streiche die letzte Ziffer 4 des Divisors durch und dividire mit 236 in den Rest 260, giebt 1. — 3) Streiche die nächste Ziffer 6 des Divisors durch und dividire in den Rest 24; giebt 1. — 4) Streiche die nächste Ziffer 3 des Divisors durch und dividire mit 2 in den Rest 1, giebt 0.

Vierter Abschnitt.

Die Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen.

§. 95.

1) Die benannten Zahlen entstehen durch das Messen von Größen. Eine Größe messen heißt ermitteln, wie oft eine uns bekannte Größe derselben Art in ihr enthalten ist. Kann man z. B. von einem Haufen Getreide ein Hektoliter 8mal voll füllen, so wird die Menge des vorhandenen Getreides durch das Hektoliter gemessen und durch die benannte Zahl „8 Hektoliter" ausgedrückt. Die Größe, durch welche man mißt, wird Maßeinheit, auch kurzweg Einheit oder Maß genannt, und die Zahl, welche angiebt, wie oft die Einheit in der gemessenen Größe enthalten ist, führt den Namen Maßzahl. In obigem Beispiele ist 8 die Maßzahl und das Hektoliter die Maßeinheit. — Zum Messen gehört im weitern Sinne auch das bloße Zählen der abgesonderten Theile, aus welchen manche Größen, z. B. die Größe „8 Bäume", zusammengesetzt sind. 8 ist auch hier die Maßzahl und 1 Baum ist die Einheit.

Für manche Größen bieten sich uns natürliche Maßeinheiten dar, für andere müssen diese Maßeinheiten durch Uebereinkommen festgestellt werden. So ist die Zeitdauer eines Tages eine natürliche Einheit für das Messen der Zeit; dagegen kann die Einheit für das Messen von Längen 2c. willkürlich groß gewählt werden.

Für jede Größenart würde eine Maßeinheit ausreichen; man hat jedoch, um stets bequeme Maßzahlen erhalten zu können, noch bestimmten Theilen und bestimmten Vielfachen der Grundeinheiten besondere Namen gegeben und benutzt auch diese als Einheiten. Auf diese Weise ist für die mehrsten Größenarten eine Stufenfolge von höheren und niederen Ordnungen, d. h. größeren und kleineren Maßeinheiten entstanden. Das Meter ist z. B. zur Grundeinheit für alle Längenmessungen gewählt worden und man hat daraus durch Bilden von Unter- und Oberabtheilungen nachstehende Stufenfolge abgeleitet:

	Kilometer,	Hektometer,	Dekameter,	Meter,
=	1000	100	10	1 Meter,
	Decimeter,	Centimeter,	Millimeter	
=	0,1	0,01	0,001	Meter.

Wird nun eine Größe als benannte Zahl ausgedrückt, so tritt sie entweder als Vielfaches *einer* Maßeinheit auf, z. B. 5 Meter, oder als Summe höherer und niederer Ordnungen, z. B. 5 Dekameter 7 Meter 4 Centimeter. Im ersteren Falle wird sie eine *einfach benannte Zahl*, im letzteren eine *mehrfach benannte Zahl* genannt. Bei mehrfach benannten Zahlen richtet man es immer so ein, daß jede der niederen Ordnungen weniger Einheiten enthält als zu einer Einheit der nächst höheren Ordnung gehören. Eine solche mehrfach benannte Zahl wollen wir *gut geordnet* nennen. Zwischen je zwei der vorhandenen Ordnungen einer mehrfach benannten Zahl hat man sich ein Additionszeichen zu denken.

2) Die Größe der ersten Längeneinheiten wurde vom menschlichen Körper entnommen: Fuß = Länge des menschlichen Fußes, Zoll = Daumenbreite, Klafter = soviel als man mit ausgebreiteten Armen umspannen (klaftern) kann rc. Diese Maßeinheiten waren die naheliegendsten; man hatte sie stets vor Augen und zur Anwendung bereit. Da jedoch der Fuß rc. bei verschiedenen Menschen verschieden lang ist, so sah man sich bald genöthigt, die Länge eines bestimmten Fußes rc. als bleibende Maßeinheit gesetzlich festzustellen. Diese Festsetzungen waren ein wichtiger Fortschritt, aber leider fand dabei keine weitreichende Einigung statt. Die einzelnen Fürstenthümer, Grafschaften rc., ja selbst einzelne Städte wählten sich ihre eigenen Maßeinheiten. Gewöhnlich entlehnten sie dieselben von dem Fuße rc. eines Fürsten, oder einer sonst hochgestellten Person. So entstanden außerordentlich viele verschiedene Maßeinheiten. Keine derselben hatte Aussicht allgemeine Verbreitung zu finden, keine konnte in der Natur wieder aufgefunden werden, falls das aufbewahrte Urmaß verloren gehen sollte; auch waren im Laufe der Zeit für die verschiedenen Arten der Größen weit mehr Maße in Gebrauch gekommen, als nothwendig und zweckmäßig ist (z. B. Fuß, Elle, Lachter, Faden, Schritt rc. für Längenmessungen) und endlich rechnet es sich nicht bequem mit den gewählten Eintheilungszahlen.

Allen diesen Uebelständen halfen zuerst die Franzosen (1794) durchgreifend ab. Um eine Maßeinheit zu erhalten, welche sich in der Natur immer wieder unverändert auffinden läßt und welche für alle Bewohner der Erde von gleichem Werth ist, ermittelte man die Entfernung des Nordpoles unserer Erde vom Aequator (den Erdmeridianquadranten) über Paris hin gemessen, und bestimmte den zehnmillionsten Theil dieser Länge — unter dem Namen *Meter* — zur Grundeinheit für alle Längenmessungen und gleichzeitig zur Grundlage für das ganze Maß- und Gewichtssystem*).

*) In neuerer Zeit ist jedoch nachgewiesen worden, daß die Länge des Meters nicht genau der 10000000ste Theil des Erdmeridianquadranten, sondern etwas kleiner als dieser ist.

Aus diesem Meter wurden nun alle anderen Maße auf sehr einfache Weise wie folgt abgeleitet (siehe Anhang):

a. Bei der Theilung und Vervielfachung des Meters schloß man sich zunächst auf's Engste an das zehntheilige Zahlensystem an (s. 1. d. §.). Wie bei diesem bilden immer zehn Einheiten einer niederen Ordnung eine Einheit der nächst höheren Ordnung. Dadurch erfuhr das Rechnen mit benannten Zahlen eine sehr bedeutende Erleichterung. Ebenso einfach wurden nun die Namen für diese Unter- und Oberabtheilungen gebildet. Man setzte (hier, wie im ganzen System) Deci (denke an Decimalbruch) vor den Namen der Grundeinheit, um Zehntel, Centi (denke an pro Cent) um Hundertstel, Milli (denke an Mille) um Tausendstel der Grundeinheit, dagegen Deka (denke an dekadisch) um zehn, Hekto um hundert, Kilo um tausend Grundeinheiten auszudrücken. (Um Verwechselungen zu vermeiden, achte man darauf, daß die Bestimmwörter, welche mit i endigen, stets Theile der Grundeinheit bezeichnen.)

Die Wörter Meter, Deka, Hekto, Kilo sind aus der griechischen Sprache entnommen: metron = Maß; deka = zehn; hekaton (zusammengezogen hekto) = hundert; chilioi (zusammengezogen kilo) = tausend. — Deci, Centi, Milli stammen aus dem Lateinischen: decem = zehn, centum = hundert, mille = tausend.

b. Zum Messen der Flächen bestimmte man dann die Quadrate über den Längeneinheiten, also das Quadratmeter, Quadratdekameter u. s. w. zu Maßeinheiten. — In jedes Quadrat, dessen Seite 10 Maßeinheiten enthält, kann man 10 × 10 oder 100 Quadrate einzeichnen, welche die kleinere Maßeinheit zur Seite haben. Hiervon kann man sich leicht durch einen Versuch überzeugen. Aus diesem Grunde ist bei den Flächenmaßen nicht 10, sondern 100 die Eintheilungszahl. Ein Quadratmeter hat 100 Quadratdecimeter &c. Beim Ausmessen von Ländereien führt das Quadratdekameter auch den kürzeren Namen: Das Ar, woraus dann Hektar, Deciar &c. abgeleitet wird.

c. Zum Messen von Körpern wurden ferner die Würfel bestimmt, deren Kanten gleich den Längeneinheiten sind, mithin das Kubikmeter, Kubikdecimeter &c. — Wieviel kleinere Würfel gebraucht man, um daraus einen größeren zusammenzusetzen, dessen Kante 3mal so groß ist, als die Kante des kleineren? Antwort: 3 × 3 × 3 = 27, wie ein Versuch leicht zeigt. Umgekehrt läßt sich jeder Würfel, dessen Kante 3mal so groß ist, als die Kante eines kleineren in 3 × 3 × 3 = 27 und dessen Kante 10mal so groß ist, in 10 × 10 × 10 = 1000 der kleineren Würfel zerschneiden. Dies ist der Grund, warum die Eintheilungszahl bei den Körpermaßen nicht 10, auch nicht 100, sondern 1000 ist. Ein Kubikmeter hat also 1000 Kubikdecimeter &c. — Das Kubikdecimeter heißt auch Liter und bildet mit seinen decimalen Unter- und Oberabtheilungen, Hektoliter &c. die Einheit zum Messen von Flüssigkeiten und Früchten in Hohlmaßen.

d. Unter Gewicht eines Körpers versteht man den Druck, welchen derselbe auf seine Unterlage ausübt. Von diesem Druck kann man mit großer Sicherheit auf die Menge des Stoffes schließen, aus

welchem der Körper besteht. Es ist daher wichtig, diesen Druck messen zu können. Hierzu wurde das Gewicht eines Liters destillirten (gereinigten) Wassers bei + 4 Grad des hunderttheiligen Thermometers als Maßeinheit festgesetzt. Dieses Gewicht heißt **Kilogramm**. Zur Bildung der Namen für die Stufenfolge der höheren und niederen Einheiten dient jedoch das Gramm, d. i. der tausendste Theil des Kilogramms.

Die bedeutenden Vortheile dieses Maßsystems, welche hauptsächlich in seiner einfachen Gliederung und in seinem engen Anschluß an unser Zahlensystem zu suchen sind, machen es mehr als wahrscheinlich, daß mit der Zeit alle cultivirten Völker dasselbe annehmen werden, wie sie das zehntheilige Zahlensystem angenommen haben. Für jetzt ist es, außer in Frankreich, auch in Spanien, Portugal, Italien, Belgien, Holland ꝛc. und durch Gesetz vom 17. August 1868, welches mit dem 1. Januar 1872 in Kraft trat, auch für den Bereich des Norddeutschen Bundes eingeführt. In letzterem sind jedoch, um den Uebergang zu erleichtern, zum Theil deutsche, bekannte Benennungen in das neue System übertragen und außerdem einige nicht ganz in das zehntheilige System hineinpassende Einheiten (Pfund = $^1/_2$ Kilogramm ꝛc.) festgehalten worden. Auch führt das Gesetz nicht alle decimalen Unter- und Oberabtheilungen an. Es ist jedoch zur Erleichterung des Verständnisses sehr anzurathen, sich zunächst das vollständige System klar zu machen und einzuprägen.

3) Um leicht Vergleiche zwischen neuen und alten Maßen und umgekehrt anstellen zu können, präge man folgende Angaben dem Gedächtnisse ein:

Es ist ungefähr (wobei z. g. = etwas zu groß; z. k. = etwas zu klein bedeutet)

Neues Maß. Altes Maß.		Altes Maß. Neues Maß.
1 Meter = 3,2 Fuß (z. g.)	also:	1 Fuß = $^5/_{16}$ Meter (z. k.)
= $1^1/_2$ Elle (fast genau)	„	1 Elle = $^2/_3$ „ (f. genau)
(= der Länge eines mittelgroßen Spazierstockes)		1 geom. Schritt = 0,75 = $^3/_4$ Meter
		1 natürl. Schritt = 0,8 = $^4/_5$ „
1 Centimeter = $^5/_{13}$ Zoll (z. g.) (= der Breite des kleinen Fingers an der Spitze)	„	1 Zoll = $^{13}/_5$ Centimeter (z. k.)
1 Meile = $\frac{230}{231}$ Meile (z. g.)	„	1 Meile = $\frac{231}{230}$ Meile (z. k.)
1 Liter = $^7/_8$ Quart (z. g.)	„	1 Quart = $^8/_7$ Liter (z. k.)
1 Scheffel = $^{10}/_{11}$ Scheffel (z. k.)	„	1 Scheffel = $1^1/_{10}$ Scheffel (z. g.)
1 Kilogramm = 2 Pfund (genau)	„	1 Pfund = 0,5 = $^1/_2$ Kilogr.

Diese Verhältnißzahlen geben bei Verwandelungen des einen Maßes in das andere, wenn es sich nur um einen Ueberschlag handelt, hinreichend genaue Resultate; ist eine größere Genauigkeit erforderlich, so benutze man die im Anhang gegebenen, gesetzlich fest-

gestellten Verwandelungsfactoren. Die Verwandelung selbst besteht offenbar in einer einfachen Multiplication. Z. B. Wieviel Meter sind 18 Fuß altes Maß?

Lösung: a. Ungefähr: 1 Fuß $= {}^{5}/_{16}{}^{m}$, folglich 18 Fuß $= 18 \times {}^{5}/_{16}{}^{m} = 5{}^{5}/_{8}{}^{m}$.

b. Genauer: 1 Fuß $= 0{,}31385^{m}$, also 18 Fuß $= 18 \times 0{,}31385^{m} = 5{,}6493^{m}$.

Anmerkung. Im Anhang befindet sich ein Verzeichniß der merkenswerthesten Münzen, Maße und Gewichte.

§. 96.

Das Rechnen mit benannten Zahlen ist nur eine Anwendung des Rechnens mit unbenannten Zahlen auf Gegenstände der Wirklichkeit. Es ist daher nur zu zeigen, durch welche Schlüsse der Verstand das Rechnen mit benannten Zahlen auf das Rechnen mit unbenannten Zahlen zurückführt und welche Anordnung man der Rechnung gewöhnlich giebt, um möglichst kurz und übersichtlich zu rechnen. Ganz einfach gestaltet sich das Rechnen mit benannten Zahlen des neuen Münz-, Maß- und Gewichtssystems. Zu einem gründlicheren Verständniß ist es jedoch zweckmäßig, zuerst die erforderlichen Schlüsse an benannten Zahlen zu zeigen, deren Eintheilungszahl in höhere und niedere Ordnungen nicht 10, 100, 1000 ꝛc. ist.

Das Auflösen (Resolviren) benannter Zahlen.

§. 97.

Jede benannte Zahl einer höheren Ordnung kann in eine solche niederer Ordnung verwandelt oder aufgelöst werden. Doch muß hierzu bekannt sein, wieviel Einheiten der niederen Ordnung in einer Einheit der höheren Ordnung enthalten sind. Die Zahl, welche dies angiebt, wird Auflösungs- oder Resolutionszahl genannt. Sollen z. B. 6 Tage in Stunden aufgelöst werden, so ist 24 die Auflösungszahl, weil 1 Tag 24 Stunden enthält. Das Auflösen selbst erfolgt dann nach so einfachen und naheliegenden Verstandesschlüssen, daß es überflüssig ist, sich besondere Regeln dafür einzuprägen. Es wird genügen, dies für jeden beim praktischen Rechnen vorkommenden Fall an einem Beispiele zu zeigen.

1. Fall. Die aufzulösende Zahl ist eine einfach benannte und ganze Zahl. Z. B.

1) Wieviel Bogen sind in 4 Buch Schreibpapier enthalten?

Lösung: Jedes Buch enthält 24 Bogen, folglich sind in 4 Buch, oder in 1 Buch + 1 Buch + 1 Buch + 1 Buch offenbar 24 Bogen + 24 Bogen + 24 Bogen + 24 Bogen oder 4 × 24 Bogen = 96 Bogen enthalten.

In der Praxis schließt man kurz:

1 Buch enthält 24 Bogen, also enthalten 4 Buch 4 × 24 Bogen = 96 Bogen.

2) Verwandele 8 Tage in Minuten!

Lösung: Hier kann man zwei Wege einschlagen:

a. Man verwandele zuerst die Tage in Stunden und dann die erhaltenen Stunden in Minuten.

1 Tag hat 24 Stunden, also haben 8 Tage $8 \times 24 = 192$ Stunden.

1 Stunde hat 60 Minuten, also haben 192 Stunden $192 \times 60 = 11520$ Minuten.

b. Man kann aber auch die Tage direct in Minuten verwandeln, wenn man weiß oder vorher ermittelt, wieviel Minuten 1 Tag enthält. Man schließt:

1 Tag hat 24 Stunden, jede Stunde 60 Minuten, also sind in 1 Tag oder 24 Stunden $24 \times 60 = 1440$ Minuten enthalten.

Ferner: 1 Tag hat 1440 Minuten, folglich haben 8 Tage $8 \times 1440 = 11520$ Minuten.

Gewöhnlich ist der erstere Weg vorzuziehen.

2. Fall. Die aufzulösende Zahl ist mehrfach benannt. Z. B.

Drücke 27 Jahr 225 Tage $6^3/_4$ Stunden in Stunden aus!

Lösung: Verwandele zuerst die Jahre in Tage und zähle die vorhandenen Tage hinzu, hierauf verwandele die Zahl der erhaltenen Tage in Stunden und zähle die vorhandenen Stunden hinzu. Der Rechnung giebt man gewöhnlich folgende Form:

27 Jahr 225 Tage $6^3/_4$ Stunden.
365
2555
730
9855
225
10080×24
40320
20160
241920
$6^3/_4$
$241926^3/_4$ Stunden

oder kürzer, indem man das Zuzählen der vorhandenen niederen Ordnungen gleich mit dem Multipliciren verbindet:

27 J. 225 Tg. $6^3/_4$ St.
365
2780
730
10080×24
40326
20160
$241926^3/_4$ Stunden.

Erläuterung. In beiden Lösungen ist 27, nicht 365 als Multiplicator benutzt worden. Bei der 2. Lösung rechnet man: $7 \times 5 = 35$, $35 + 5 = 40$; $7 \times 6 = 42$, $42 + 4 = 46$, $46 + 2 = 48$; $7 \times 3 = 21$, $21 + 4 = 25$, $25 + 2 = 27$ u. s. w.

3. Fall. Die aufzulösende Zahl ist ein Bruch. Z. B.

1) Verwandele $^5/_{12}$ Schock in Stück!

Lösung: Hier kann man wieder auf doppelte Weise schließen:

a. 1 Schock hat 60 Stück, folglich enthält $^1/_{12}$ Schock den 12ten Theil von 60 Stück = 5 Stück und $^5/_{12}$ Schock müssen $5 \times 5 = 25$ Stück enthalten.

b. 1 Schock = 60 Stück, folglich 5 Schock $= 5 \times 60 = 300$ Stück und $^5/_{12}$ Schock = dem 12ten Theil von 300 Stück $= {}^{300}/_{12} = 25$ Stück.

Bei der ersteren Lösungsweise rechnet man mit kleineren Zahlen, deshalb eignet sie sich vorzugsweise fürs Kopfrechnen; sie verdient

besonders dann den Vorzug, wenn man übersieht, daß der Nenner des gegebenen Bruches in der Auflösungszahl aufgeht.

2) Wieviel Tage, Stunden und Minuten sind $^7/_9$ Jahr?

Lösung: Man verwandele zuerst $^7/_9$ Jahr in Tage, dann, falls nicht lauter ganze Tage erscheinen, sondern auch der Bruchtheil eines Tages herauskommt, den letzteren in Stunden und zuletzt den etwa entstehenden Stundenbruch in Minuten. Wie eine solche Rechnung übersichtlich und zusammenhängend geführt wird, zeigt folgende Darstellung:

```
  365 × 7
9|2·555|283 Tage
 |1 8  |
   75
   72
   3·5
   2 7
    8 × 24
9|192|21 Stunden
 |18 |
  1·2
   9
   3 × 60
9|18 0|20 Minuten
 |18  |
    0
```

oder kürzer, indem man mehr im Kopfe rechnet, und vor dem Dividiren stets soviel als möglich hebt:

```
  365 × 7
9|2555|283 Tage
 | 7 3|
       8
   8 × 24
3|64|21 Stunden
  1 × 60 20
   20 Minuten.
```

Erläuterung: 1 Jahr = 365 Tage, also 7 Jahr = 7 × 365 = 2555 Tage und $^7/_9$ Jahr = dem 9ten Theile von 2555 Tagen = $283^8/_9$ Tage. — Der Nenner von $^8/_9$ ist nicht hingeschrieben worden, um gleich im Zusammenhange weiter rechnen zu können. Bei der weiteren Verwandelung von $^8/_9$ Tagen in Stunden, ist bei der rechts stehenden Lösung der Multiplicator 24 und der Divisor 9 durch 3 gehoben u. s. w.

§. 98.

Bei dem neuen Münz-, Maß- und Gewichtssystem gestaltet sich das Auflösen in niedere Maßeinheiten so einfach, daß man schon nach kurzer Uebung lernt, wie man das Resultat ohne Weiteres niederschreiben kann. Die Schlüsse, welche dazu führen, sind aber dennoch dieselben. Z. B.

1) Wieviel Gramm sind 32 Kilo? Antwort: 32000 Gramm. Denn: 1 Kilo = 1000 Gramm, also 32 Kilo = 32 × 1000 = 32000 Gramm.

2) 0,3 Meter sind wieviel Centimeter? Antwort: 30^{cm}. Denn: $1^{m} = 100^{cm}$, also $0{,}3^{m} = 0{,}3 \times 100 = 30^{cm}$.

3) Für das Auflösen mehrfach benannter Zahlen des neuen Münz-, Maß- und Gewichtssystems führt das Rechnen nach den obigen Schlüssen den aufmerksamen Rechner bald zu folgenden praktischen Regeln:

a. Fehlt bei einer mehrfach benannten Zahl, deren beständige Auflösungszahl 10 ist, keine Zwischenordnung, so wird sie auf die niedrigste Benennung gebracht, wenn man die Namen aller höheren Ordnungen ohne weiteres fortläßt; z. B. $4^{Km}\ 7^{Hm}\ 3^{Dm}\ 2^{m}\ 5^{dm} = 47325^{dm}$.

Sollten einzelne Ordnungen fehlen, so setze man an die Stelle jeder derselben eine Null und verfahre wie vorher.

Z. B. statt 8 H^m 7 ^{m} 2 ^{mm} denke man sich 8 ^{Hm} 0 ^{Dm} 7 ^{m} 0 ^{dm} 0 ^{cm} 2 ^{mm} und schreibe dann: 807002 ^{mm}.

b. Fehlt bei einer mehrfach benannten Zahl, deren beständige Auflösungszahl 100 ist, keine Zwischenordnung und enthält jede der niederen Ordnungen zwei Ziffern, so wird diese Zahl auf die niedrigste vorhandene Benennung gebracht, wenn man alle höheren Benennungen fortläßt. Z. B. 3 □ ^{m} 23 □ ^{dm} 78 □ ^{cm} = 32378 □ ^{cm}.

Für jede etwa fehlende Zwischenordnung muß man zwei Nullen einschalten und jeder einziffrigen Ordnung eine Null vorsetzen, dann kann man wie vorher verfahren; z. B. Statt 7 □ ^{Dm} 23 □ ^{dm} 7 □ ^{cm} 8 □ ^{mm} denke man sich 7 □ ^{Dm} 00 □ ^{m} 23 □ ^{dm} 07 □ ^{cm} 08 □ ^{mm} und schreibe dann: 700230708 □ ^{mm}.

c. Fehlt bei einer mehrfach benannten Zahl, deren beständige Auflösungszahl 1000 ist, keine Zwischenordnung und enthält jede der niederen Ordnungen drei Ziffern, so wird diese Zahl auf die niedrigste vorhandene Benennung gebracht, wenn man alle höheren Benennungen wegläßt. Z. B. 53 Kb^{dm} 728 Kb^{cm} 334 Kb^{mm} = 53728334 Kb^{mm}.

Für etwa fehlende Zwischenordnungen muß man drei Nullen einschalten und jede nicht dreiziffrige niedere Ordnung durch vorgesetzte Nullen auf drei Ziffern bringen. Z. B. Statt 2 Kb^m 23 Kb^{cm} 8 Kb^{mm} denke man sich 2 Kb^m 000 Kb^{dm} 023 Kb^{cm} 008 Kb^{mm} und schreibe dann 2000023008 Kb^{mm}. 3 k. 6 gr. = 3 k. 006 gr. = 3006 gr.

§. 99.

Das Zurückführen (Reduciren) niederer Ordnungen auf höhere ist von dem Auflösen höherer Ordnungen in niedere die entgegengesetzte Rechnung. Letzteres führt stets auf eine Multiplication, ersteres wird dagegen immer ein Dividiren erfordern. Warum und wie dasselbe anzuwenden ist, lehren auch hier so einfache und naheliegende Verstandesschlüsse, daß es überflüssig ist, sich bestimmte Regeln dafür einzuprägen. Die Zahl, welche angiebt, wieviel Einheiten der niederen Ordnung zu einer Einheit der höheren gehören, wird Zurückführungs- oder Reductionszahl genannt.

I. 1. Fall. Die zu reducirende Zahl enthält mehr Einheiten, als zu einer Einheit der höheren Ordnung gehören.

1) Wieviel Dutzend sind in 72 Stück enthalten?

Lösung: Zu 1 Dutzend gehören 12 Stück. So oft also 12 Stück von 72 Stück abgezählt oder fortgenommen werden können, so oft erhält man 1 Dutzend. Wie oft dies möglich ist, erfährt man am kürzesten (§. 49), indem man mit 12 in 72 dividirt. 12 ist in 72 6mal enthalten, folglich sind 72 Stück = 6 Dutzend.

In der Praxis schließt man abgekürzt: Zu 1 Dutzend gehören 12 Stück, also sind in 72 Stück so viel Dutzend enthalten, als 12 in 72 enthalten ist. Dies giebt 6 Dutzend.

2) 561 Stunden sind wieviel Tage?

Lösung: Zu 1 Tag gehören 24 Stunden, also sind in 561 Stunden soviel Tage enthalten, als 24 in 561 enthalten ist. Dies ist 23mal der Fall. 23 × 24 Stunden sind aber nur 552 Stunden; es bleiben demnach noch 561 — 552 = 9 Stunden übrig, die keinen vollen Tag mehr geben. Folglich sind 561 Stunden = 23 Tage 9 Stunden. In der Praxis erhält die Rechnung folgende Gestalt:

```
24 | 5·6 1 | 23 Tage
   | 4 8   |
   -------
     8·1
     7 2
   -------
       9 Stunden.
```

3) Enthält das Resultat mehr Einheiten als zu einer Einheit der nächst höheren Ordnung gehören, so wendet man gewöhnlich das vorige Verfahren wiederholt an, bis man zur höchsten Maßordnung aufgestiegen ist.

Z. B. Wieviel Ballen, Ries und Buch sind in 40869 Bogen Schreibpapier enthalten?

Lösung:

```
        2θ     1θ
24 |4·0869|1702|85 | 8 Ballen
  .|2 4'' |16 ¯|8¯ |
    1 68    10   5 Ries
    1 68    10
    -----  -------
      69     2 Buch
      48
    -----
      21 Bogen
```

Erläuterung: Zuerst sind aus den Bogen die Buch herausgezogen, giebt: 1702 Buch 21 Bogen. Dann sind aus den 1702 Buch die Ries herausgezogen, giebt: 85 Ries 2 Buch. Endlich sind die 85 Ries in Ballen verwandelt, giebt 8 Ballen 5 Ries. Also: 40869 Bogen = 8 Ballen 5 Ries 2 Buch 21 Bogen.

2. Fall. Wenn die zu reducirende Zahl weniger Einheiten enthält, als zu einer Einheit der höheren Ordnung gehören,

so läßt sich natürlich keine volle Einheit der höheren Ordnung herausziehen, aber man kann die gegebene Zahl als Bruchtheil der höheren Ordnung ausdrücken und dies ist nicht selten vortheilhaft.

1) Drücke 18 Stunden als Bruchtheil eines Tages aus!

Lösung: 1 Stunde ist $^{1}/_{24}$ Tag, folglich sind 18 Stunden = 18 × $^{1}/_{24}$ Tag = $^{18}/_{24}$ = $^{3}/_{4}$ Tag.

2) Welcher Theil von einem Jahre sind $8^{2}/_{3}$ Monat?

Lösung: 1 Monat = $^{1}/_{12}$ Jahr, folglich $8^{2}/_{3}$ Monat = $8^{2}/_{3} \times {}^{1}/_{12} = {}^{26}/_{3} \times {}^{1}/_{12} = {}^{13}/_{18}$ Jahr.

3) Durch wiederholte Anwendung des vorigen Verfahrens läßt sich auch jede mehrfach benannte Zahl auf eine einfach benannte Zahl der höchsten Benennung zurückführen; z. B.

Reducire 8 Ries 17 Buch $18^{2}/_{3}$ Bogen auf Ballen!

Lösung: Verwandele zuerst $18^{2}/_{3}$ Bogen in Buch: 1 Bogen = $^{1}/_{24}$ Buch, also $18^{2}/_{3}$ Bogen = $18^{2}/_{3} \times {}^{1}/_{24}$ Buch = $^{56}/_{3} \times {}^{1}/_{24} = {}^{7}/_{9}$ Buch. — Nun verwandele $17^{7}/_{9}$ Buch in Ries: 1 Buch = $^{1}/_{20}$ Ries, mithin $17^{7}/_{9}$ Buch = $17^{7}/_{9} \times {}^{1}/_{20}$ =

$^8/_9$ Ries. — Endlich verwandele $8^8/_9$ Ries in Ballen: 1 Ries = $^1/_{10}$ Ballen, folglich $8^8/_9$ Ries = $8^8/_9 \times {}^1/_{10} = {}^8/_9$ Ballen.

II. Ist die Reductionszahl 10, 100 oder 1000, wie beim neuen Münz-, Maß- und Gewichtssystem, so erfolgt die Reduction zwar genau nach denselben Schlüssen wie vorher, ist aber so einfach, daß man selbst bei großen Zahlen im Kopfe rechnen und schon nach kurzer Uebung das Resultat ohne weiteres niederschreiben kann. Man betrachte hierbei auch die ganzen Zahlen als Decimalbrüche, z. B. $56^{m} = 56{,}00\,..^{m}$ und rufe sich §. 85 ins Gedächtniß zurück.

Z. B. 3645 Pfennige = 3645 : 100 Mark = 36,45 Mark = 36 Mark 45 Pfennige.

Besonders vortheilhaft ist es, sich Folgendes recht klar zu machen:

a. Bilden immer 10 Einheiten einer Maßordnung eine Einheit der nächst höheren Ordnung — wie z. B. beim Längenmaße — so gehört beim Zerlegen einer einfach benannten mehrstelligen Zahl in ihre höheren und niederen Ordnungen jede einzelne Ziffer einer besonderen Ordnung an. Die erste Ziffer links des Decimalstrichs behält den gegebenen Namen, dagegen kommen den links stehenden Ziffern der Reihe nach die Namen der höheren und den rechts stehenden Ziffern der Reihe nach die Namen der niederen Ordnungen zu.

Z. B. $307{,}586^{m} = 3^{Hm}\ 7^{m}\ 5^{dm}\ 8^{cm}\ 6^{mm}$
$0{,}039^{Dm} = 3^{dm}\ 9^{cm}$.

Dies folgt unmittelbar aus der Uebereinstimmung des Gesetzes, nach welchem die Namen der Ober- und Unterabtheilungen gebildet werden, mit dem dekadischen Zahlensystem.

b. Bei allen Maßen, deren beständige Reductionszahl 100 ist, — wie bei dem Flächenmaße — gilt dasselbe, wenn man statt der einzelnen Ziffern Ziffernpaare nimmt.

Z. B. $6234{,}20134\,\square^{m} = 62\,\square^{Dm}\ 34\,\square^{m}\ 20\,\square^{dm}\ 13\,\square^{cm}\ 40\,\square^{mm}$.

c. Bei allen Maßen, deren beständige Reductionszahl 1000 ist, — wie beim Körpermaß —, gilt ebenfalls das unter a. Gesagte, nur muß man statt der einzelnen Ziffern immer Abtheilungen von je drei Ziffern nehmen.

Z. B. $34{,}5700349\ Kb^{Dm} = 34\ Kb^{Dm}\ 570\ Kb^{m}\ 34\ Kb^{dm}\ 900\ Kb^{cm}$.

Will man einzelne Benennungen des vollständigen Metersystems überspringen, so daß die Reductionszahlen 10, 100, 1000 2c. unregelmäßig abwechseln, will man z. B. wissen, wieviel Ketten, Meter und Centimeter in $62346{,}8^{cm}$ enthalten sind, so ist es praktisch, sich vorher in der gegebenen Zahl von den Einern nach links fortschreitend die verschiedenen Maßordnungen durch Striche abzutheilen, wobei man 1, 2, 3 2c. Ziffern abschneidet, je nachdem mit 10 oder 100 oder 1000 2c. zu reduciren ist (§. 85. 2). Ist dies geschehen, dann läßt sich das Resultat leicht als mehrfach benannte Zahl niederschreiben. Aus obiger Zahl $62346{,}8^{cm}$ wird hiernach
62|3|46,8 und dann 62 Ketten 3 Meter 46,8 Centimeter.

Ebenso: 2712006,5 □^{m} = 2|7120|06,5 □^{m} = 2 □K^m 7120 □D^m 6,5 □^{m}.
6817 gr. = 6|817 gr. = 6 k. 817 gr.
7003,5 Ar = 70|03,5 = 70 Hektar 3,5 Ar.
7 Liter = 0,07 Hektoliter. — 32 Centim. = 0,32 Meter. — 0,3 Millimeter = 0,03 Centimeter.

§. 100.

Addition benannter Zahlen.

1) Sind die Summanden einfach benannt und gleichnamig, so addire man ihre Maßzahlen (die Summanden ohne Benennung) und gebe der Summe die gemeinschaftliche Benennung. Z. B. 16 Mk. + 8 Mk. + 12 Mk. = 36 Mk. Dies Verfahren folgt unmittelbar aus dem Begriffe des Addirens.

2) Bei mehrfach benannten Zahlen addire man alle gleichnamigen Ordnungen. Sollten hierbei einzelne Summen so groß werden, daß darin Einheiten der nächst höheren Ordnung enthalten sind, so werden diese letzteren (nach §. 99) herausgezogen und zu den gleichnamigen Ordnungen hinzugezählt. Beim Kopfrechnen ist es am bequemsten zu einem der Summanden zuerst die höchste Ordnung des zweiten Summanden zu addiren, dann die nächst niedere und so abwärts bis zur niedrigsten Ordnung hin.

Z. B. Wieviel machen 5 Monate 26 Tage 6 Stunden und 4 Monate 12 Tage und 3 Stunden?

Lösung: 5 Monate 26 Tage 6 Stunden + 4 Monate = 9 Monate 26 Tage 6 Stunden; hierzu 12 Tage, giebt 9 Monate 38 Tage 6 Stunden = 10 Monate 8 Tage 6 Stunden; hierzu 8 Stunden, giebt 10 Monate 8 Tage 14 Stunden. Auf diese Weise läßt sich dann zu der erhaltenen Summe noch ein dritter, dann ein vierter u. s. w. Summand addiren. Gewöhnlich wird dies aber die Grenzen des Kopfrechnens überschreiten und man zum schriftlichen Rechnen genöthigt sein. Wie man hierbei am zweckmäßigsten verfährt, soll an folgendem Beispiel gezeigt werden. Berechne: 37 Ries 15 Buch $18\frac{1}{2}$ Bogen + 24 Ries 11 Bogen + 37 Ries 16 Buch + 19 Buch $3\frac{3}{4}$ Bogen + 8 Ries 14 Buch $4\frac{5}{8}$ Bogen.

Ansatz und Ausrechnung:

			8	
37 Ries	15 Buch	$18\frac{1}{2}$ Bg.	4	4
24 „	— „	11 „	—	—
37 „	16 „	— „	—	—
— „	19 „	$3\frac{3}{4}$ „	2	6
8 „	14 „	$4\frac{5}{8}$ „	1	5
3	1	1		
109 Ries	5 Buch	$13\frac{7}{8}$ Bg.		15:8=1
	20 | 65 | 3	24 | 37 | 1		8
	60	24		7
	5	13		

Erläuterung: 1) Schreibe die Summanden so untereinander, daß die gleichnamigen Maßordnungen und in diesen genau die Einer, die Zehner ꝛc. untereinander stehen. — 2) Nun addire zuerst die Einheiten der niedrigsten Ordnung (giebt hier $37\frac{7}{8}$ Bogen). Die erhaltene Summe wird unter die addirten Zahlen gesetzt, falls sie we-

niger Einheiten enthält als zu einer Einheit der nächst höheren Ordnung gehören. Enthält sie Einheiten der nächst höheren Ordnung (wie hier der Fall ist), so ziehe diese nach §. 99 heraus und schreibe nur den Rest ($13^7/_8$) ins Resultat. — Der minder geübte Rechner merkt sich wohl auch die herausgezogenen Einheiten der höheren Ordnung in kleiner Schrift an. — 3) Hierauf zähle die herausgezogenen (1) und alle vorhandenen Einheiten der nächst höheren Ordnung (die Buch) zusammen, ziehe aus der erhaltenen Summe (65) wieder die etwa darin enthaltenen Einheiten der nächst höheren Ordnung heraus (3 Ries) und setze nur den Rest unter die gleichnamige Ordnung u. s. w. bis alle Ordnungen addirt sind.

Die in obigem Beispiel mit niedergeschriebenen Nebenrechnungen werden häufig im Kopfe oder auf einem besonderen Blättchen Papier ausgeführt.

3) Beim Addiren mehrfach benannter Zahlen des neuen Münz- und Maßsystems bringe man dieselben auf ihre niedrigste Benennung, addire alsdann und verwandele hierauf die erhaltene Summe wieder in eine mehrfach benannte Zahl. In der Praxis genügt es jedoch, nur bei einem Summanden die (nach §. 98) einzuschaltenden Nullen wirklich einzuschalten oder sich auch nur eingeschaltet zu denken und dann ohne Rücksicht auf die Benennungen wie bei ganzen Zahlen zu addiren. Z. B.

6 Mk.	96 Pfg.	14 Dm.	7 m.	o2 cm.	315 Hltr.	o2 Ltr.
3 „	9 „	35 „	4 „	38 „	48 „	7 „
38 „	85 „	— „	9 „	98 „	184 „	9 „
		54 „	— „	7 „	67 „	8 „
48 Mk.	90 Pfg.	105 Dm.	1 m.	45 cm.	614 Hltr.	26 Ltr.

Die einzuschaltenden Nullen sind in obigen Beispielen klein gedruckt. Wie man leicht einsieht, kann man die Summanden aber auch alle auf ein und dieselbe höhere Benennung bringen oder gebracht denken; dann hat man Decimalbrüche zu addiren.

§. 101.

Subtraction benannter Zahlen.

1) Sind Minuend und Subtrahend einfach benannt und gleichnamig, so ziehe man die Maßzahl des Subtrahendus von der Maßzahl des Minuendus ab und gebe der Differenz die gemeinschaftliche Benennung. Z. B. 23 Liter — 12 Liter = 11 Liter.

Der Grund dieses Verfahrens ist ohne Weiteres klar.

2) Gehört der einfach benannte Minuendus zu einer höheren Ordnung als der Subtrahendus, so entnimmt (borgt) man vom Minuendus eine Einheit, verwandelt dieselbe in eine benannte Zahl mit der Benennung des Subtrahendus und zieht nun von letzterer den Subtrahendus ab.

Z. B.	35· Hektoliter	
	— „	86 Liter
	34 Hektoliter	14 Liter.

Erläuterung: Man entnimmt 1 Hektoliter = 100 Liter. 86 Liter von 100 Liter = 14 Liter. Nichts von 34 Hektolitern giebt 34 Hektoliter.

3) Sind mehrfach benannte Zahlen zu subtrahiren, so subtrahire man jede Ordnung des Subtrahendus von der gleichnamigen Ordnung des Minuendus.

Beim schriftlichen Rechnen ist es bequem (siehe folgendes Beispiel) dabei den Subtrahendus so unter den Minuendus zu schreiben, daß die gleichnamigen Ordnungen untereinander stehen, dann zuerst die niedrigste Ordnung, hierauf die nächst höhere u. s. w. zu subtrahiren.

Beispiel: Minuend	2·3 Ries	18 Buch	20 Bogen	
Subtrahend	1 5 „	9 „	15 „	
Differenz	8 Ries	9 Buch	5 Bogen.	

4) Ist hierbei in irgend einer Ordnung eine größere Zahl von einer kleineren abzuziehen, so entnehme (borge) man im Minuendus eine Einheit der nächst höheren Ordnung und verwandele sie in Einheiten der nächst niederen Ordnung. Nun ziehe man von diesen die in Rede stehende Zahl des Subtrahendus ab und zähle zum Rest die gleichnamigen Einheiten des Minuendus hinzu.

Beispiel:	7·1·2· Jahr	18· Tage	$6 \cdot \frac{1}{2}$ Stdn.
	3 8 „	323 „	$9 \frac{3}{4}$ „
	6 7 3 Jahr	59 Tage	$20 \frac{3}{4}$ Stdn.

Erläuterung: $\frac{3}{4}$ Std. von $\frac{1}{2}$ Std. geht nicht, ich entnehme daher 1 Std. = $\frac{4}{4}$ Std.; $\frac{3}{4}$ Std. von $\frac{4}{4}$ Std. = $\frac{1}{4}$ Std., hierzu $\frac{1}{2}$ Std. giebt $\frac{3}{4}$ Std. — 9 Std. von 5 Std. geht nicht, ich borge 1 Tag = 24 Std., 9 Std. von 24 Std. giebt 15 Std., hierzu 5 Std., giebt 20 Std. 323 Tage von 14 Tagen geht nicht u s. w.

5) Beim Subtrahiren mehrfach benannter Zahlen des neuen Münz- und Maßsystems bringe man dieselben auf ihre niedrigste Benennung, oder denke sich nur die hierzu etwa erforderlichen Nullen eingeschaltet und subtrahire dann ohne Rücksicht auf die Benennungen wie bei ganzen Zahlen. Z. B.

$7 \cdot 6 \cdot {}^{m}$	$8 \cdot {}^{cm}$	2^{mm}
—29 „	9 „	7 „
46^{m}	98^{cm}	5^{mm}

Erläuterung: Man schreibe oder denke sich nur geschrieben:

$7 \cdot 6 \cdot 0 \cdot 8 \cdot 2^{mm}$
2 9 0 9 7 „
$4\,6\,9\,8\,5^{mm}$

$= 46^{m}\ 98^{cm}\ 5^{mm}$.

oder auch:

$76 \cdot {}^{m}$	$_{0}8 \cdot {}^{cm}$	2^{mm}
29 „	9 „	7 „
46^{m}	98^{cm}	5^{mm}

§. 102.

Zeitrechnung: Zu den Subtractionsaufgaben mit benannten Zahlen gehört auch die Berechnung des Zeitraumes, welcher zwischen zwei Zeitangaben (Daten) liegt. Unsere Zeitangaben beziehen sich gewöhnlich auf den Zeitpunkt der Geburt Jesu Christi und geben an:

a. in dem wie vielten Jahre nach (oder vor) Christi Geburt ein Ereigniß sich begeben hat; b. in welchem Monat dieses Jahres; c. an dem wie vielten Tage dieses Monats u. s. w. Diese Zeitangaben können, wie man leicht einsieht, nicht unmittelbar zur Berechnung benutzt werden, es muß aus ihnen vorher abgeleitet werden, wie viel Jahre, Monate, Tage u. s. w. seit Christi Geburt wirklich verflossen sind. Dies ist einfach; ein Beispiel wird zum Verständniß genügen: Als man schrieb: 18. October 1813 waren seit Christi Geburt verflossen: 1812 Jahre 9 Monate 17 Tage. Wird dieses beachtet, so bietet die Zeitrechnung, sie mag auf eine Subtraction oder eine Addition führen, keine eigenthümlichen Schwierigkeiten dar.

Beispiele: 1) Blücher wurde geboren zu Rostock am 16. December 1742 und starb am 12. September 1819; wie alt ist er geworden?

Lösung: Seit Christi Geburt waren verflossen:

Am 12. September 1819:	1818 Jahre	8 Monate	11 Tage
„ 16. December 1742:	1741 „	11 „	15 „
Dazwischen liegen	76 Jahre	8 Monate	26 Tage.

Dies ist also das Alter Blüchers.

2) 51 Jahre und 15 Tage nach der Schlacht bei Bell-Alliance, welche am 18. Juni 1815 geschlagen wurde, erfocht die Preußische Armee den großen Sieg bei Königgrätz; wann geschah dies also?

Lösung: Seit Christi Geburt waren verflossen:

a. am 18. Juni 1815:	1814 Jahre	5 Monate	17 Tage
dazu	51 „	— „	15 „
also b. am Tage der Schlacht bei Königgrätz	1865 Jahre	6 Monate	2 Tage

Mithin lebte man an dem genannten Tage im 1866sten Jahre nach Christi im 7. Monate dieses Jahres und dem 3ten Tage des bezeichneten Monats. Dieser Zeitangabe entspricht das Datum:

3. Juli 1866.

Anmerkung. Bei solchen Zeitrechnungen wird gewöhnlich der Monat durchschnittlich zu 30 Tagen und das Jahr zu 12 Monaten in Rechnung gestellt. Aus diesem Grunde können die Resultate auch nur annähernd richtig sein. Will man genau rechnen, so muß man auf die vorkommenden Schaltjahre und darauf rücksichtigen, daß die Monate 30, 31, 28 oder auch 29 Tage haben.

§. 103.

Multiplication benannter Zahlen.

Da bei jeder Multiplication der Multiplicator anzeigt, wie oft der Multiplicandus als Summand vorhanden ist, so muß er stets eine unbenannte Zahl sein. Es hat z. B. gar keinen Sinn 5 Mk. mit 3 Pfg. multipliciren zu wollen.

1) Ist der Multiplicandus einfach benannt, so multiplicire man seine Maßzahl mit dem Multiplicator und gebe dem Product dieselbe Benennung. Z. B. 4 × 82 Kilogramm = (4 × 82) Kil. = 328 Kil. Der Grund dieses Verfahrens ist ohne Weiteres klar.

2) Ist der Multiplicandus mehrfach benannt, so ist er eine Summe und es muß daher jeder Summand derselben mit dem Multiplicator multiplicirt werden. Rechnet man im Kopf, so ist es bequem, zuerst die höchste, dann die nächst niedere Ordnung u. s. w. zu multipliciren; beim schriftlichen Rechnen dagegen ist es vortheilhafter umgekehrt zu verfahren. Enthält hierbei eines der erhaltenen (Partial-)Producte Einheiten der nächst höheren Ordnung, so zieht man diese heraus und zählt sie gleich während des Rechnens zu den gleichnamigen Ordnungs-Einheiten hinzu.

Z. B. Wie groß ist das 26fache von 3 Ries 16 Buch $22^3/_4$ Bogen Druckpapier?

Ansatz und Ausrechnung:

26 × 3 Ries 16 Buch $22^3/_4$ Bogen

99 Ries 19 Buch $16^1/_2$ Bogen.

Nebenrechnungen:

26 × 3 = 99; 26 × 16 = 179; 20|439|21, 19; 26 × 22 = 71, 52; 25|591|23, 50, 91, 75, 16; 4|78|19, 4, 38, 36, 2

Erläuterung: 26 × $^3/_4$ Bogen = $^{78}/_4$ = $19^1/_2$ Bogen; hiervon wird nur $^1/_2$ Bogen ins Resultat geschrieben. 26 × 22 Bogen plus den vorhin erhaltenen 19 Bogen giebt 591 Bogen = 23 Buch 16 Bogen; hiervon werden nur die 16 Bogen ins Resultat geschrieben. 26 × 16 Buch plus den schon erhaltenen 23 Buch giebt 439 Buch = 21 Ries 19 Buch; hiervon werden nur die 19 Buch ins Resultat geschrieben. 26 × 3 Ries + 21 Ries giebt 99 Ries.

3) Ist der Multiplicator ein Bruch (falls er eine gemischte Zahl ist, verwandele man diese in einen unechten Bruch), so kann man zwar ebenfalls jede Ordnung des Multiplicandus mit ihm multipliciren; aber es ist gewöhnlich bequemer, entweder:

a. den ganzen Multiplicandus mit dem Zähler zu multipliciren und dann das Product durch den Nenner zu dividiren, oder

b. zuerst den ganzen Multiplicandus durch den Nenner zu dividiren und hierauf das Resultat mit dem Zähler zu multipliciren. Das letztere Verfahren ist gewöhnlich das vortheilhaftere, weil man dabei mit kleineren Zahlen zu rechnen hat.

Wie eine benannte Zahl durch eine ganze Zahl dividirt wird, muß vorher aus §. 104 entnommen werden.

Z. B. Die Erde vollendet ihren Lauf um die Sonne in 365 Tagen 5 Stunden 48 Minuten 46,83 Sekunden; in welcher Zeit wird sie die Sonne $2^5/_6$ mal umkreist haben?

Lösung: $2^5/_6$ Erdbahnen erfordern $2^5/_6$ mal so viel Zeit als die einmalige Bewegung der Erde um die Sonne.

Oder man schließt: $^1/_6$ der Erdbahn wird in dem 6ten Theile der Zeit durchlaufen als 1 Erdbahn und $2^5/_6$ oder $^{17}/_6$ Erdbahnen erfordern 17 mal mehr Zeit als $^1/_6$ der Bahn. Daher:

Ansatz und Ausrechnung:

$^{17}/_6$ | $2^5/_6$ × 365 Tg. 5 Std. 48 Min. 46,83 Sek. (× 17

6209 „ 2 „ 49 „ 16,11 „

6) 1034 Tg. 20 Std. 28 Min. 12,685 Sek.

Nebenrechnungen:

1) 17 × 46,83 = 32 781; 60|796,11|13; 11

2) 17 × 48 = 349; 60|829|13; 24

3) 17 × 5; 24|98|4; 96; 2

4) 17 × 365 = 2559; 6209

5) 5 × 24 + 2; 6|122|20; 2 × 60; 6|169|28; 49; 1 × 60; 6|76,11|12,685; 14 53

oder:

$^{17}/_{6}$ $2^{5}/_{6}$ × 365 Tg. 5 Std. 48 Min. 46,83 Sek.
6) 60 „ 20 „ 58 „ 7,805 „
1034 Tg. 20 Std. 28 Min. 12,685 Sek. (× 17

4) Beim Multipliciren einer mehrfach benannten Zahl des neuen Maß- und Münzsystems bringe man den Multiplicandus vorher auf eine, gewöhnlich seine niedrigste Benennung, multiplicire alsdann (n. 1. d. §.) und verwandele hierauf das Product wieder in eine mehrfach benannte Zahl. Z. B.

a. Wie groß ist das 45fache von 52 Hektar 5 Ar 2 Quadratmeter?

Lösung: 52 05 02 □m × 45
260 25 10
2082 00 8
2342|25|90 □m = 2342 Hektar 25 Ar 90 □m.

b. Nicht selten wird es genügen, sich die höheren Benennungen nur fort und die etwa einzuschaltenden Nullen nur eingeschaltet zu denken. z. B.

32 × 156	Mark	64 Pfg.
313		28
4699		2
5012	Mark	48 Pfg.

9 × 73 Kilogr. 008 gr.
657 Kilogr. 72 gr.

Erläuterung. Man denkt sich die Benennung Mark weg, dadurch ist 156 Mark 64 Pfg. ohne weiteres in 15664 Pfg. verwandelt, setzt man nun beim Multipliciren die Zahlen genau untereinander, so wird auch das Resultat ohne weiteres wieder in Mark und Pfennige zerlegt.

§. 104.

Die Division benannter Zahlen

verlangt zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1. Fall. Ist der Dividend eine benannte, der Divisor eine unbenannte Zahl, so findet ein wirkliches Theilen des Dividendus durch den Divisor statt und der Quotient ist eine benannte Zahl.

a. Ist hierbei der Dividendus eine einfach benannte Zahl, so dividire man seine Maßzahl durch den Divisor und gebe dem Quotienten die Benennung des Dividendus, z. B.

15 Schffl. : 3 = 5 Schffl.; denn 3 × 5 Schffl. = 15 Schffl.

Geht die Division nicht auf, so erhält man entweder eine gebrochene Zahl zum Quotienten oder man verwandelt den Rest in Einheiten der nächst niederen Ordnung und dividirt diese durch den Divisor u. s. w.

Z. B. 43 Ries Schreibpapier sollen unter 15 Personen gleichmäßig vertheilt werden, wieviel erhält jede?

Lösung: Jede Person hat den 15. Theil von 43 Ries zu fordern, daher:

Ansatz und Ausrechnung:

```
15|43| 2 Ries.
  |30|
   13 × 20
15|260| 17 Buch.
  |15 |
   110
   105
     5 × 24
15|120| 8 Bogen.
  |120|
```

Erläuterung. Der 15. Theil von 43 Ries beträgt 2 Ries und 13 Ries bleiben Rest. Dieser Rest ist noch zu vertheilen, er ist gleich 13 × 20 = 260 Buch. Der 15. Theil von 260 Buch beträgt 17 Buch und 5 Buch bleiben Rest. 5 Buch = 5 × 24 = 120 Bogen. Der 15. Theil von 120 Bogen ist gleich 8 Bogen.

Resultat: 2 Ries 17 Buch 8 Bogen.

b. Ist der Dividendus eine mehrfach benannte Zahl, so ist er eine Summe und es muß daher jeder Summand durch den Divisor dividirt werden. In welcher Reihenfolge dies geschieht, ist ohne Einfluß auf das Resultat, es ist jedoch bequem, folgendes Verfahren anzuwenden:

Man dividire zuerst die höchste Ordnung des Dividendus durch den Divisor. Geht diese Division auf, so wird nun die nächst niedere Ordnung dividirt; bleibt jedoch ein Rest, so verwandele man ihn in Einheiten der nächst niederen Ordnung, zähle zu diesen die vorhandenen gleichnamigen Einheiten hinzu und dividire nun die erhaltene Summe durch den Divisor u. s. w. bis alle vorhandenen Ordnungen dividirt sind.

Z. B. 15 28cm Bomben wogen zusammen 16 Ctr. 38 Kgr. $12\frac{1}{2}$ Dgr., wie viel beträgt das Durchschnittsgewicht einer Bombe?

Lösung: Das Durchschnittsgewicht einer Bombe (d. h. das Gewicht einer Bombe, wenn alle als gleich schwer angenommen werden) ist gleich dem 15. Theil von 16 Ctr. 38 Kgr. $12\frac{1}{2}$ Dgr., daher:

Ansatz und Ausrechnung:

```
15|16| 1 Ctr.
  |15|
  1 × 50
15|88| 5 Kgr.
  |75|
   13 × 100
15|131 2|87 1/2 Dgr.
  |120   |
   11·2
   10 5
      7 × 2
15|15|1
  |15|
    0
```

Erläuterung: Der 15. Theil von 16 Ctr. ist 1 Ctr. und 1 Ctr. bleibt Rest. 1 Ctr. = 50 Kgr. und hierzu 38 Kgr. giebt 88 Kgr. Der 15. Theil von 88 Kgr. = 5 Kgr. und 13 Kgr. bleiben Rest. 13 Kgr. = 13 × 100 = 1300 Dgr. und 12 Dgr. hinzu, giebt 1312 Dgr. — Der 15. Theil von 1312 Dgr. = 87 Dgr. und 7 Dgr. bleiben Rest. — 7 Dgr. = 7 × 2 = $^{14}/_{2}$ Dgr. hierzu $^{1}/_{2}$ Dgr. giebt $^{15}/_{2}$ Dgr. Der 15. Theil von $^{15}/_{2}$ Dgr. = $^{1}/_{2}$ Dgr.

Resultat: 1 Ctr. 5 Kgr. $87\frac{1}{2}$ Dgr.

c. Ist der Divisor ein Bruch (falls er eine gemischte Zahl ist, so verwandele man dieselbe in einen unechten Bruch), so dividire man die mehrfach benannte Zahl durch den Zähler und multiplicire hierauf den erhaltenen Quotienten mit dem Nenner (§. 77).

Z. B. 3 Ctr. $12\frac{1}{2}$ ℔ haben nach altem Gelde 80 Thlr 17 *sgr* 10 ₰ gekostet, wie viel kostet 1 Ctr. 1) nach altem, 2) nach neuem Gelde?

Lösung: 1) Man schließe: 3 Ctr. $12\frac{1}{2}$ ℔ $= 3\frac{1}{8}$ Ctr. $= \frac{25}{8}$ Ctr. — Kosten $\frac{25}{8}$ Ctr. 80 Thlr 17 *sgr* 10 ₰, so kostet 1 Ctr. $\frac{25}{8}$mal weniger. Oder: Kosten $\frac{25}{8}$ Ctr. 80 Thlr 17 *sgr* 10 ₰, so kostet $\frac{1}{8}$ Ctr. 25mal weniger und $\frac{8}{8}$ oder 1 Ctr. kostet 8mal mehr als $\frac{1}{8}$ Ctr.; daher:

Ansatz und Ausrechnung:

```
25)  80 Thlr 17 sgr 10        ₰ : 25/8
     ---------------------------------
      3  "    6  "   8 14/25 "  (a)
     --------------------------------- (× 8
     25 Thlr 23 sgr  8 12/25 ₰  (b)
```

Nebenrechnungen:

```
(a) 25|80|3 Thlr            (b) 1) 8 × 14
      |75|                       25|112|4
      ----                         |100|
         5 × 30                    -----
    25|167|6 sgr                    12
      |150|
      -----                      2)  8 × 8
        17 × 12                  12|68|5 sgr
    25|214|8 ₰                     |60|
      |200|                        ----
      -----                          8 ₰
        14
                                 3)  8 × 6
                                 30|53|1 Thlr
                                   |30|
                                   ----
                                    23 sgr
```

2) 1 Thlr = 3 Mk., 25 Thlr = 25 × 3 Mk. = 75 Mk.
1 *sgr* $= \frac{1}{10}$ Mk., 23 *sgr* $= 23 \cdot \frac{1}{10} = 2{,}3$ Mk. = 2 „ 30 Pf.
12 Pf. alt = 10 Pf. neu, also 1 Pf. alt $= \frac{10}{12}$
$= \frac{5}{6}$ Pf. neu, mithin $8\frac{12}{25}$ Pf. alt =
$8\frac{12}{25} \times \frac{5}{6} = \frac{106}{15}$ Pf. neu = $7\frac{1}{15}$ „

25 Thlr 23 *sgr* $8\frac{12}{25}$ ₰ = 77 Mk. $37\frac{1}{15}$ Pf.

d. Beim Dividiren einer mehrfach benannten Zahl des neuen Maß- und Münzsystems bringe man den Dividendus vorher auf eine, gewöhnlich seine niedrigste Benennung, dividire dann (n. 1. a. d. §.) und verwandele hierauf den Quotienten wieder in eine mehrfach benannte Zahl. Z. B.

Wie groß ist der 75. Theil von $3^{Dm}\ 9^{m}\ 5^{cm}\ 7^{mm}$?

Lösung: $75 | 39{\cdot}057^{mm} | 52 | 0{,}76^{mm} = 52^{cm}\ 0{,}76^{mm}$

```
75|39·057 mm|52|0,76 mm = 52 cm 0,76 mm
   37 5
   ----
    1 55
    1 50
    ----
      57·0
      52 5
      ----
       4 50
       4 50
       ----
          0
```

Ist der Divisor so klein, daß man im Kopfe dividiren kann, so genügt es wohl auch, sich nur die etwa erforderlichen Nullen einzuschalten oder eingeschaltet zu denken, und dann ohne Rücksicht auf die Benennungen wie bei ganzen Zahlen zu dividiren. Z. B.

$3^{Dm}\ 9^{m}\ {}_{0}5^{cm}\ 6^{mm} : 4$ (3 21)
$= 9^{m}\ 76^{cm}\ 4^{mm}$

87 Hltr. o5 Ltr. : 5
= 17 Hltr. 41 Ltr.

2. Fall. **Sind Dividendus und Divisor benannte Zahlen**, so soll ermittelt werden, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist. Dies ist nur möglich, wenn Divisor und Dividendus nicht allein gleichartig, sondern auch gleichnamig sind. Der Quotient ist eine unbenannte Zahl.

a. Sind Divisor und Dividend einfach benannt und gleichnamig, so dividire man die Maßzahl des Dividendus durch die Maßzahl des Divisors und nehme den Quotienten zum Resultate. Denn ist z. B. 24 Mark : 6 Mark zu berechnen, so kann man schließen: 6 Mark sind in 24 Mark so oft enthalten als 6 in 24 enthalten ist. Dies giebt die unbenannte Zahl 4 zum Quotienten. Probe: 4 × 6 Mark = 24 Mark.

b. Sind Divisor und Dividendus als ungleichnamige, oder mehrfach benannte Zahlen gegeben, so bringe man sie auf eine gleiche Benennung und verfahre dann wie vorher.

Beispiele: 1) In wieviel Büchern, von welchen jedes $22\frac{1}{2}$ Bogen enthält, sind 72 Ries Druckpapier enthalten?

Lösung: Jedes Buch enthält $22\frac{1}{2}$ Bogen, also müssen aus 72 Ries so viel Bücher gefertigt worden sein, als $22\frac{1}{2}$ Bogen in 72 Ries enthalten sind, daher:

Ansatz und Ausrechnung:

```
 72 Ries      :   22½ Bogen
 20               45/2 (c)
────
1440 Buch (a)
  25
────
7200
2880
─────
36000 Bogen × 2 (b)
──────────────────
45|7·2000|1600
  |4 5
  ────
   27·0
   27 0
   ────
     0
```

Erläuterung: a. Verwandele 72 Ries in Buch = 1440 Buch, dann b) diese in Bogen = 36000 Bogen. — c) Verwandele $22\frac{1}{2}$ Bogen in einen unechten Bruch = $\frac{45}{2}$ Bogen. d. Dividire 36000 durch $\frac{45}{2}$, indem du 36000 mit 2 multiplicirst = 72000 und dann die erhaltene Zahl durch 45 dividirst = 1600.

Resultat: In 1600 Büchern.

oder:

72 Ries : $22\frac{1}{2}$ Bogen

(b) $\frac{\not{72}^{8} \times 2 \times 5 \times 20}{\not{9}}$ $\frac{\not{45}^{9}}{2 \times \not{25}_{5} \times 20}$ (a)

1600 Bücher.

Erläuterung: a. Verwandele $22\frac{1}{2}$ Bogen in einen unechten Bruch = $\frac{45}{2}$ Bogen, dann diese Zahl in Buch = $\frac{45}{2 \times 25}$ Buch und die Buch in Ries = $\frac{45}{2 \times 25 \times 20}$ Ries, hebe diesen Bruch, so weit es geht $\frac{9}{2 \times 5 \times 20}$ und dividire alsdann mit diesem Bruch in 72, giebt $\frac{72 \times 2 \times 5 \times 20}{9}$ durch 9 gehoben $8 \times 2 \times 5 \times 20 = 1600$.

2) Wie viel Ducaten kann man für 125 Thlr 22 *sgr* 6 ₰ einwechseln, wenn der Ducaten zu 3 Thlr 7 *sgr* 6 ₰ gerechnet wird?

Ansatz und Ausrechnung:

```
1) 125 Thlr 22 sgr 6 ₰ : 3 Thlr 7 sgr 6 ₰
    30                    30
   ─────────              ───────
   3772 × 12              97 × 12
──────────────            ───────
117θ|4527θ|38 9/13        1170
  351
  ────
  10·17
   9 36   9
  ──────
   81  | 9
  ───  |───
  117  |13
```

Erläuterung: Verwandele den Dividend und den Divisor in Pfennige, giebt a. 45270 Pfg. und b. 1170 Pfg., dann dividire erstere Maßzahl 45270 durch letztere: 1170; giebt $38\frac{9}{13}$.

Resultat: $38\frac{9}{13}$ Ducaten.

oder:

2) 125 Thlr. 22 sgr 6 ₰ : 3 Thlr. 7 sgr 6 ₰

$4 \quad \frac{3}{4}$ Thlr. $\quad 4 \quad \frac{1}{4}$ Thlr.

(a) $\frac{503}{4} \times \frac{4}{13} \qquad \frac{13}{4}.$

13 | 503 | $38^9/_{13}$
39
113
104
9

Erläuterung: Verwandele Dividend und Divisor in einen Thalerbruch; giebt a. $^{503}/_4$ Thlr. und b. $^{13}/_4$ Thlr. Dividire $^{503}/_4$ durch $^{13}/_4$, giebt $38^9/_{13}$.

Resultat: $38^9/_{13}$ Ducaten.

$^9/_{13}$ Ducaten können nicht gegeben werden, also muß man diesen Bruch entweder in Thlr., sgr und ₰ verwandeln, oder (was bequemer sein wird) man berechne den Werth von 38 Ducaten und ziehe diesen von 125 Thlr. 22 sgr 6 ₰ ab. Der Rest giebt an, wie viel Thlr., sgr und ₰ nach dem Wechseln übrig bleiben.

3) Wie oft wird sich ein Wagenrad von 4^m $81{,}4^{cm}$ Umfang um seine Achse gedreht haben, wenn der Wagen einen Weg von 15^{Km} $18{,}2^m$ zurückgelegt hat.

Lösung: Nach jeder Umdrehung des Rades muß der Wagen einen Weg von 4^m $81{,}4^{cm}$ zurückgelegt haben, folglich wird das Rad sich bei einer Wegstrecke von 15^{Km} $18{,}2^m$ so oft um seine Achse gedreht haben, als 4^m $81{,}4^{cm}$ in 15^{Km} $18{,}2^m$ enthalten sind, daher:

Ansatz und Ausrechnung:

15^{Km} $18{,}2^m$: 4^m $81{,}4^{cm}$

$150182 0{,}0^{cm}$: $481{,}4^{cm}$ = 3119,69 . . .
14442
5762
4814
9480
4814
46660
43326
33340
28884
44560
43326
1234

Erläuterung: Bringe Dividend und Divisor auf eine Benennung. Z. B. auf Centimeter. — 15^{Km} $18{,}2^m$ = 1501820^{cm}, 4^m $81{,}4^{cm}$ = $481{,}4^{cm}$ und dividire dann nach §. 88. b.

Resultat: 3119,69 mal.

§. 105.

Arithmetisches Mittel.

Dividirt man die Summe mehrerer Zahlen durch die Anzahl der Summanden, so nennt man den erhaltenen Quotienten das „arithmetische Mittel“ (auch Durchschnittszahl) dieser Zahlen. Ein solches arithmetisches Mittel wird häufig berechnet, wenn man bei der wiederholten Vornahme eines Versuchs, einer Beobachtung,

einer Messung u. s. w. verschiedene Zahlenresultate erhält und daraus ein mittleres (das wahrscheinlichste) Hauptresultat gewinnen will.

Z. B. Beim Probiren einer Pulversorte geschehen 5 Wurf und man erhält folgende Wurfweiten: $227{,}5^m$, $228{,}9^m$, $227{,}4^m$, 229^m, $227{,}8^m$; man soll die mittlere Wurfweite berechnen.

Lösung: Die mittlere Wurfweite ist:

$$\frac{227{,}5 + 228{,}9 + 227{,}4 + 229 + 227{,}8}{5} = 228{,}12^m.$$

§. 106.

Rechenvortheile.

Auch beim Rechnen mit benannten Zahlen können die bereits mitgetheilten, und nicht selten auch noch besondere Abkürzungen angewendet werden. Bestimmte, allgemein gültige Regeln hierüber lassen sich nur wenige geben, weil die mehrsten Rechenvortheile erst aus der Natur des einzelnen Falles abgeleitet werden können. Die nachstehenden Beispiele sind nur bestimmt, den Sinn für das Denk-Rechnen zu erwecken; erschöpfen sollen sie diesen Gegenstand nicht.

1) Besonders führt ein umsichtiger Gebrauch der Brüche nicht selten zu wesentlichen Abkürzungen.

Beim Multipliciren und Dividiren wird es oft vortheilhaft sein, statt 75 $^3/_4$ Hundert, statt 50 $^1/_2$ Hundert, statt 25 $^1/_4$ Hundert, statt $12^1/_2$ $^1/_8$ Hundert in Rechnung zu bringen.

Z. B. 48 Mark $\times$ $12^1/_2$ = 48 $\times$ $^1/_8$ Hundert = $^{48}/_8$ Hundert = 600 Mark.

32 Ctr. $\times$ 75 = 32 $\times$ $^3/_4$ Hundert = $\frac{\overset{8}{\cancel{32}} \times 3}{\cancel{4}}$ = 24 Hundert = 2400 Ctr.

50 Liter $\times$ 224 = $^1/_2$ Hundert $\times$ 224 = $^{224}/_2$ Hundert = 112 Hundert Liter = 11200 Liter.

2) Auch bei benannten Zahlen können die Factoren eines Productes nicht selten mit Vortheil vertauscht werden.

Z. B. 25 $\times$ 16 Pfg. = 16 $\times$ 25 Pfg. = 16 $\times$ $^1/_4$ Mark = 4 Mark.
75 $\times$ 24 ℔ = 24 $\times$ 75 ℔ = 24 $\times$ $^3/_4$ Ctr. = 6 $\times$ 3 = 18 Ctr.

3) Soviel Pfennige 1 ℔ kostet, soviel Mark kostet 1 Ctr.

Z. B. Wenn 1 ℔ 23 Pfennige kostet, so kostet 1 Ctr. 23 Mark.

4) Oft kann man eine benannte Zahl mit Vortheil als Differenz in Rechnung bringen.

Z. B. 97 ℔ $\times$ 12 = (1 Ctr. — 3 ℔) $\times$ 12 = 12 Ctr. — 36 ℔ = 11 Ctr. 64 ℔.
45 $\times$ (23 Stunden 59 Minuten 59 Sekunden =
45 $\times$ (1 Tag — 1 Sek.) = 45 Tage — 45 Sek. =
44 Tage 23 Stunden 59 Minuten 15 Sekunden.

Fünfter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 107.

Vergleicht man zwei Zahlen oder Größen, a und b, mit einander, so kommt man zu einem bestimmten Resultate, wenn man entweder ihren Unterschied ermittelt oder auch feststellt, wie oft die eine in der anderen enthalten ist. Oft handelt es sich aber nicht um die wirkliche Berechnung ihres Unterschiedes oder ihres Quotienten, sondern nur um die Erkenntniß, daß dieses Zahlen- oder Größenpaar denselben Unterschied, oder denselben Quotienten liefert, als ein anderes Zahlen- oder Größenpaar.

Ist in diesem Falle: $a - b = c - d$ (z. B. $12 - 4 = 15 - 7$), so sagt man zuweilen: a (12) verhält sich arithmetisch zu b (4), wie c (15) zu d (7).

Ist dagegen: $a : b = c : d$ (z. B. $12 : 4 = 15 : 5$), so spricht man gewöhnlich: a (12) verhält sich geometrisch zu b (4), wie c (15) zu d (5).

Die beiden Differenzen werden dann arithmetische, die Quotienten geometrische Verhältnisse genannt.

Das arithmetische Verhältniß findet in der Praxis keine nennenswerthe Verwendung, das geometrische dagegen eine sehr ausgedehnte. Aus diesem Grunde soll nur das letztere einer näheren Betrachtung unterzogen werden und der Kürze halber immer dieses gemeint sein, wenn später von einem Verhältnisse ohne nähere Bezeichnung die Rede ist.

Beispiele von geometrischen Verhältnissen findet man leicht: Die Preise, welche für zwei verschiedene Mengen einer Waare zu bezahlen sind, verhalten sich wie diese Mengen selbst.

Bei jedem Hebel verhält sich die Kraft zur Last, wie der Hebelsarm der Last zum Hebelsarm der Kraft u. s. w.

Das Verhältniß von Größen wird häufig durch ein Zahlenverhältniß veranschaulicht. Z. B. Auf unserer Erde verhält sich die Oberfläche des Meeres zur Gesammt-Oberfläche wie 2 zu 3.

Sind Größen mit einerlei Maß gemessen, so verhalten sie sich wie ihre Maßzahlen. Z. B. $5^m : 8^m = 5 : 8$.

§. 108.

1) In dem Verhältniß $a : b$ $(9 : 3)$ heißt a (9) das erste oder Vorderglied, b (3) das zweite oder Hinterglied, und die Zahl $\frac{a}{b}$ (3), welche angiebt, wie oft das zweite Glied in dem ersten enthalten ist, wird der Exponent des Verhältnisses genannt. Ein Verhältniß heißt steigend, wenn sein erstes Glied kleiner, fallend, wenn es größer ist, als das zweite. Z. B. $3 : 5$ ist ein steigendes, $8 : 4$ ein fallendes Verhältniß.

2) Der Werth, oder die Größe eines Verhältnisses wird durch seinen Exponenten, also durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler das erste und dessen Nenner das zweite Glied des Verhältnisses ist. Hieraus folgt:

a. Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben.

b. Die Größe eines Verhältnisses bleibt ungeändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

3) Das zuletzt genannte Gesetz wird benutzt:

a. um ein in Brüchen gegebenes Verhältniß in ganzen Zahlen auszudrücken. Zu diesem Zweck multiplicire man beide Glieder, wenn nur eine gebrochene Zahl vorhanden ist, mit dem Nenner des Bruches; z. B. $3/4 : 5 = 3/4 \times 4 : 5 \times 4 = 3 : 20$, und wenn beide Glieder Brüche enthalten, mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner; z. B. $1 5/6 : 7/8 = 1 5/6 \times 24 : 7/8 \times 24 = 44 : 21$.

b. um Verhältnisse in möglichst kleinen Zahlen darzustellen, indem man beide Glieder durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt. Z. B. $4 : 6 = 4/2 : 6/2 = 2 : 3$.

4) Ein Verhältniß heißt aus zwei oder mehreren Verhältnissen zusammengesetzt, wenn es aus ihnen dadurch gebildet wird, daß man alle ihre ersten und alle ihre zweiten Glieder mit einander multiplicirt. Z. B. Aus $3 : 5$ und $4 : 3$ entsteht das zusammengesetzte Verhältniß $3 \times 4 : 5 \times 3$, oder $4 : 5$.

§. 109.

1) Die Verbindung zweier gleichen Verhältnisse (Quotienten) durch ein Gleichheitszeichen wird eine geometrische Proportion, oder kurzweg Proportion genannt. Die allgemeine Form der Proportion ist: $a : b = c : d$ $(6 : 3 = 8 : 4)$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$. Die 4 Zahlen a, b, c, d, welche eine Proportion bilden, heißen Glieder derselben. Von diesen nennt man: das erste und vierte Glied: äußere, das zweite und dritte: innere, das erste und dritte: Vorder-, das zweite und vierte: Hinter-Glieder. Vorder- und Hinterglieder führen auch den gemeinschaftlichen Namen: gleichliegende oder homologe Glieder.

Das Glied d (4) wird die vierte Proportionszahl zu a (6), b (3) und c (8) genannt.

2) Sind die beiden inneren Glieder einer Proportion gleich, ist z. B. $a : b = b : c$, oder $8 : 4 = 4 : 2$, so heißt sie stetig. Es wird dann b (4) die mittlere Proportionalzahl zu a (8) und c (2), und c (2) die dritte Proportionalzahl zu a (8) und b (4) genannt.

§. 110.

In jeder Proportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Product der inneren.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch $a \cdot d = b \cdot c$
$6 : 3 = 8 : 4$, „ „ „ $6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$.

1. Beweis: Der gemeinschaftliche Exponent beider Verhältnisse sei $= e$. Dann ist $a = b \cdot e$ und $c = d \cdot e$, und obige Proportion geht über in: $(b \cdot e) : b = (d \cdot e) : d$.

Nun erkennt man aber sogleich, daß das Product der äußeren Glieder $b \cdot e \cdot d$ aus denselben Factoren besteht, als das Product der inneren Glieder $b \cdot d \cdot e$, daß folglich beide Producte gleich sein müssen.

2. Beweis: Aus dem Begriff der Proportion $a : b = c : d$ folgt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Werden nun beide Brüche mit dem Producte der Nenner, also mit bd multiplicirt, so erhält man $\frac{a \cdot b \cdot d}{b} = \frac{c \cdot b \cdot d}{d}$, oder nach dem Heben: $ad = bc$.

§. 111.

1) Eine Proportion ist richtig (d. h. 4 Zahlen, welche in der Form einer Proportion niedergeschrieben sind, bilden wirklich eine Proportion), wenn das Product der äußern Glieder gleich dem Product der innern ist.

Z. B. Es ist $a : b = c : d$, wenn $ad = bc$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß der Exponent $\frac{a}{b}$ gleich dem Exponenten $\frac{c}{d}$ ist. Nun folgt aus $ad = bc$, wenn man beide Ausdrücke durch das Product der Nenner bd dividirt: $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ und wenn man hebt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; folglich ist auch $a : b = c : d$.

Anmerkung. Dieses Gesetz giebt ein zweites und zwar das bequemste Mittel in die Hand, die Richtigkeit einer Proportion zu prüfen.

2) Aus obigem Gesetz folgt unmittelbar:

Ist das Product zweier Zahlen dem Product zweier anderen Zahlen gleich, so lassen sich aus diesen 4 Zahlen Proportionen bilden, indem man die Factoren des einen Productes zu äußern und die Factoren des anderen Productes zu innern Gliedern nimmt.

Aus: $a \cdot b = c \cdot d$ folgt:

1) $a : c = d : b$	5) $c : a = b : d$
2) $a : d = c : b$	6) $c : b = a : d$
3) $b : c = d : a$	7) $d : a = b : c$
4) $b : d = c : a$	8) $d : b = a : c$

3) Betrachtet man die erste dieser 8 Proportionen als die ursprüngliche, so können die andern 7 als die möglichen Versetzungen derselben angesehen werden. Von diesen Versetzungen merke man besonders: In jeder Proportion darf man: 1) die inneren Glieder

vertauschen (folgt aus Nr. 2); 2) die Verhältnisse vertauschen (folgt aus Nr. 8); 3) die Verhältnisse umkehren (folgt aus Nr. 5); 4) die ganze Proportion umkehren (folgt aus Nr. 4).

§. 112.

1) Jedes äußere Glied einer Proportion wird gefunden, wenn man das Product der beiden innern durch das gegebene äußere Glied dividirt.

2) Jedes innere Glied einer Proportion wird gefunden, wenn man das Product der beiden äußern durch das gegebene innere Glied dividirt.

Beweis: Aus der Proportion: $a:b = c:d$ folgt: $ad = bc$. Dividirt man nun beide Producte

1) durch d so erhält man: $\frac{ad}{d} = \frac{bc}{d}$ oder: $a = \frac{bc}{d}$

2) „ c „ „ $\frac{ad}{c} = \frac{bc}{c}$ „ $b = \frac{ad}{c}$

3) „ b „ „ $\frac{ad}{b} = \frac{bc}{b}$ „ $c = \frac{ad}{b}$

4) „ a „ „ $\frac{ad}{a} = \frac{bc}{a}$ „ $d = \frac{bc}{a}$

§. 113.

Sind in 2 Proportionen 3 Glieder, welche gleiche Stellen einnehmen, einander gleich, so müssen auch die 4ten Glieder einander gleich sein.

Z. B. Wenn 1) $a:b = x:c$
2) $a:b = y:c$ } so ist $x = y$.

Beweis: Aus 1) folgt: $x = \frac{ac}{b}$, aus 2) $y = \frac{ac}{b}$, folglich $x = y$.

§. 114.

Eine Proportion bleibt richtig, wenn man ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

In Zeichen: Wenn $a:b = c:d$, so ist auch 1) $am:b = cm:d$

2) $a:bm = c:dm$; 3) $a:b = \frac{c}{m} : \frac{d}{m}$ u. s. w.

Beweis: Multiplicirt oder dividirt man ein äußeres und ein inneres Glied mit irgend einer Zahl m (z. B. 3), so wird sowohl das Product der äußeren, als auch das Product der inneren Glieder um m (3) mal größer oder kleiner. Es sind also beide Producte immer noch gleich und daher muß die neue Proportion richtig sein.

§. 115.

Das Gesetz des vorigen §. wird benutzt:

a. um Proportionen, welche Brüche enthalten, in ganzen Zahlen darzustellen (s. §. 108. 3.).

Z. B. 1) Aus $2\frac{1}{2} : 3 = 5 : x$ folgt, wenn man das 1. und 3. Glied mit 2 multiplicirt: $5 : 3 = 10 : x$.

2) Aus $3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{2} = 7\frac{6}{15} : x$ folgt zuerst: $3\frac{4}{5} \times 15 : 2\frac{1}{2} = 7\frac{6}{15} \times 15 : x$ oder $57 : 2\frac{1}{2} = 111 : x$ und dann: $57 \times 2 : 2\frac{1}{2} \times 2 = 111 : x$ oder $114 : 5 = 111 : x$.

b. um Proportionen in möglichst kleinen Zahlen auszudrücken. Z. B. Aus $8 : 28 = 14 : x$ folgt, wenn man das 1. und 2. Glied durch 4 dividirt: $2 : 7 = 14 : x$ und dann, wenn das 1. und 3. Glied durch 2 dividirt wird $1 : 7 = 7 : x$.

§. 116.

1) In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zur Summe oder Differenz der beiden letzten wie ein Paar gleichliegende Glieder.

2) In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Z. B. Wenn $a : b = c : d$, so ist auch:

1) $a + b : c + d = a : c = b : d$ und $a - b : c - d = a : c = b : d$

2) $a + c : b + d = a : b = c : d$ und $a - c : b - d = a : b = c : d$

Beweis: Es ist leicht zu zeigen, daß bei allen 4 Proportionen das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren ist. Z. B. die Proportion $a + b : c + d = a : c$ ist richtig, wenn $(a + b)\,c = (c + d)\,a$ oder wenn $ac + bc = ac + ad$. Dies ist der Fall, denn daß $ac = ac$ ist, versteht sich von selbst und daß $bc = ad$ ist, folgt aus der vorausgesetzten Proportion.

§. 117.

1) Werden die gleichstelligen Glieder mehrerer Proportionen mit einander multiplicirt, so bilden die Producte in derselben Folge wieder eine Proportion.

Z. B. Wenn 1) $a : b = c : d$

2) $m : n = o : p$

so ist auch: $a \cdot m : b \cdot n = c \cdot o : d \cdot p$.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $a \cdot m \cdot d \cdot p = b \cdot n \cdot c \cdot o$ ist. Nun folgt aus Nr. 1): $a \cdot d = b \cdot c$ und aus Nr. 2): $m \cdot p = n \cdot o$, folglich ist auch: $a \cdot d \cdot m \cdot p = b \cdot c \cdot n \cdot o$ oder $a \cdot m \cdot d \cdot p = b \cdot n \cdot c \cdot o$.

2) Dies Verfahren wird das Zusammensetzen der Proportionen genannt.

§. 118.

1) Sind mehr als zwei Verhältnisse einander gleich, ist z. B. $a : m = b : n = c : o = d : p$, so schreibt man mitunter: $a : b : c : d = m : n : o : p$. Das Ganze heißt dann eine laufende Proportion und jede Seite der Gleichung ein laufendes Verhältniß.

2) In jeder laufenden Proportion verhält sich die Summe aller Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe aller Glieder des zweiten Verhältnisses wie ein Paar gleichliegende Glieder.

Z. B. Wenn $a : b : c : d = m : n : o : p$, so ist auch $a + b + c + d : m + n + o + p = a : m = b : n = c : o = d : p$.

Beweis: Die laufende Proportion: $a : b : c : d = m : n : o : p$ ist nur eine kürzere Schreibart für: $a : m = b : n = c : o = d : p$. Aus $a : m = b : n$ folgt (§. 116) $a + b : m + n = b : n$ und da $b : n = c : o$ so: $a + b : m + n = c : o$, also ferner (§. 116) $a + b + c : m + n + o = c : o$ und da $c : o = d : p$, so ist auch $a + b + c : m + n + o = d : p$, folglich: $a + b + c + d : m + n + o + p = d : p = c : o = b : n = a : m$.

3) Aus $a : b : c : d = m : n : o : p$ folgt auch, wie man leicht erkennt: $a : b = m : n$; $a : c = m : o$; $a : d = m : p$; $b : c = n : o$ u. s. w. Um z. B. $a : b = m : n$ zu erhalten, leite man aus der gegebenen Proportion ab: $a : m = b : n$ und vertausche die mittleren Glieder.

Sechster Abschnitt.

Von den Proportionsrechnungen.

Erstes Kapitel.

Von der Regel de tri.

A. Einfache Regel de tri.

§. 119.

1) Nicht selten sind zwei Größen so von einander abhängig, daß die Vervielfachung oder Theilung der einen Größe eine gleichgroße Vervielfachung oder Theilung der anderen zur nothwendigen Folge hat.

Ist uns z. B. bekannt, daß für eine bestimmte Menge Waare (3 k.) ein gewisser Preis (7 Mk.) bezahlt werden muß, so sagt uns ein einfacher Verstandesschluß, daß

die 2fache Menge der Waare den 2fachen Preis
„ 3fache „ „ „ „ 3fachen „
„ 4fache „ „ „ „ 4fachen „
$\frac{1}{2}$ der Waare auch $\frac{1}{2}$ des Preises
$\frac{1}{3}$ „ „ „ $\frac{1}{3}$ „ „ u. s. w.

erfordert. — Von solchen Größen sagt man, sie stehen in „geradem“ oder „directem Verhältnisse“ zu einander, oder richtiger: sie sind direct proportional.

2) Denken wir uns nun z. B. zwei verschiedene Mengen einer Waare (6 k. und 3 k.) und die dazu gehörigen Preise (14 Mk. und 7 Mk.), so wird das Verhältniß des ersteren Größenpaares (6 k. : 3 k.) dem Verhältnisse des letzteren (14 Mk. : 7 Mk.) offenbar gleich sein, es würden sich also verhalten:

6 k. : 3 k. = 14 Mk. : 7 Mk.

Eine solche Verbindung zweier gleichen Größenverhältnisse durch ein Gleichheitszeichen giebt eine „Größenproportion“. Jede Größenproportion drückt die Erkenntniß aus, daß das erste Glied dasselbe Vielfache (oder derselbe Theil) von dem zweiten ist, als das dritte von dem vierten.

3) Aus dem Begriff eines Größenverhältnisses folgt, daß die Glieder desselben gleichartige Größen sein müssen; dagegen ist es nicht nothwendig, daß bei einer Größenproportion die Größen beider Verhältnisse gleicher Art sind.

§. 120.

Sind in einer Größenproportion die Glieder benannte Zahlen und in jedem der beiden Verhältnisse nicht nur gleichartig, sondern auch gleichnamig, hat man z. B.

4 Hltr. : 12 Hltr. = 10 Mk. : 30 Mk.

so entsteht offenbar eine richtige Zahlenproportion, wenn man die Benennungen fortläßt:

$$4 : 12 = 10 : 30$$

Und da ungleichnamige Zahlen (wenn sie gleichartig sind) stets gleichnamig gemacht werden können, so läßt sich auch aus jeder Größenproportion eine Zahlenproportion ableiten, auf welche dann alle für Zahlenproportionen erwiesenen Gesetze angewendet werden können.

§. 121.

Ist in einer Größenproportion ein Glied unbekannt, so kann es aus den drei anderen Gliedern (nach §. 112) berechnet werden. Man sagt dann, dies geschehe nach der einfachen Regel de tri (d. h. Regel von dreien). — Ob und wie in einer Rechenaufgabe aus 2 Größenpaaren, wovon die eine Größe unbekannt ist, sich eine richtige Proportion bilden lasse, dies muß in einem jeden einzelnen Falle besonders beurtheilt werden. Jede dieser Aufgaben enthält eine Frage und dieser Frage entsprechend eine Angabe. Diese beiden Theile muß man scharf sondern; dem Mindergeübten ist es sogar anzurathen, sich dieselben übersichtlich so unter einander zu ordnen, daß die gleichartigen Größen untereinander stehen und dann erst zu überlegen, ob und wie sich eine Größenproportion bilden lasse. Gewöhnlich richtet man es dabei noch so ein, daß in der Frage und in der Proportion das unbekannte Glied die letzte Stelle einnimmt.

Z. B. Wie viel kosten 8 k. einer Waare, von welcher 3 k. mit 14 Mk. bezahlt worden sind?

Angabe: 3 k. kosten 14 Mk.
Frage: 8 „ „ ? „

Beurtheilung: So oft mal mehr Waare ich erhalte, eben so oft mal mehr Geld habe ich zu bezahlen, also kann ich setzen:

3 k. : 8 k. = 14 Mk. : x Mk.

wobei x noch eine unbekannte Zahl ausdrückt.

Aus dieser Größenproportion geht die Zahlenproportion hervor:

$$3 : 8 = 14 : x$$

Es ist also $x = \frac{8 \times 14}{3} = \frac{112}{3} = 37\,^1/_3$.

Hieraus kann ich schließen, daß in obiger Größenproportion das vierte Glied $37\,^1/_3$ Mk. heißt, also 8 k. $37\,^1/_3$ Mk. kosten.

In der Praxis schreibt man die Zahlenproportion nicht besonders hin, denkt sich nur die Benennungen weg und giebt der Rechnung gewöhnlich folgende Form:

3 k. : 8 k. = 14 Mk. : x

```
        8
  3|112|37,33 Mk. = 37 Mk. 33 1/3 Pf.
   | 22|
     10
      10
        1
```

Resultat: 37 Mk. 33 Pf.

Anmerkung: Nicht immer sind zwei Größen, von denen die Vermehrung oder Verminderung der einen eine Vermehrung oder Verminderung der anderen bedingt, auch proportional; es ist hierzu durchaus nothwendig, daß die Vermehrung oder Verminderung der einen Größe auch eine gleichvielfache Vermehrung oder Verminderung der anderen erfordert. Man hüte sich besonders in dieser Hinsicht vor Trugschlüssen. Z. B. Beim Schießen mit Feuerwaffen wird (in gewissen Grenzen) eine größere Ladung auch eine größere Geschwindigkeit des Geschosses erzeugen, aber keineswegs darf man schließen, daß die doppelte Ladung auch die doppelte Geschwindigkeit, die dreifache Ladung auch die dreifache Geschwindigkeit des Geschosses u. s. w. hervorbringen würde.

§. 122.

Mitunter stehen aber auch 2 Größen in einer solchen Abhängigkeit, daß die Vervielfachung der einen eine gleich große Theilung der anderen und eine Theilung der einen eine gleich große Vervielfachung der anderen bedingt.

Gebrauchen z. B. 3 Arbeiter zur Vollendung einer Arbeit 10 Tage, so sagt ein einfacher Verstandesschluß, daß

die 2fache Anzahl der Arbeiter $^1/_2$ der Arbeitszeit
" 3fache " " " $^1/_3$ " "
" 4fache " " " $^1/_4$ " "
$^1/_2$ der Arbeiterzahl 2mal soviel Arbeitszeit
$^1/_3$ der Arbeiterzahl 3mal soviel Arbeitszeit u. s. w. brauchen würden.

Von solchen Größen sagt man, sie stehen im „umgekehrten“ oder „indirecten“ Verhältnisse zu einander, oder richtiger: sie sind „indirect proportional“.

Denken wir uns nun z. B. eine Arbeit einmal durch 3 Arbeiter in 10 Tagen und ein andermal durch 6 Arbeiter in 5 Tagen vollendet, so ist das Verhältniß: 3 Arbeiter : 6 Arbeiter dem Verhältniß: „10 Tage : 5 Tagen“ allerdings nicht gleich, man erhält aber offenbar

zwei gleiche Verhältnisse, also eine richtige Proportion, wenn man eines von den beiden Verhältnissen umkehrt:

also: 3 Arb. : 6 Arb. = 5 Tage : 10 Tagen
oder 6 Arb. : 3 Arb. = 10 Tage : 5 Tagen setzt.

§. 123.

Behandelt eine Rechenaufgabe 2 Größenpaare, welche direct proportional sind, so wird sie zur geraden oder directen Regel de tri gezählt; behandelt sie 2 Größenpaare, welche indirect proportional sind, so rechnet man sie zur ungeraden oder indirecten Regel de tri.

Ob eine Regel de tri-Aufgabe zur directen oder indirecten Regel de tri gehört, erfährt man nur durch Beurtheilung der in jedem einzelnen Falle obwaltenden Verhältnisse.

Anmerkung. Uebung in dieser Beurtheilung ist sehr wichtig; daher gebe der Lehrer von vornherein Aufgaben der directen und indirecten Regel de tri untermischt.

§. 124.

Beispiele: 1) Wenn 6 Pferde mit dem vorhandenen Futtervorrathe 4 Tage reichen, wie lange wird man 16 Pferde damit füttern können?

Angabe: 6 Pferde reichen 4 Tage.
Frage: 16 „ „ ? „

Beurtheilung: So oft mal mehr Pferde es sind, ebenso oft mal weniger Tage wird das Futter reichen, oder: wenn man im Voraus überzeugt ist, daß man es mit proportionalen Größen zu thun hat, und nur noch ermitteln will, ob diese Größen direct oder indirect proportional sind, abgekürzt:

Je mehr Pferde, desto weniger Tage reicht das Futter, also ein indirectes Verhältniß, daher:

Ansatz und Ausrechnung:

16 Pferde : 6 Pferden = 4 Tage : x Tagen
1. u. 3. Gl. d. 4 gehob. 4 „ : 6 „ = 1 „ : x „
1. u. 2. Gl. d. 2 gehob. 2 „ : 3 „ = 1 „ : x „

$$x = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1^1/_2 \text{ Tag.}$$

oder kürzer:

$\not{16}$ Pferde : $\not{6}$ Pferde = $\not{4}$ Tage : x Tagen
$\not{4}$ 3 1
2

$$x = 1^1/_2 \text{ Tag.}$$

oder man leitet aus der obigen Proportion ohne Weiteres ab:

$$x = \frac{\overset{3}{\not{6}} \times 4}{\underset{\underset{2}{\not{4}}}{\not{16}}} = 1^1/_2 \text{ Tag.}$$

Letzteres Verfahren ist Denjenigen zu empfehlen, welche im Heben der Proportionen nicht ganz sicher sind.

2) Wenn 1 Ctr. Pulver 75 Mk. kostet, wie viel kosten dann $12^3/_4$ k.?

Angabe: 1 Ctr. kostet 75 Mk.

Frage: $12^3/_4$ k. „ ? „

Beurtheilung: Je weniger Pulver, desto weniger Geld, also ein directes Verhältniß und daher:

Ansatz und Ausrechnung:

1 Ctr. : $12^3/_4$ k. = ~~75~~ Mk. : x Mk.
~~50~~ $^{51}/_4$ 3
2 51

8 | 153 | 19,12 Mk.
73
10
20
4

Erläuterung: 1) Man mache das erste Verhältniß gleichnamig, verwandele also 1 Ctr. in k. oder $12^3/_4$ k. in einen Centnerbruch; hier ist das erstere geschehen. 2) Man verwandele die Glieder, welche gemischte Zahlen enthalten, in unechte Brüche, hier $12^3/_4$ k. in $^{51}/_4$ k. — 3) Man hebe soviel als möglich; hier das 1. und 3. Glied durch 25. — 4) Man berechne x nach §. 112.

Resultat: 19 Mk. 13 Pf. (Halbe Pfennige werden für voll gerechnet.)

Oder, nachdem man die Glieder des ersten Verhältnisses gleichnamig gemacht hat.

$$x = \frac{51 \times \overset{3}{\cancel{75}}}{4 \times \underset{2}{\cancel{50}}} = 19{,}125 \text{ Mk.} = 19 \text{ Mk. } 12^1/_2 \text{ Pf.}$$

3) Ist das dritte Glied eine mehrfach benannte Zahl, so ist es nicht nöthig, dasselbe auf eine Benennung zu bringen. Z. B.

Für 3 Hektoliter $7^1/_2$ Liter sind 5 Thlr. 20 sgr 6 ₰ bezahlt worden, wie viel kosteten 2 Hektoliter 25 Liter a) nach Thalerwährung, b) nach Mark und Pfg.?

Angabe: 3 Hltr. $7^1/_2$ Liter — 5 Thlr. 20 sgr 6 ₰

Frage: 2 „ 25 „ — ?

Beurtheilung: Je weniger Waare, desto weniger Geld, also ein directes Verhältniß und daher:

3 Hltr. $7^1/_2$ Ltr. : 2 Hltr. 25 Ltr. = 5 Thlr. 20 sgr 6 ₰ : x (30
$307^1/_2$ ~~225~~ 170 „ 15 „ — „
~~615~~ ~~123~~ 41 ~~45~~ 41) 4 Thlr. 4 sgr $9^3/_{41}$ ₰
2 15

Resultat: a. 4 Thlr. 4 sgr $9^3/_{41}$ ₰; auf ganze Pfennige abgerundet 4 Thlr. 4 sgr 9 ₰. b. 12 Mk. 48 Pf.

Erläuterung: Das 1. und 2. Glied sind auf eine Benennung gebracht, dann durch 5 und hierauf durch 3 gehoben. Alsdann ist das dritte Glied mit 15 × 2 = 30 multiplicirt (15 = 2. Glied, 2 = Nenner des 1sten) und endlich das erhaltene Resultat durch 41 (Zähler des 1. Gliedes) dividirt.

Anmerkung. Dem Mindergeübten wird noch folgender Anhalt willkommen sein:

1) Sind Angabe und Frage richtig untereinander gestellt, so verhält sich:

a. wenn die Beurtheilung ein directes Verhältniß ergiebt: das obere (erste) Glied zum unteren wie das andere obere Glied zum unteren.

b. wenn die Beurtheilung ein indirectes Verhältniß ergiebt: das untere (erste) Glied zum oberen, wie das andere obere Glied zum unteren.

Auch ist es praktisch, auf folgende einfache Regel zu achten:

Die Beurtheilung sagt uns bestimmt, ob die gesuchte Zahl x größer oder kleiner werden muß, als die ihr gleichnamige gegebene. Im ersteren Falle muß in der zu bildenden Proportion das erste Glied kleiner, im letzteren dagegen größer sein, als das zweite Glied.

§. 125.

Das Lösen der Regel de tri-Aufgaben ohne Proportionen.

Alle Aufgaben der einfachen Regel de tri lassen sich auch ohne Anwendung von Proportionen sicher und leicht durch einfache Verstandesschlüsse lösen. Die Anordnung hierbei kann und wird bei einem denkenden Rechner in verschiedenen Fällen verschieden sein.

Eine stets anzuwendende und dabei doch kurz zum Ziele führende Methode besteht darin, daß man von dem Vielfachen der Angabe auf die Einheit und von der Einheit auf das Vielfache der Frage schließt. Dabei führt man am zweckmäßigsten die erforderlichen Multiplicationen und Divisionen nicht gleich aus, sondern ordnet das Resultat in Form eines Bruches, hebt in diesem so viel als möglich und berechnet dann erst das Endresultat. Die Lösungen der nachstehenden Beispiele werden dies Verfahren am leichtesten klar machen.

1) Eine Arbeit würde von 12 Arbeitern in 15 Tagen vollendet werden; wie viel Arbeiter sind anzustellen, wenn sie in 9 Tagen beendet sein soll?

Lösung: Angabe: 15 Tage 12 Arb.
Frage: 9 „ ? „

Ausrechnung: $\frac{\cancel{12}^{4} \times \cancel{15}^{5}}{\cancel{9}_{\cancel{3}}} = 20$ Arbeiter.

Zu diesem Resultate gelangt man durch folgende Schlüsse:

12 Arbeiter sind erforderlich, wenn die Arbeit in 15 Tagen vollendet sein soll, folglich sind nöthig:

a. wenn die Arbeit in 1 Tage fertig sein soll, 15mal mehr $= 12 \times 15$

b. „ „ „ „ 9 Tagen „ „ „ 9 „ weniger $= \frac{12 \times 15}{9}$

2) Wie viel wird man für $7\frac{1}{2}$ Kilogramm bezahlen müssen, wenn $6\frac{3}{5}$ Kilogramm 6 Mk. 60 Pf. kosten?

Angabe: $6\frac{3}{5}$ k. 6 Mk. 60 Pf.
Frage: $7\frac{1}{2}$ „ ?

Ausrechnung: $\frac{\overset{10}{\cancel{\overset{20}{\cancel{660}}}} \times 5 \times 15}{\cancel{33} \times \cancel{2}} = 750$ Pf. $= 7$ Mk. 50 Pf.

Schlüsse: 6 Mk. 60 Pf. = 660 Pf. bezahlt man für $6\frac{3}{5}$ k. $= \frac{33}{5}$ k., folglich kostet:

$^1/_5$ k. 33mal weniger $= \frac{660}{33}$ Pf.

1 „ 5mal mehr $= \frac{660 \times 5}{33}$ Pf.

$^1/_2$ „ 2mal weniger $= \frac{660 \times 5}{33 \times 2}$ Pf.

$7^1/_2$ oder $^{15}/_2$ k. 15mal mehr $= \frac{660 \times 5 \times 15}{33 \times 2}$ Pf.

Anmerkung. Diese Methode Regeldetri-Aufgaben zu lösen ist sehr zu empfehlen; sie verdient in mancher Hinsicht den Vorzug vor dem Rechnen mit Proportionen. Letzteres artet leicht in ein gedankenloses, mechanisches Rechnen aus, während ersteres auch den Mindergeübten, wenn er nur die Grundrechnungsarten mit ganzen und gebrochenen Zahlen versteht, mit klarer Einsicht in das, was er thut, zum Ziele führt. Die nothwendigen Schlüsse sind nur anscheinend weitläufig; schon nach kurzer Uebung werden sie gewöhnlich schnell und sicher gemacht. Auch ist die Form der Darstellung für ein schnelles, praktisches Rechnen sehr günstig. Eine Unterscheidung der Aufgaben in directe und indirecte Regeldetri ist hierbei nicht nöthig. Ein geübter Rechner wird auch bald das besondere Niederschreiben der Angabe und Frage entbehren können.

B. Zusammengesetzte Regel de tri.

§. 126.

Mitunter ist das Verhältniß der gegebenen Zahl, aus welcher die gesuchte abgeleitet werden soll, zur gesuchten, nicht nur, wie bei der einfachen Regel de tri, von einem, sondern von mehreren gegebenen Verhältnissen abhängig, dann rechnet man die Aufgabe zur zusammengesetzten Regel de tri.

Beispiel: In wie viel Tagen werden 25 Arbeiter, welche täglich 8 Stunden arbeiten, einen Graben von 650ᵐ Länge ausheben können, wenn 20 Arbeiter bei täglich 10stündiger Arbeit einen eben solchen, aber 520ᵐ langen Graben in 12 Tagen vollendet haben?

Lösung: Um eine bequeme Uebersicht zu gewinnen, zerlegen wir uns zunächst wieder den Inhalt der Aufgabe in den gegebenen Fall (Angabe) und in den Fragefall (Frage). Die Größen des ersteren werden in eine Reihe neben einander geschrieben und dann die Größen des letzteren so darunter geordnet, daß überall gleichartige Größen unter einander stehen. Gewöhnlich richtet man es dabei noch so ein, daß das Frageglied die letzte Stelle einnimmt.

Wir sprechen hierzu in Gedanken:

Wenn 20 A. bei tägl. 10 St. Arb. e. Grab. v. 520ᵐ L. in 12 T. vollenden, so
werden 25 „ „ „ 8 „ „ „ 650ᵐ „ „ ? „ „

schreiben jedoch nur abgekürzt nieder:

Angabe:	20 Arb.	10 St.	520ᵐ	12 Tage.
Frage:	25 „	8 „	650 „	? „

Offenbar muß nun die gesuchte Zahl der Tage, welche wir einstweilen mit x bezeichnen wollen, aus der ihr gleichartigen bekannten Zahl 12 Tage hergeleitet werden. Es stehen 12 Tage zu x Tagen

in einem bestimmten Verhältniß. Dieses Verhältniß ist abhängig: 1) von dem Verhältniß der Arbeiterzahlen, 2) von dem Verhältniß der täglichen Arbeitsstunden, 3) von dem Verhältniß der Grabenlängen. Aber diese Verhältnisse brauchen nicht alle auf einmal berücksichtigt zu werden. Wir können zwischen Angabe und Frage so viel Zwischenfragen einschalten, daß immer nur eine Bedingung der Angabe in die gleichartige der Frage übergeht, alle anderen also unberücksichtigt bleiben können. Dann wird auch die bekannte Größe 12 Tage nach und nach in die gesuchte Größe x Tage übergehen. Zu diesem Zwecke denken wir uns:

Angabe:	20 Arb.	10 St.	520^m	12 Tage	
1. Zwischenfrage:	25 „	10 „	520^m	? „	(Nur die Arbeiterzahl ändert sich)
2. „	25 „	8 „	520^m	? „	(Nur die tägliche Arbeitszeit ändert sich)
Frage:	25 „	8 „	650^m	? „	(Nur die Grabenlänge ändert sich).

Die einzelnen Fragen können nun nach einander mit Hülfe der einfachen Regel de tri beantwortet werden, indem wir ansetzen:

a. Angabe: 20 Arb. 12 Tage
Frage: 25 „ ? „
} Beurtheilung: Je mehr Arbeiter, desto weniger Tage, ein indirectes Verhältniß, also, wenn die gesuchte Zahl y genannt wird,

I. 25 : 20 = 12 Tage : y Tage; y = $9^3/_5$.

b. Ang. 10 St. $9^3/_5$ (y) Tage
Frag. 8 „ ? „
} Beurtheilung: Je weniger Arbeitsstunden täglich, desto mehr Tage, ein indirectes Verhältniß, also, wenn die jetzt gesuchte Zahl mit z bezeichnet wird,

II. 8 : 10 = $9^3/_5$ (y) Tage : z Tagen; z = 12.

c. Angabe: 520^m 12 (z) Tage
Frage: 650^m ? „
} Beurtheilung: Je länger der Graben, desto mehr Tage, ein directes Verhältniß, mithin, wenn die nun gesuchte Zahl x genannt wird,

III. 520 : 650 = 12 (z) Tage : x Tage; x = 15 Tage.

In 15 Tagen wird also der in Frage stehende Graben vollendet sein können. Auf diese Weise läßt sich jede Aufgabe der zusammengesetzten Regel de tri in mehrere Aufgaben der einfachen auflösen. Es führt jedoch auch noch ein kürzerer Weg zum Ziele. Berechnen wir in obiger Lösung die Uebergangswerthe y ($9^3/_5$) und z (12) nicht wirklich, sondern setzen die 3 Proportionen:

$$\text{I.}\quad 25 : 20 = 12 : y$$
$$\text{II.}\quad 8 : 10 = y : z$$
$$\text{III.}\quad 520 : 650 = z : x$$

zusammen (§. 117.), so entsteht die neue Proportion:

$$25 \times 8 \times 520 : 20 \times 10 \times 650 = 12 \times y \times z : y \times z \times x,$$

in welcher das zweite Verhältniß durch y und z gehoben werden kann. Es fallen also y und z fort und x kann direct aus der Proportion:

$$25 \times 8 \times 520 : 20 \times 10 \times 650 = 12 : x$$ berechnet werden.

In der Praxis schreibt man aus diesem Grunde die unter a, b und c stehenden Angaben und Fragen nicht besonders nieder, führt die nöthigen Beurtheilungen gleich an der Hauptangabe und Frage aus und bildet aus den sich ergebenden Proportionen I., II. und III. gleich folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{array}{r} 25 : 20 \\ 8 : 10 \\ 520 : 650 \end{array}\right\} = 12 : x$$

Es verhält sich dann das Product aller ersten Glieder zum Product aller zweiten Glieder wie das dritte Glied zum vierten.

Deshalb darf auch jedes der ersten Glieder gegen jedes der zweiten und auch gegen das dritte Glied gehoben werden (§. 114.). Führt man dies Heben so viel als möglich aus, und berechnet dann x, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{r} {}_{\cancel{5}}\cancel{25} : \cancel{20}_{\cancel{4}} \\ {}_{\cancel{2}}\cancel{8} : \cancel{10}_{\cancel{2}} \\ {}_{\cancel{4}}\cancel{520} : \cancel{650}_{5} \end{array}\right\} = \overset{3}{\cancel{12}} : x$$

$$x = 15 \text{ Tage.}$$

Erläuterung: Es sind von den ersten und zweiten Gliedern zuerst 25 und 20 durch 5, dann 8 und 4 durch 4, hierauf 5 und 10 durch 5, ferner 2 gegen 2, ferner 520 und 650 durch 10 und 13 und endlich 4 im ersten Gliede und 12 im dritten durch 4 gehoben worden.

2) Sind in einem Ansatze für die zusammengesetzte Regel de tri einzelne Glieder Brüche (gemischte Zahlen verwandele man in unechte Brüche), so streiche man jeden Nenner durch und setze ihn, falls der Bruch ein inneres Glied ist, als Factor zu den ersten Gliedern und falls er ein äußeres Glied ist, als Factor zu den inneren Gliedern hin.

Der Grund dieses Verfahrens ist sogleich klar, wenn man an §. 75 denkt.

Beispiel: Zwei Weber A und B sind auf folgende Art beschäftigt:

A webt 6 Wochen, wöchentlich 5 Tage, täglich 11 Stunden
B „ 8 „ „ 6 „ „ $10\frac{1}{2}$ „

A fertigt $\frac{11}{6}$ Meter breites, B $\frac{7}{8}$ Meter breites Zeug. Wenn nun A 500 Meter liefert; wie viel sind von B zu erwarten?

Angabe: 6 Wochen 5 Tage 11 Stunden $\frac{11}{6}$ br. 500 Meter
Frage: 8 „ 6 „ $10\frac{1}{2}$ „ $\frac{7}{8}$ „ ? „

Beurtheilung:
Je mehr Woch. desto mehr Meter, direct
„ „ Tage „ „ „ „
„ weniger St. „ weniger „ „
„ schmaler d. Zeug, desto mehr „ indirect

Ansatz und Ausrechnung:

$$\left.\begin{array}{r} \cancel{6} : 8 \\ \cancel{5} : \cancel{6} \\ \cancel{11} : \cancel{21}/\cancel{2}\ \cancel{3} \\ \cancel{7}/\cancel{8} : \cancel{11}/\cancel{6} \\ \cancel{2}\ \cancel{6}\ \cancel{2} \quad \cancel{8}\ 2 \end{array}\right\} = \overset{100}{\cancel{500}} : x$$

$$x = 1600 \text{ Meter.}$$

Erläuterung: Nach dem Bilden des Ansatzes verfährt man wie folgt:

1) Man streiche im ersten Gliede den Nenner 8 und setze ihn als Factor ins zweite Glied.
2) Man streiche im zweiten Gliede die Nenner 2 und 6 und setze sie als Factoren ins erste Glied.
3) Man hebe 6 im ersten Gliede gegen 6 im zweiten Gliede, 5 im ersten Gliede gegen 500 im dritten Gliede; 11 im ersten Gliede gegen 11 im zweiten Gliede; 7 im ersten Gliede gegen 21 im zweiten; die entstandene 3 im zweiten Gliede gegen 6 im ersten Gliede, 2 und 2 im ersten Gliede gegen 8 im zweiten Gliede.

4) Man berechne das Product der stehengebliebenen mittleren Glieder $100 \times 8 \times 2 = 1600$ und dividire durch das Product aller Zahlen, welche im ersten Gliede stehen geblieben sind, hier 1.

Anmerkung. Schreibt man das zweite Verhältniß 500 : x umgekehrt über das erste und macht statt der Zeichen : einen Strich wie folgt:

x	500
6	8
5	6
11	$10\frac{1}{2}$
$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{6}$

so ergiebt sich offenbar x, wenn man das Product aller rechts stehenden Zahlen, durch das Product aller links stehenden Zahlen dividirt. Dies ist der Ansatz nach Rees oder der Reesischen Regel.

§. 127.

Die Berechnung der Aufgaben der zusammengesetzten Regel de tri ohne Proportionen.

Auch die Aufgaben der zusammengesetzten Regel de tri lassen sich ohne Proportionen sicher und schnell durch einfache Verstandes-Schlüsse lösen.

Beispiel: Wenn 20 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiten, in 4 Wochen einen Damm von 300 Meter Länge vollenden, in wie viel Wochen werden 16 Arbeiter, die täglich 12 Stunden an der Arbeit sind, mit einem Damm von 400 Meter fertig?

Angabe:	20 Arb.	8 St.	300 Meter lang	4 Wochen
Frage:	16 „	12 „	400 „ „	? „

Ausrechnung: $\frac{4 \times 400 \times 8 \times 20^{10}}{300 \times 12_{3} \times 16_{2}} = 4\frac{4}{9}$ Wochen.

Zu diesem Resultate gelangt man durch folgende Schlüsse: 4 Wochen sind erforderlich, wenn der Damm 300^{m} lang ist; bei 1^{m} Länge wären 300mal weniger $\left(= \frac{4}{300}\right)$ und bei 400^{m} Länge sind 400mal mehr $\left(= \frac{4 \times 400}{300}\right)$ Wochen nöthig. Soviel Wochen sind erforderlich, wenn täglich 8 Stunden lang gearbeitet wird, bei täglich 1stündiger Arbeit wären 8mal mehr $\left(= \frac{4 \times 400 \times 8}{300}\right)$ und bei täglich 12stündiger Arbeit sind 12mal weniger $\left(= \frac{4 \times 400 \times 8}{300 \times 12}\right)$ Wochen nöthig. Soviel Wochen sind erforderlich, wenn 20 Arbeiter thätig sind; 1 Arbeiter würde 20mal mehr $\left(= \frac{4 \times 400 \times 8 \times 20}{300 \times 12}\right)$ und 16 Arbeiter werden 16mal weniger $\left(= \frac{4 \times 400 \times 8 \times 20}{300 \times 12 \times 16}\right)$ Wochen gebrauchen.

Anmerkung. Ueber die Zweckmäßigkeit dieser Methode beim Lösen von Regeldetri-Aufgaben ist in der Anmerkung zu §. 125 bereits gesprochen worden.

Zweites Kapitel.

Procentrechnungen.

§. 128.

Der Ausdruck: „pro cent oder Procent“ ist aus der lateinischen Sprache entnommen und heißt ins Deutsche übersetzt: „für jedes Hundert oder vom Hundert.“ Er kommt in der Rechenkunst oft vor; denn es ist in vielen Fällen sehr bequem und gebräuchlich die Abhängigkeit einer Zahl von einer andern in Procenten der letzteren auszudrücken. Für „Procent“ benutzt man oft das Zeichen: %.

Beispiele: Bei einem Handelsunternehmen sind 25 % gewonnen, wenn auf je 100 Mark (oder Gulden, Silbergroschen ꝛc.) Auslage ein Gewinn von 25 Mark (Gulden, Silbergroschen ꝛc.) kommt. — Beim Läutern des Pechs gehen 18 % verloren, wenn 100 Kilogr. ungeläutertes Pech nach dem Reinigungsproceß 100 — 18 = 82 Kilogr. gereinigtes Pech liefern. Spiritus enthält 90 % Geist, wenn in 100 Theilen Spiritus 90 Theile reiner Alkohol enthalten sind (das übrige ist Wasser). Zur Lösung der Procentrechnungen sind keine besonderen Regeln nothwendig; sie führen stets auf eine Aufgabe der einfachen oder zusammengesetzten Regel de tri. Die am häufigsten vorkommenden Fälle sind folgende:

A. Die Zinsrechnung.

§. 129.

Die Geldentschädigung, welche für die Benutzung einer geliehenen Geldsumme (eines Kapitals) entrichtet wird, heißt Zins oder Interesse. Die Höhe der Zinsen wird gewöhnlich nach Procenten bestimmt. Ein Kapital zu p Procent (z. B. 5 Procent) leihen, heißt: für je 100 Mark des Kapitals sind alljährlich p Mark (5 Mark) Zinsen zu zahlen. Die wirkliche Auszahlung der Zinsen geschieht jedoch häufig auch in halbjährlichen oder vierteljährlichen Raten (Theilzahlungen). Auch sagt man bei eigener Benutzung eines Kapitals, es habe sich zu p % (z. B. 4 %) verzinset, wenn der erzielte Gewinn von jedem 100 Einheiten (z. B. Mark) des Kapitals p Einheiten (4 Mark) beträgt.

Sind die Zinsen in bestimmten Zeiträumen wirklich auszuzahlen, so heißt es, das Kapital bringt einfache Zinsen. Werden dagegen die Zinsen immer wieder zum Kapital hinzugelegt, mitverzinst und so das Kapital von Zeitraum zu Zeitraum größer, so sagt man, das Kapital stehe auf Zinseszinsen aus.

Zinseszinsen werden z. B. von Sparkassen gegeben, wenn der Sparer die Zinsen nicht abverlangt; ferner haben Rentenbanken, Lebensversicherungsgesellschaften ꝛc. nach den Gesetzen der Zinseszinsrechnung zu verfahren.

§. 130.

Beispiele: 1) Wie viel betragen die Zinsen von $712\frac{1}{2}$ Mk. zu 5 % in 1 Jahr?

Lösung: Angabe: 100 Mk. Kapital — 5 Mk. Zinsen
Frage: $712\frac{1}{2}$ „ „ — ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

Beurtheilung: Je mehr Kapital, desto mehr Zinsen, ein directes Verhältniß, also:

$$\overset{4\ 20\ 2}{\cancel{100}} : 712\frac{1}{2} = \cancel{5} : x$$

$\cancel{1425}$

```
8 |285|35,625 Mk.
   45
    50
     20
      40
       0
```

x = 35 Mk. 63 Pf.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\cancel{5} \times \overset{285}{\cancel{1425}}}{\cancel{100}_{\,4\ \cancel{20}} \times 2} = 35 \text{ Mk. } 63 \text{ Pf.}$$

Schlüsse: 5 Mk. Zinsen erhält man von 100 Mk. Kapital, also von 1 Mk. Kapital 100mal weniger ($^{5}/_{100}$) und von $712\frac{1}{2}$ Mk. Kapital $712\frac{1}{2} = {}^{1425}/_{2}$mal mehr.

2) Wie groß ist das Kapital, welches zu 4 % ausgeliehen in $3\frac{3}{4}$ Jahren $157\frac{1}{2}$ Mk. Zinsen gebracht hat?

Lösung: Angabe: 4 Mk. Zinsen 1 Jahr 100 Mk. Kapital
Frage: $157\frac{1}{2}$ „ „ $3\frac{3}{4}$ „ ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

Beurtheilung: Je mehr Zinsen, desto mehr Kapital, direct; je mehr Zeit, desto weniger Kapital, indirect.

$$\left.\begin{array}{l} 4 : 157\frac{1}{2} \\ 3\frac{3}{4} : 1 \end{array}\right\} = 100 : x$$

x = 1050 Mk.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\overset{50}{\cancel{100}} \times \cancel{4} \times \overset{21}{\cancel{315}}}{\cancel{15} \times \cancel{4} \times \cancel{2}} = 1050 \text{ Mk.}$$

Schlüsse: 100 Mk. Kapital sind erforderlich, um eine gewisse Summe Zinsen in 1 Jahr zu erhalten, also um diese Zinsen in $3\frac{3}{4}$ Jahren einzunehmen, $3\frac{3}{4} = {}^{15}/_{4}$mal weniger. So viel Kapital ist nöthig um 4 Mk. Zinsen zu erhalten, also um 1 Mk. Zinsen zu erhalten, 4mal weniger und um $157\frac{1}{2}$ Mk. Zinsen zu bekommen $157\frac{1}{2} = {}^{315}/_{2}$mal mehr.

3) Wie lange müssen 1100 Mk. zu 5 % auf Zinsen ausstehen um $137\frac{1}{2}$ Mk. Interessen zu bringen?

Lösung: Angabe: 100 Mk. Kapital 5 Mk. Zinsen 1 Jahr
Frage: 1100 „ „ $137\frac{1}{2}$ „ „ ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

Beurtheilung: Je mehr Kapital, desto weniger Zeit, indirect. Je mehr Zinsen, desto mehr Zeit, direct.

$$\left.\begin{array}{r} 1100 : 100 \\ 5 : 137^1/_2 \end{array}\right\} = 1 : x$$

$$x = 2^1/_2 \text{ Jahr.}$$

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{1 \times \overset{\overset{5}{\cancel{55}}}{\cancel{275}} \times \cancel{100}}{\cancel{5} \times 2 \times \cancel{1100}} = 2^1/_2 \text{ Jahre.}$$

Schlüsse: 1 Jahr muß das Kapital ausstehen um 5 Mk. Zinsen zu geben, sollte es nur 1 Mk. Zinsen bringen, so würde 5mal weniger und soll es $137^1/_2$ Mk. Zinsen bringen, so wird $137^1/_2 = {}^{275}/_2$mal mehr Zeit nöthig sein. So viel Zeit ist erforderlich, wenn das Kapital 100 Mk. beträgt, folglich wenn es 1 Mk. beträgt 100mal mehr und wenn es 1100 Mk. beträgt, 1100mal weniger.

4) 1400 Mk. Kapital beliefen sich nach 7 Jahren mit den Zinsen auf 1792 Mk.; wie hoch standen sie Procent verzinset?

Lösung: Die Zinsen betragen 1792 — 1400 = 392 Mk., also:

Angabe:	1400 Mk. Kapital	7 Jahr	392 Mk. Zinsen
Frage:	100 „ „	1 „	? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

Beurtheilung: Je weniger Kapital, desto weniger Zinsen, direct. Je weniger Jahre, desto weniger Zinsen, direct.

$$\left.\begin{array}{r} 1400 : 100 \\ 7 : 1 \end{array}\right\} = 392 : x$$

$$x = 4\,\%$$

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\overset{\cancel{56}\;4}{\cancel{392}} \times \cancel{100}}{\cancel{7} \times \cancel{1400}} = 4\,\%$$

Schlüsse: 392 Mk. Zinsen erhält man in 7 Jahren, also in 1 Jahre 7mal weniger. So viel Zinsen erhält man von 1400 Mk. Kapital, also von 1 Mk. 1400mal weniger und von 100 Mk. 100mal mehr.

5) In wie viel Monaten wird Jemand von 1200 Mk. zu 5 % eben so viel Zinsen einnehmen, als von 1800 Mk. zu 4 % in 6 Monaten?

Lösung: Angabe:	1800 Mk.	4 %	6 Monat
Frage:	1200 „	5 %	? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

Beurtheilung: Je weniger Kapital, desto mehr Zeit (indirect). Je mehr %, desto weniger Zeit (indirect).

$$\left.\begin{array}{r} 1200 : 1800 \\ 5 : 4 \end{array}\right\} = 6 : x$$

$$x = 7^1/_5 \text{ Monat.}$$

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\cancel{6} \times \overset{2}{\cancel{4}} \times 18}{5 \times \underset{2}{\cancel{12}}} = 7^1/_5 \text{ Monat.}$$

Schlüsse: 6 Monate sind nöthig, wenn das Kapital zu 4 % aussteht, folglich wenn es zu 1 % ausstünde, 4mal mehr und da es zu 5 % aussteht, 5mal weniger Zeit. So viel Zeit ist erforderlich, wenn das Kapital 18 Hundert Mark beträgt, folglich wenn es 1 Hundert betrüge 18mal mehr und da es 12 Hundert beträgt, 12mal weniger Zeit.

Anmerkung. Steht ein Kapital auf Zinseszinsen aus, so kann der Werth, den es nach einem bestimmten Zeitraum erreicht hat, durch wiederholte Anwendung der einfachen Zinsrechnung ermittelt werden. Dies Verfahren ist jedoch, sobald das Kapital längere Zeit auf Zinseszinsen aussteht, sehr mühsam; man hat deshalb für die Zinseszinsrechnung besondere Formeln (Rechenvorschriften) ermittelt. Die Herleitung derselben erfordert jedoch mehr Kenntnisse in der Arithmetik als hier vorangegangen sind und muß deshalb übergangen werden. In der Praxis benutzt man zur Berechnung der Zinseszinsen gewöhnlich Tabellen, welche angeben, zu welchem Werthe 1 Mark nach 1, 2, 3 u. s. w. Jahren bei 3, $3^1/_2$, 4, $4^1/_2$ u. s. w. Procent anwächst.

B. Discontorechnung.

§. 131.

Bezahlt man eine Schuld vor der Verfallzeit, d. h. früher als man dazu verpflichtet ist, so kann der Empfänger nicht die volle Summe verlangen, sondern nur den Betrag, welcher bis zur Verfallzeit auf Zinsen ausgeliehen, mit den Zinsen zusammen dem schuldigen Kapitale gleichkommt. Der Abzug, welcher hiernach vom Kapitale zu machen ist, wird gewöhnlich nach Procenten bestimmt, und heißt: Disconto.

Einige Beispiele werden am schnellsten zum Verständniß führen:

1) A erlangt durch Erbschaft ein Vermögen von 6600 Mark. Das Testament bestimmt jedoch, daß diese Summe von B erst nach Ablauf von zwei Jahren ausbezahlt zu werden braucht. A wünscht das Geld jetzt zu erhalten. B ist geneigt, diesem Wunsche zu willfahren, wenn A ihm den Verlust an Zinsen mit 5 % entschädigt. A willigt ein, wie viel ist zu zahlen?

Hier wird das Kapital mit 5 % Disconto gezahlt und man kann schließen:

Die Zinsen von 100 Mk. zu 5 % betragen in 2 Jahren $5 \times 2 = 10$ Mk.; also sind 100 Mk. jetzt so viel werth, als 110 Mk. nach 2 Jahren; daher:

Angabe: Für jede 110 Mk. des Kap. sind jetzt 100 Mk. zu zahlen.
Frage: „ 6600 „ „ „ „ „ ? „ „ „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

Beurtheilung: Je mehr später zu zahlen ist, desto mehr auch jetzt, ein directes Verhältniß, also

$$\cancel{110} : \overset{60}{\cancel{6600}} = 100 : x$$
$$x = 6000 \text{ Mk.}$$

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{100 \times \overset{60}{\cancel{6600}}}{\cancel{110}} = 6000 \text{ Mk.}$$

Schlüsse: 100 Mk. sind statt 110 Mk. zu zahlen, folglich sind statt 1 Mk. 110mal weniger $\left(=\frac{100}{110}\right)$ und statt 6600 Mk. 6600mal mehr $\left(=\frac{100 \times 6600}{110}\right)$ zu zahlen.

Anmerkung. 1) Jede Aufgabe der Disconto-Rechnung führt zu einer Aufgabe der **einfachen** Regel de tri. Um die Angabe zu erhalten, berechne

man die Zinsen von 100 Mk. für den Zeitraum der Vorausbezahlung, lege diese Zinsen zu 100 Mk. hinzu und sage: Statt dieser Summe sind 100 Mk. zu bezahlen. Man lasse sich nicht verleiten nach Art der zusammengesetzten Regel de tri zu verfahren. Wollte man z. B. bei obiger Aufgabe sagen:

Angabe: Statt 105 Mk. nach 1 Jahre zu zahlen, zahlt man jetzt 100 Mk.
Frage: " 6600 " " 2 " " " " " " ? "
und dann wie gewöhnlich weiter rechnen, so erhielte man $12571\frac{3}{7}$ Mk., also ein ganz falsches Resultat. Warum?

2) A kauft eine Wiese für $715\frac{1}{2}$ Mk. über $1\frac{1}{2}$ Jahr zahlbar. Nach 3 Monaten zahlt er mit 6 % Disconto; wie viel beträgt die Zahlung?

Lösung: Die Zahlung erfolgt $1\frac{1}{2}$ Jahr minus 3 Monate = $1\frac{1}{4}$ Jahr voraus. Die Zinsen von 100 Mk. zu 6 % betragen in $1\frac{1}{4}$ Jahr $6 \times 1\frac{1}{4} = 7\frac{1}{2}$ Mk., also

Angabe: Für jede $107\frac{1}{2}$ Mk. sind zu zahlen 100 Mk.
Frage: " $715\frac{1}{2}$ " " " " ? "

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

Beurtheilung: Je mehr später zu zahlen ist, desto mehr auch jetzt, also ein directes Verhältniß.

$$107\frac{1}{2} : 715\frac{1}{2} = \cancel{100}^{\,20} : x$$

$$\frac{\cancel{215}^{\,43}}{\cancel{2}} \quad \frac{1431}{\cancel{2}}$$

```
43|28·6 2 0|665,581 Mk.
  |25 8
    2 8·2
    2 5 8
      2 4·0
      2 1 5
        2 5·0
        2 1 5
          3 5·0
          3 4 4
              6·0
              4 3
              1 7
```

x = 665 Mk. 58 Pf.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\overset{20}{\cancel{100}} \times \cancel{2} \times 1431}{\underset{43}{\cancel{215}} \times \cancel{2}} = 665{,}581 \text{ Mk.}$$

= 665 Mk. 12 Pf.

Schlüsse: 100 Mk. sind zu zahlen für jede $107\frac{1}{2}$ Mk., folglich für 1 Mk. $107\frac{1}{2}$mal weniger und für $715\frac{1}{2}$ Mk. $715\frac{1}{2}$mal mehr.

II. Abweichend hiervon ist es im kaufmännischen Verkehr, der bequemeren Rechnung wegen, gebräuchlich, bei Wechseln den Disconto vom Hundert abzuziehen. 5 % Wechseldisconto heißt hiernach: Statt 100 Mk. Wechselsumme werden nur 95 Mk. ausgezahlt.

Beispiel: A kauft einen Wechsel von 2400 Mark über 3 Monate zahlbar mit $\frac{1}{2}$ % Disconto pro Monat, wie viel bezahlt er?

Lösung: Der Disconto für 100 Mk. in 3 Monaten beträgt $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ Mk., also

Angabe: Statt 100 Mk. $98\frac{1}{2}$ Mk.

Frage: „ 2400 „ ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

Beurtheilung: Je mehr später zu zahlen ist, desto mehr auch jetzt, direct, also:

$$\cancel{100} : 24\cancel{00} = 98\frac{1}{2} : x$$

```
   24
  ----
  404
 196
 ----
 2364 Mk.
```

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{197 \times \overset{12}{24\cancel{00}}}{\cancel{2} \times \cancel{100}} = 2364 \text{ Mk.}$$

Schlüsse: $98\frac{1}{2}$ Mk. = $\frac{197}{2}$ Mk. sind zu zahlen für 100 Mk.; also für 1 Mk. 100mal weniger und für 2400 Mk. 2400mal mehr.

C. Rabattrechnung.

§. 132.

Unter Rabatt versteht man bei dem Kaufe einer größeren Menge von Waare, entweder

a. einen Erlaß an Geld (Rabatt in oder von Hundert); oder

b. eine Zulage an Waare (Rabatt auf Hundert).

Bei p % Rabatt in oder vom Hundert zahlt man für jede 100 Mk. der Kaufsumme nur 100 — p Mk. Bei p % Rabatt auf Hundert erhält man für 100 + p Mk. Waare und zahlt dafür nur 100 Mk. Rabatt vom Hundert wird von dem verkaufenden Fabrikanten oder Kaufmann en gros (im Großen) gewöhnlich dann bewilligt, wenn der Käufer gleich baar bezahlt und nicht Credit, d. h. Aufschub der Zahlungsverpflichtung auf $\frac{1}{4}$ Jahr oder $\frac{1}{2}$ Jahr u. s. w. verlangt. Der Rabatt auf Hundert ist dagegen bei einigen Waaren gebräuchlich, um dadurch zum Ankauf größerer Mengen einzuladen.

Beispiele: 1) A kauft für 1525 Mk. Leder. Er bezahlt gleich baar und darf deshalb 8 % Rabatt vom Hundert abziehen, wie viel ist zu zahlen?

Lösung: Angabe: Statt 100 Mk. zahlt man 92 Mk.

Frage: „ 1525 „ „ „ ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

$$100 : 1525 = 92 : x$$

```
     92
   ----
   3050
 13725
 -------
 1403,00
```

Resultat: 1403 Mk.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\overset{23}{\cancel{92}} \times \overset{\overset{61}{\cancel{305}}}{\cancel{1525}}}{\cancel{100}_{\cancel{20}\ \cancel{4}}} = 1403 \text{ Mk.}$$

Schlüsse: 92 Mk. zahlt man statt 100 Mk., folglich statt 1 Mk. 100mal weniger und statt 1525 Mk. 1525mal mehr.

2) Von einem Fabrikanten, welcher an Wiederverkäufer 10 % Rabatt auf Hundert bewilligt, kauft A eine Quantität Waare, welche nach dem Preiscourante (Preisverzeichnisse) 385 Mk. kostet, wie viel hat er zu bezahlen?

Lösung: Angabe: Statt 110 Mk. — 100 Mk.
Frage: „ 385 „ ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

~~110~~ : ~~385~~ = 10~~0~~ : x

$$x = 350 \text{ Mk.}$$ (35)

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{10\not{0} \times \not{385}^{35}}{\not{110}} = 350 \text{ Mk.}$$

Schlüsse: 100 Mk. werden bezahlt statt 110 Mk., folglich statt 1 Mk. 110mal weniger und statt 385 Mk. 385mal mehr.

D. Procentrechnungen verschiedener Art.

Tara, Agio u. s. w.

§. 133.

I. Das Gewicht einer Waare mit Einschluß der Emballage (des Verpackungsmaterials, als: Fässer, Packleinewand u. s. w.) wird das „Brutto-Gewicht", ohne Emballage das „Netto-Gewicht", das Gewicht der Emballage die „Tara" oder das „Tara-Gewicht" genannt. Die Tara wird häufig in Procenten des Bruttogewichts angegeben.

Beispiel: Eine Waare zahlt pro Centner 5 Mk. Eingangszoll. Wenn nun die eingeführte Waare 48 Ctr. 50 ℔ Bruttogewicht hat, die Tara aber mit 18 % in Rechnung gestellt wird, wie viel Steuer ist zu zahlen?

Lösung: a. Berechnung des Nettogewichts:
Angabe: 100 ℔ Brutto 82 ℔ Netto
Frage: 48 Ctr. 50 ℔ „ ?

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

~~100~~ ℔ : 48 Ctr. 50 ℔ = ~~82~~ ℔ : x
(2) (41)

$$x = \frac{97 \times 41}{100} \text{ (aus } \tfrac{4850}{100}\text{)}$$

97 × 41
97
38 8
39,77

Resultat: 39 Ctr. 77 ℔.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\not{82}^{41} \times \not{4850}^{97}}{\not{100}_{2}} = 3977 \text{ ℔} = 39 \text{ C. } 77 \text{ ℔}$$

Schlüsse: 82 ℔ Netto sind zu rechnen auf 100 ℔ Brutto, folglich auf 1 ℔ Brutto 100mal weniger und auf 4850 ℔ Brutto 4850mal mehr.

b. Berechnung der Steuer.

1 Ctr. kostet 5 Mk.
folglich: 39 Ctr. 77 ℔ oder 39,77 Ctr. 39,77 × 5 Mk.
= 198,85 Mk. = 198 Mk. 85 Pf.

II. Wird eine Summe Geldes in eine andere Geldsorte umgewechselt, so muß man nicht selten „mehr geben" oder man „erhält mehr" als nach dem Nennwerthe der Münzen gefordert werden kann. Dieser Mehrbetrag heißt Agio. Das Agio wird nach Procenten angegeben und richtet sich theils nach dem inneren Werthe der Münzsorten, theils nach dem augenblicklichen Begehr derselben.

Beispiel: Jemand braucht 250 Mk. in Kassenanweisungen. Er kann solche beim Banquier (Geldwechsler) nur gegen Zahlung von $^2/_3$ % Agio erhalten; wieviel Courant ist zu zahlen?

Lösung: Angabe: 100 Mk. Kassenanweisungen = $100^2/_3$ Mk. Cour.
Frage: 250 „ „ = ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

$\overset{}{\underset{2}{\cancel{100}}} : \underset{5}{\cancel{250}} = 100^2/_3 : x$

2) $50^1/_3$

$251^2/_3$ Mk. (5

x = 251 Mk. 67 Pf.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\overset{151}{\cancel{302}} \times \overset{5}{\cancel{250}}}{3 \times \underset{2}{\cancel{100}}} = \frac{755}{3} = 251^2/_3 \text{ M.}$$

Schlüsse: $100^2/_3$ = $^{302}/_3$ Mk. Court. zahlt man für 100 Mk. Kassenanweisungen, folglich für 1 Mk. Kassenanweisungen 100mal weniger und für 250 Mk. Kassenanweisungen 250mal mehr.

III. Gewinn oder Verlust, welche sich bei einem Unternehmen herausstellen, auch die Menge eines Bestandtheiles in einer Mischung, das Verhältniß der treffenden Geschosse zu den verfeuerten ꝛc. werden häufig in Procenten angegeben.

Beispiel: 1) Aus 350 ℔ Kornpulver hat man $333^1/_2$ ℔ Mehlpulver erhalten; wie viel Procent beträgt der Verlust?

Lösung: Angabe: 350 ℔ Kornpulver $16^1/_2$ ℔ Verlust
Frage: 100 „ „ ? „ „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

$\underset{7}{\cancel{350}} : \underset{2}{\cancel{100}} = 16^1/_2 : x$

33 (2

7) $4^5/_7$

x = $4^5/_7$ %.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{33 \times \overset{2}{\cancel{100}}}{\cancel{2} \times \underset{7}{\cancel{350}}} = 4^5/_7 \text{ \%}$$

Schlüsse: $16^1/_2$ ℔ beträgt der Verlust bei 350 ℔, folglich bei 1 ℔ 350mal weniger und bei 100 ℔ 100mal mehr.

2) Wie viel Schlagröhren gehören zu 1820 Schuß, wenn 20 % Vorrath gegeben werden?

1. Lösung: Angabe: 100 Sch. 120 Sch.
Frage: 1820 „ ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

$$100 : 1820 = 120 : x$$

12

2184

$x = 2184$ Schlagröhren.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{120 \times 1820}{100} = 2184 \text{ Schlagröhren.}$$

Schlüsse: 120 Schlagröhren sind für 100 Schuß erforderlich, folglich für 1 Schuß 100mal weniger und für 1820 Schuß 1820mal mehr.

2. Lösung: 20 Schlagröhren Vorrath erhalte ich auf je 1 Hundert, also auf 18 Hundert $18 \times 20 = 360$. Ferner: Bekomme ich auf 100 Schlagröhren 20 zum Vorrath, so giebt es auf je 10 Schlagröhren 2, mithin auf 20 Schlagröhren 4 und folglich im Ganzen $360 + 4 = 364$ Schlagröhren zum Vorrath. In Summe sind also zu empfangen $1820 + 364 = 2184$ Stück. Oder:

Bei 10 % würde der Vorrath 182,0 Schlagröhren betragen, also beträgt er bei 20 % $2 \times 182{,}0 = 364$. In Summa sind mithin $1820 + 364 = 2184$ Schlagröhren zu empfangen.

Um den Vorrath an Schlagröhren zu erhalten, braucht man also von der Schußzahl nur eine Decimalstelle abzuschneiden und den erhaltenen Decimalbruch mit 2 zu multipliciren.

3) Wieviel Procent Treffer sind erzielt worden, wenn von 65 verfeuerten Geschossen 52 das Ziel getroffen haben?

Lösung: Angabe: 65 Schuß — 52 Treffer

Frage: 100 „ ? „

Ausrechnung:

a. mit Hülfe der Proportionslehre.

$$65 : 100 = 52 : x$$

13 20 4

$x = 80$ %.

b. nach Schlüssen auf die Einheit.

$$\frac{\overset{4}{52} \times \overset{20}{100}}{\underset{13}{65}} = 80 \text{ \% Treffer.}$$

Schlüsse: 52 Treffer kommen auf 65 Schuß, folglich auf 1 Schuß 65mal weniger und auf 100 Schuß 100mal mehr.

Drittes Kapitel.

Kettenrechnung.

§. 134.

1) Soll der Werth einer benannten Zahl in den Werth einer anderen benannten Zahl verwandelt werden, so kann dies mitunter nicht direct (unmittelbar, mit Hülfe eines Regeldetri-Ansatzes) geschehen, sondern es führen erst mehrere Zwischenverwandelungen nach und nach zum Ziele. In diesem Falle kann das Resultat stets durch wiederholte Anwendung der einfachen Regeldetri gefunden werden, es lassen sich aber auch die einfachen Regeldetri-Ansätze in einen einzigen Ansatz zusammenziehen.

Beispiel: Wieviel rheinische Gulden betragen 45 Stück Friedrichsd'or, wenn 20 Friedrichsd'or gleich 336 Mk., 1 Mk. gleich 35 Kreuzer und ein Gulden gleich 60 Kreuzer gerechnet werden?

Lösung: Ordnet man die Bedingungen der Aufgabe übersichtlich und zusammenhängend so untereinander, daß immer die Größen mit gleichem Werthe sich gerade und die mit gleicher Benennung sich schräg gegenüberstehen, so erhält man folgenden

Ansatz: I. ? rh. G.	= 45 Frd.	Dieser Ansatz wird gebildet, indem man spricht: Wieviel rh. Gulden sind gleich 45 Frd., wenn 20 Frd. gleich 336 Mk., 1 Mk. gleich 35 Krz. und 60 Krz. gleich 1 rh. Gulden.
20 Frdr.	= 336 Mk.	
1 Mk.	= 35 Krz.	
60 Krz.	= 1 rh. G.	

Das Resultat ergiebt sich nun, wenn man die 45 Frd. zunächst in Mk., diese in Krz. und zuletzt die erhaltenen Krz. in rh. Gulden verwandelt. Man kann hierzu schließen:

a. Um die 45 Frd. in Mk. zu verwandeln:

Ang.: 20 Frd. = 336 Mk.
Frg.: 45 „ = ? } also: aa. **20** Frd. : **45** Frd. = **336** Mk. : **m** Mk.

b. Um die erhaltenen m Mk. in Krz. zu verwandeln:

Ang.: 1 Mk. = 35 Krz.
Frg.: m Mk. = ? } also: bb. **1** Mk. : **m** Mk. = **35** Krz. : **n** Krz.

c. Um die erhaltenen n Kreuzer in rh. Gulden zu verwandeln:

Ang.: 60 Krz. = 1 rh. G.
Frg.: n „ = ? „ } also cc. **60** Krz. : **n** Krz. = **1** rh. G. : **x** rh. G.

Der Werth von x wird also gefunden, indem man aus Proportion aa. den Werth von m, dann aus Proportion bb den Werth von n und endlich aus Proportion cc den Werth von x wirklich berechnet. Man kann aber auch die 3 Proportionen aa, bb und cc zusammensetzen; dann ergiebt sich:

$$20 \times 1 \times 60 : 45 \times m \times n = 336 \times 35 \times 1 : m \times n \times x,$$

oder, wenn man die Hinterglieder durch $m \times n$ hebt:

$$20 \times 1 \times 60 : 45 = 336 \times 35 \times 1 : x, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{45 \times 336 \times 35 \times 1}{20 \times 1 \times 60}.$$

Vergleicht man diesen Werth von x mit dem Ansatze I., so übersieht man leicht, daß sich dasselbe Resultat sogleich aus diesem Ansatze ergiebt, wenn man mit dem Product aller Zahlen der ersten Verticalreihe in das Product aller Zahlen der zweiten dividirt. Diese Beobachtung hat dahin geführt, bei Aufgaben dieser Art in der Praxis die Aufstellung der Proportionen fortzulassen und ohne Weiteres nach Bildung des Ansatzes auf die eben angegebene Art das Resultat zu berechnen. Man sagt dann, die Aufgabe werde nach der Kettenregel oder dem Kettenansatze gelöst.

2) Das praktische Verfahren beim Lösen einer Aufgabe nach dem Kettensatze ist in folgender Regel enthalten:

a. Bildung des Ansatzes: Man beginnt mit der Frage:

(in obigem Beispiele: ? rh. Gulden = 45 Frd.) und setze dann — dabei immer im Zusammenhange sprechend — die Angaben so darunter, daß man stets links mit derselben Benennung beginnt, mit welcher man rechts geschlossen hat. Der Ansatz ist beendet, wenn die letzte Benennung rechts mit der ersten Benennung links übereinstimmt. — Kommt man zuletzt nicht auf dieselbe Benennung, mit welcher man die Frage begann oder kann man nicht stets links mit derselben Benennung beginnen, mit welcher rechts geschlossen worden ist, so fehlen eine oder mehrere Angaben und der Ansatz (die Kette) ist unbrauchbar.

b. Ausrechnung: Ist dieser Ansatz gebildet, so hebt man so viel als möglich rechts und links durch die gemeinschaftlichen Factoren, indem man das Product aller rechts stehenden Zahlen als den Zähler und das Product aller links stehenden Zahlen als den Nenner eines Bruches betrachtet. — Kommen Brüche oder gemischte Zahlen vor, so werden, nachdem die gemischten Zahlen in unechte Brüche verwandelt worden sind, die Nenner durchstrichen, und in die andere Verticalreihe gesetzt. Der Grund dieses Verfahrens folgt aus §. 76 und §. 77. Zuletzt wird mit dem Product aller rechts stehen gebliebenen Zahlen in das Product aller links stehen gebliebenen Zahlen dividirt; der Quotient ist die gesuchte Zahl.

Die Ausrechnung des obigen Exempels nimmt hiernach folgende Gestalt an:

	? rh. G.	=	~~45~~ Frd.	~~9~~ 3
4	~~20~~ Frd.	=	~~336~~ Mk.	~~84~~ 21
	1 Mk.	=	~~35~~ Krz.	7
~~4~~ ~~20~~	~~60~~ Krz.	=	1 rh. G.	

x = 441 rh. G.

oder auch

	? rh. G.	~~45~~ Frd.	~~9~~ 3
	4 ~~20~~	~~336~~ Mk.	~~84~~ 21
	1	~~35~~ Krz.	7
4 ~~20~~	~~60~~	1 rh. G.	

x = 441 rh. G.

§. 135.

Auch an sich ungleichartige Größen können oft in gewisser Hinsicht ihrem Werthe nach als gleich erachtet und dann in einen Kettensatz eingeflochten werden.

Beispiel: 1) A in Köln erhielt aus England Ellenwaaren, nach Kölner Elle gemessen 480 Ellen. In London betrug der Preis von jedem Yard $1\frac{1}{4}$ Schilling. Wie hoch kam ihm eine Kölnische Elle in preußischem Gelde zu stehen, wenn die Kosten 25 % betragen?

(3 Yard = 4 brab. Ellen; 5 brab. Ellen = 6 Köln. Ellen; 1 ℔ Sterling = 20 Schilling; 1 ℔ Sterl. = 21 Mk. in Köln.)

Lösung:	? Mk.	1 Köln. E.	
2	~~6~~	~~5~~ Brab. E.	
	4	~~3~~ Yard	
	1	~~$1\frac{1}{4}$~~ Sch.	5
4	~~20~~	21 Mk.	
4	~~100~~	~~125~~ Mk.	5
	4		

x = 1,025 Mk. = 1 Mk. 3 Pf.

Beim Bilden des Ansatzes spricht man in Gedanken: ? Mk. kostet 1 Köln. Elle, wenn 6 Köln. Ellen = 5 brab. Ellen, 4 brab. Ellen = 3 Yard, 1 Yard $1\frac{1}{4}$ Schill. kostet, 20 Schill. = 21 Mk.; und auf je 100 Mk. im Einkauf wegen der Kosten 125 Mk. beim Verkauf zu rechnen sind.

Erläuterung: Die Zahl $1^1/_4$ rechts ist in $^5/_4$ verwandelt, davon jedoch rechts nur der Zähler 5, der Nenner dagegen links unten hingeschrieben worden.

§. 136.

Die Kettenregel steht bei vielen Rechnern, besonders den Kaufleuten, in großem Ansehen. Sie darf jedoch nur mit Vorsicht angewendet werden; denn mitunter läßt sich eine Kette ganz fließend und anscheinend richtig bilden und die Ausrechnung liefert dennoch ein ganz falsches Resultat. Z. B. 4 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 10 Tagen; wie viel Arbeiter sind nöthig, um mit dieser Arbeit in 20 Tagen fertig zu werden?

Wollte man in diesem Falle den Ketten-Ansatz bilden,

? Arbeiter	20 Tag.
10 Tag.	4 Arb.

indem man spräche: Wie viel Arbeiter sind nöthig, um in 20 Tagen eine Arbeit zu vollenden, wenn in 10 Tagen 4 Arbeiter damit zu Stande kommen? so erhielte man $x = 8$, also offenbar ein unrichtiges Resultat. Die Anwendung richtiger Schlüsse ergiebt $x = 2$ Arbeiter. — Dies hat seinen Grund darin, daß das Verhältniß zwischen Arbeiterzahl und Arbeitstagen ein indirectes ist. Hat man es nur mit directen Verhältnissen zu thun (wie dies bei fast allen kaufmännischen Rechnungen der Fall ist), und läßt sich eine vollständige Kette bilden, so findet man mit Hülfe derselben das Resultat allerdings schnell und bequem. Alle Aufgaben der einfachen geraden Regel de tri, der Rabatt-, Disconto-, Gewinn- und Verlustrechnung ꝛc. lassen sich mit Hülfe des Kettenansatzes bequem lösen.

Beispiel: 1) Eine Menageverwaltung kauft $52^1/_2$ Scheffel Erbsen, den Scheffel zu 10 Mk. 80 Pf.; wieviel ist dafür zu zahlen?

Ansatz und Ausrechnung:

? Mk.	~~52½~~ Sch. 105
1	~~10,80~~ Mk.
~~2~~	5,4

$x = 567$ Mk.

Erläuterung: a. Beim Bilden der Kette spricht man: ? Mk. bezahlt man für $52^1/_2$ Sch. wenn 1 Sch. 10,80 Mk. kostet? b. $52^1/_2$ ist in $^{105}/_2$ verwandelt worden; von diesem Bruche ist jedoch nur der Zähler rechts stehen geblieben; der Nenner 2 ist in die linke Reihe gesetzt worden.

2) Die Oekonomieverwaltung eines Regiments kauft für 1130 Mk. Leder. Es werden ihr 13 Procent Rabatt vom Hundert bewilligt; wie viel ist baar zu zahlen?

Ansatz und Ausrechnung:

? Mk.	113~~0~~ Mk.
10~~0~~	87 Mk.

113 × 87
791
904
983,1 Mk.

$x = 983$ Mk. 10 Pf.

Erläuterung: Beim Bilden des Ansatzes spricht man: ? Mk. sind statt 1130 Mk. zu zahlen, wenn statt 100 Mk. nur 87 Mk. (100 — 13 Mk.) zu zahlen sind?

Viertes Kapitel.

Gesellschafts- oder Theilungsrechnung.

§. 137.

Zur Gesellschafts- oder Theilungsrechnung (auch Repartitionsrechnung genannt) gehören alle Aufgaben, welche fordern, daß eine Zahl (ein Ganzes) nach gegebenen Bedingungen getheilt werden soll. Gewöhnlich ist es vorgeschrieben, in welchem Verhältniß die Theile zu einander stehen sollen. Ist dieses Verhältniß als ein einfaches gegeben, so rechnet man die Aufgabe zur „einfachen Theilungsrechnung“, muß es dagegen erst durch Zusammensetzen zweier oder mehrerer Verhältnisse gebildet werden, so gehört die Aufgabe zur „zusammengesetzten Theilungsrechnung“.

A. Einfache Theilungsrechnung.

§. 138.

1. Beispiel: Drei Personen A, B und C gewinnen in der Lotterie 300 Mk. auf ein Loos, zu dessen Ankauf A 5, B 9 und C 10 Mk. gegeben hat; wie viel hat jede der drei Personen vom Gewinn zu fordern?

Lösung: Der Gewinn ist so zu vertheilen, daß sich die Gewinnantheile verhalten wie die Auslagen beim Ankaufe des Looses. Hat Jemand 2, 3, 4 . . mal so viel Geld beim Ankauf des Looses gegeben als ein Anderer, so hat er auch 2, 3, 4 . . mal so viel vom Gewinn zu fordern als dieser. Die Auslagen von A, B und C verhalten sich wie 5 : 9 : 10, also kann vom Gewinn A so oft 5 Antheile, als B 9 und C 10 fordern. A, B und C haben hiernach zusammen $5 + 9 + 10 = 24$ Antheile. Auf diese 24 Antheile kommt ein Gewinn von 300 Mk., folglich kommt auf 1 Antheil ein Gewinn von $^{300}/_{24} = 12\frac{1}{2}$ Mk.

A hat den Gewinn für 5 Antheile, also $5 \times 12\frac{1}{2} = 62\frac{1}{2}$ Mk.
B „ „ „ „ 9 „ „ $9 \times 12\frac{1}{2} = 112\frac{1}{2}$ „ und
C „ „ „ „ 10 „ „ $10 \times 12\frac{1}{2} = 125$ „ zu
fordern.

Aus diesen Schlüssen ist leicht die Anordnung abzuleiten, welche man der Lösung beim praktischen Rechnen gewöhnlich giebt:

A 5	A $12\frac{1}{2} \times 5 =$	$62\frac{1}{2}$ Mk.
B 9	B $12\frac{1}{2} \times 9 =$	$112\frac{1}{2}$ „
C 10	C $12\frac{1}{2} \times 10 =$	125 „
24 | 3·0 0 | $12\frac{1}{2}$ Mk.		Summa 300 Mk.

```
24|3·0 0|
  |2 4  |
  ------
    6·0
    4 8|
   ----|12
    1 2|1
   ----|--
    2 4|2
```

Anmerkung: Man kann die Aufgaben der Theilungsrechnung auch durch wiederholte Anwendung der einfachen Regel de tri lösen. In obigem Beispiele entständen dann zu der Angabe: Auf $(5 + 9 + 10) = 24$ Antheile kommt ein Gewinn von 300 Mk., die Fragen: 1) Auf 5 Antheile kommt wie viel Gewinn? 2) Auf 9 Antheile kommt wie viel Gewinn? 3) Auf 10 Antheile kommt wie viel Gewinn? Die oben angegebene Lösungsart ist aber einfacher und bequemer.

2) Man wird leicht übersehen, daß die Schlüsse, welche in vorstehender Lösung zum Ziele führten, unabhängig von den zufälligen Zahlen des obigen Beispiels sind und in jedem Falle der einfachen Theilungsrechnung ihrem Sinne nach wiederholt werden können. Ganz allgemein kann man schließen:

Ist eine Zahl, die wir A nennen wollen, in mehrere Theile zu theilen, welche sich zu einander verhalten sollen wie $a : b : c$ u. s. w., so kommt auf $(a + b + c + \ldots)$ Antheile die Zahl A zur Vertheilung, folglich kommen auf 1 Antheil $\frac{A}{a+b+c\ldots}$ und daher auf a Antheile $\left(\frac{A}{a + b + c\ldots}\right) \cdot a$, auf b Antheile $\left(\frac{A}{a + b + c\ldots}\right) \cdot b$ und auf c Antheile $\left(\frac{A}{a + b + c\ldots}\right) \cdot c$ u. s. w. Einheiten der Zahl A.

Hieraus ergiebt sich die praktische Regel: Man dividire mit der Summe der Verhältnißzahlen $(a + b + c\ldots)$ in die zu theilende Zahl (A) und multiplicire den erhaltenen Quotienten der Reihe nach mit den Verhältnißzahlen $(a, b, c\ldots)$ um die entsprechenden Antheile zu erhalten.

§. 139.

1) Haben alle Verhältnißzahlen einen gemeinschaftlichen Theiler, so bleibt ihr Verhältniß zu einander unverändert, wenn man sie sämmtlich durch diesen Theiler dividirt. Dies thut man gern, um mit kleineren Zahlen rechnen zu können (§. 108. 2.).

2) Kommen in den Verhältnißzahlen Brüche vor, so wird es gewöhnlich vortheilhaft sein, diese dadurch zu beseitigen, daß man alle Verhältnißzahlen mit dem Generalnenner sämmtlicher Nenner multiplicirt (§. 108. 2.).

Beispiel 1.: Beim Anfertigen von Leuchtkugeln nimmt man auf 26 ℔ Salpeter 20 ℔ Schwefel und 2 ℔ Mehlpulver; wie viel von jedem dieser Bestandtheile ist nöthig um 120 ℔ Leuchtkugelsatz mischen zu können?

Ansatz und Ausrechnung.

Salp.	~~26~~ 13	Anmerkung: Die Verhältnißzahlen sind durch 2 gehoben.
Schw.	~~20~~ 10	
Mehlp.	~~2~~ 1	

24 | 120 | 5
   120
   0

Salp.	13	× 5	=	65 ℔
Schw.	10	× 5	=	50 ℔
Mehlp.	1	× 5	=	5 ℔
			Summa	120 ℔

oder auch noch kürzer: Salp. ~~26~~ 13 × 5 = 65 ℔
Schw. ~~20~~ 10 × 5 = 50 ℔
Mehlp. ~~2~~ 1 × 5 = 5 ℔

24 | 120 | 5 — 120 ℔
| 120 |
0

Beispiel 2.: Wie viel Salpeter, Schwefel und Mehlpulver ist nöthig um 45 Kilogramm Warmgeschmolzenzeug anfertigen zu können, wenn auf 22 Theile Salpeter 22 Theile Schwefel und $3^3/_4$ Theile Mehlpulver zu nehmen sind?

Ansatz und Ausrechnung.

Salp. ~~22~~ 88 × $\frac{45}{191}$ = 20 k. 733 gr.
Schw. ~~22~~ 88 × $\frac{45}{191}$ = 20 „ 733 „
Mehlp. ~~$3^3/_4$~~ 15 × $\frac{45}{191}$ = 3 „ 534 „
} auf gr. abgerundet.

191 | 45 | $\frac{45}{191}$ — 45 k. 000 gr.

§. 140.

Probe: Um zu prüfen ob richtig gerechnet worden ist, ermittele man nach der Rechnung die Summe aller Antheile. Diese Summe muß mit der zu theilenden Zahl übereinstimmen. Hierdurch erfährt man jedoch nur, ob die zu theilende Zahl wirklich vertheilt, nicht aber, ob sie auch richtig vertheilt worden ist. Man unterlasse deshalb nie, außerdem auch den Ansatz nochmals einer Prüfung zu unterziehen. In allen vorstehenden Beispielen ist diese Probe angewendet worden.

§. 141.

Lösung der Theilungsrechnung mittelst einer laufenden Proportion.

Aufgabe: Eine Zahl A in n (z. B. 4) Theile zu theilen, welche sich verhalten wie a : b : c : d . . .

Lösung: Werden die gesuchten Theile mit x, y, z und v bezeichnet, so soll sich verhalten:

$x : y : z : v = a : b : c : d$; also ist auch (§. 118.)

$x + y + z + v : a + b + c + d = x : a = y : b = z : c = v : d$

oder, da $x + y + z + v = A$ sein muß,

1) $A : a + b + c + d = x : a$; 2) $A : a + b + c + d = y : b$

3) $A : a + b + c + d = z : c$; 4) $A : a + b + c + d = v : d$,

folglich 1) $x = \frac{A}{a + b + c + d} \cdot a$; 2) $y = \frac{A}{a + b + c + d} \cdot b$

3) $z = \frac{A}{a + b + c + d} \cdot c$; 4) $v = \frac{A}{a + b + c + d} \cdot d$.

Diese Resultate stimmen mit den im §. 138 ermittelten überein.

B. Zusammengesetzte Theilungsrechnung.

§. 142.

Alle Aufgaben der zusammengesetzten Theilungsrechnung können auf die einfache Theilungsrechnung zurückgeführt werden. Die hierzu

nöthigen Verstandesschlüsse sind meist einfach, lassen sich jedoch nicht immer nach derselben Regel ausführen.

Beispiel: Zum Bau eines Festungswerkes schickt das Dorf A 20 Mann 14 Tage, das Dorf B 28 Mann $12^1/_2$ Tage, das Dorf C 24 Mann 15 Tage. Es wurden nachher 300 Mk. als Entschädigung gezahlt. Wieviel erhielt jedes Dorf?

Lösung: Man schließe:

Es arbeiten 20 Mann in 14 Tagen so viel als 20 × 14 Mann in 1 Tag.
" " 28 " " $12^1/_2$ " " " " 28 × $12^1/_2$ " " "
" " 24 " " 15 " " " " 24 × 15 " " "

Die Entschädigung ist nach Verhältniß der Leistungen zu vertheilen, also:

Ansatz und Ausrechnung:

A. $\overset{4}{\cancel{20}} \times 14 \times 2 = 28$	A. $3^1/_{33} \times 28 = 84^{28}/_{33}$ Mk.
B. $\overset{7}{\cancel{28}} \times \cancel{12^1/_2}\ \cancel{25}\ 5 = 35$	B. $3^1/_{33} \times 35 = 106^2/_{33}$ "
C. $\overset{6}{\cancel{24}} \times \underset{3}{\cancel{15}} \times 2 = 36$	C. $3^1/_{33} \times 36 = 109^3/_{33}$ "
99	Summa = 300 Mk.

```
99|30·0|3
  |29 7|
  -----  3
      3| 1
     --|--
     99|33
```

Erläuterung: Die Verhältnißzahlen sind: 20 × 14, 28 × $12^1/_2$, 24 × 15. — Sie sind sämmtlich a. mit 2 multiplicirt um den Bruch $12^1/_2$ fortzubringen, b. durch 5 gehoben, c. durch 4 gehoben. Hierbei ist zu beachten, daß ein Product mit einer Zahl multiplicirt oder dividirt wird, wenn man nur *einen* Factor multiplicirt oder dividirt.

Anmerkung. Mit Hülfe der Proportionslehre könnte man auch schließen: Die Ansprüche auf Entschädigung verhalten sich

a. in Hinsicht auf die Arbeiterzahl wie 20 : 28 : 24
b. " " " Arbeitszeit " 14 : $12^1/_2$: 15
folglich im Ganzen wie: 20 × 14 : 28 × $12^1/_2$: 24 × 15 u. s. w.

Fünftes Kapitel.

Mischungsrechnung.

§. 143.

Die **Mischungs-** oder **Alligationsrechnung** umfaßt alle Rechenaufgaben, welche bei dem Zusammenschmelzen (Legiren) verschiedener Metalle, dem Vermischen von Flüssigkeiten, dem Mengen von Waaren 2c. entstehen. Viele derselben lassen sich unmittelbar mit Hülfe der Theilungsrechnung lösen (§. 139. Beisp. 1.).

Eine besondere Beachtung verdienen vorzugsweise zwei Fälle:

§. 144.

1. **Fall:** Menge und Werth der Bestandtheile sind gegeben, der Werth eines bestimmten Theiles der Mischung wird gesucht.

Beispiel: Man mengt 3 Sorten Hafer: 4 Hektoliter à 6 Mk.

60 Pf., 5 Hektoliter à 8 Mk. 50 Pf. und 2 Hektoliter à 9 Mk.; wie viel kostet ein Hektoliter der Mischung?

Lösung:	4 Hltr.	à 6 Mk. 60 Pf.	kosten	2640 Pf.
	5 „	à 8 „ 50 „	„	4250 „
	2 „	à 9 „ — „	„	1800 „
also	11 Hltr.	des Gemenges		8690 Pf.
folglich	1 „	„ „		790 „
				= 7 Mk. 90 Pf.

§. 145.

2. Fall: Aus zwei Stoffen von verschiedenem und bekanntem Werthe soll eine Mischung von einem mittleren Werthe hergestellt werden; in welchem Verhältnisse hat man zu mischen?

1. Beispiel: Jemand hat 2 Sorten Taback, wovon das Kilogramm der ersteren 240, das der letzteren 290 Pf. kostet. Er will daraus eine Mischung bereiten, von welcher er das Kilogramm für 260 Pf. verkaufen kann; wie viel von jeder Sorte muß er zu 60 Kilogramm der Mischung nehmen?

1) Lösung: Ein Kilogramm der geringeren Sorte kostet 20 Pf. weniger als 1 k. der Mischung, also kostet $^1/_{20}$ k. dieser Sorte 1 Pf. weniger als die gleiche Menge der Mischung. Ein k. der besseren Sorte kostet 30 Pf. mehr als 1 k. der Mischung, mithin $^1/_{30}$ k. dieser Sorte 1 Pf. mehr als die gleiche Menge der Mischung. Damit sich das Weniger und das Mehr ausgleicht, muß man also von der geringeren Sorte so oft $^1/_{20}$ k. nehmen, als von der besseren $^1/_{30}$ k, d. h. die beiden Sorten müssen in dem Verhältniß von $^1/_{20} : {}^1/_{30}$ gemischt werden. Um dies Verhältniß in ganzen Zahlen auszudrücken, multiplicirt man beide Glieder mit dem Generalnenner 60; es ergiebt sich dann das Verhältniß $(30 : 20) = 3 : 2$. Wie weiter zu verfahren ist, lehrt die Theilungsrechnung: Auf $3 + 2 = 5$ Theile kommen 60 k., mithin auf 1 Theil 12 k., folglich auf 3 Theile 36 und auf 2 Theile 24 k. Also sind von der geringeren Sorte 36 k und von der besseren 24 k. zu nehmen.

Probe:	36 k.	à 240 Pf.	kosten	8640 Pf.
	24 „	à 290 „	„	6960 „
also	60 k	der Mischung		15600 Pf.
folglich	1 „	„ „		260 „

2. Lösung: Die Mischung soll kosten: 60×260 Pf. $= 15600$ Pf.
60 k der geringeren Sorte kosten: 60×240 „ $= 14400$ „
also weniger: 1200 Pf.

Tauschte nun der Kaufmann 1 k. der geringeren Sorte gegen 1 k. der besseren um, so würde der Preis der 60 k. um $290 - 240 = 50$ Pf. erhöht. Der Preis darf um 1200 Pf. steigen, folglich kann der Kaufmann so viel k. der geringeren Sorte gegen eben so viel k. der besseren umtauschen, als 50 Pf. in 1200 Pf. enthalten sind, also 24 k. Er hat demnach zu mischen: 24 k. der besseren und $60 - 24 = 36$ k. der geringeren Sorte.

Ganz ähnlich kann man schließen, wenn man zunächst 60 k. der besseren Sorte genommen denkt und dann ermittelt, wie viel k. dieser Sorte gegen geringere Sorte umgetauscht werden müssen, um den Preis auf 15600 Pf. zu ermäßigen.

Anmerkung. Am einfachsten werden die Aufgaben der Mischungsrechnung mit Hülfe der Lehre von den Gleichungen gelöst; doch läßt sich für vorstehende Gattung auch eine allgemeine Formel finden.

Aufgabe: Von einem Stoffe A hat eine gewisse Menge den Werth (Preis, Gehalt) a, von einem anderen B den Werth b. In welchem Verhältniß müssen beide Stoffe vermischt werden, damit dieselbe Menge der Mischung den Mittelwerth m erhalte?

Lösung: Angenommen es müssen x Gemäßeinheiten der ersteren und y der letzteren Sorte genommen werden, so hätten

diese x Einheiten den Werth von ax
" y " " " " by

also (x + y) Einheiten der Mischung den Werth ax + by.

(x + y) Einheiten der Mischung sollen den Werth von m (x + y) haben, also muß sein

$$m (x + y) = ax + by$$
$$mx + my = ax + by$$
$$mx - ax = by - my$$
$$(m - a) x = (b - m) y.$$

Aus dieser Producten-Gleichung ergiebt sich nun (§. 111. 2) die Proportion:

$$x : y = b - m : m - a,$$

In der Praxis kann man zum Auffinden dieses Verhältnisses folgendes Schema anwenden:

Werth der geringeren Sorte a . . . b — m Verhältnißzahl für die geringere Sorte
" " Mittelsorte....... m
" " besseren Sorte b . . . m — a Verhähltnißzahl der besseren Sorte.

2. Beispiel: Man hat 12 Liter 90procentigen Spiritus und will daraus Branntwein von 40 % bereiten, wie viel Wasser ist hinzuzugießen?

Lösung: Die Rechnung kann wie vorher geführt werden, wenn man Wasser als einen Mischungsbestandtheil ansieht, der 0 % Weingeist enthält. Es ergiebt sich dann, daß Spiritus und Wasser in dem Verhältnisse von 4 : 5 zu mischen sind. Kommen aber auf 4 Mischungstheile 12 Liter, so sind auf 1 Theil 3 und auf 5 Theile 15 Liter zu rechnen; mithin müssen 15 Liter Wasser zugesetzt werden.

Probe: Nach der Mischung sind in 12 + 15 = 27 Liter, 0,90 × 12 = 10,8 Liter Weingeist enthalten, also kommen auf 1 Liter 10,8 : 27 = 0,40 Liter Weingeist. Dies ist 40 % Branntwein.

§. 146.

Hauptsächlich findet die Mischungsrechnung Anwendung bei dem Legiren (Zusammenschmelzen) der Metalle. Die Rechenaufgaben, welche hierbei entstehen, erfordern keine eigenthümlichen Schlüsse, wohl aber die Kenntniß einiger besonderen Begriffe.

Gold und Silber werden nicht in reinem Zustande verarbeitet, sondern gewöhnlich mit Kupfer, Gold zuweilen auch mit Silber oder mit Silber und Kupfer legirt. Ebenso erhält Zinn fast immer einen Zusatz von Blei.

Das Mischungsverhältniß des legirten Goldes und Silbers giebt man seit der Einführung des neuen deutschen Münzvertrages (1857) nach Tausendtheilen, für die Rechnung am einfachsten nach Procenten an:

Es enthält hiernach:	Gold oder Silber	Kupfer
99 procentiges (%) Gold od. Silber	99 Gewichtstheile	1 Gewichtstheil
98 " " " "	98 "	2 "
	u. s. w.	

Unsere Markstücke, so wie die neueren Thalerstücke sind z. B. aus 90 procentigem Silber geprägt.

Vor diesem Münzvertrage war die Kölnische Mark die Grundlage des Gold- und Silbergewichtes. Sie wurde zum Abwägen des Silbers in 16 Loth und zum Abwägen des Goldes in 24 Karat eingetheilt. Man nennt hiernach das Silber

15 löthig, wenn in 1 Mark 15 Loth reines Silber u. 1 Loth Kupfer
14 " " " " 14 " " " " 2 " "
13 " " " " 13 " " " " 3 " "
u. s. w. enthalten sind.

Gold heißt

23 karatig, wenn in 1 Mark 23 Karat reines Gold u. 1 Karat Kupfer
22 " " " " 22 " " " " 2 " "
u. s. w. sich befinden.

Unsere älteren Thalerstücke sind z. B. 12 löthig, unsere Friedrichsdor $21^2/_3$ karatig.

Aufgabe: Aus 14- und 8 löthigem Silber soll 12 löthiges gemischt werden, in welchem Verhältniß hat dies zu geschehen?

Lösung: 1 Mark des 14 löthigen Silbers ist um 2 Loth besser als 1 Mark der Mittelsorte, also $^1/_2$ Mark um 1 Loth. — 1 Mark des 8 löth. Silbers ist um 4 Loth geringer als 1 Mark der Mittelsorte, also $^1/_4$ Mark um 1 Loth. Nehme ich also auf je $^1/_2$ Mark der besseren Sorte $^1/_4$ Mark der geringeren, so gleicht sich das Mehr und Weniger so aus, daß 12 löthiges Silber entsteht. Ich muß also in dem Verhältniß von $^1/_2 : ^1/_4 = 4 : 2 = 2 : 1$ mischen.

Anmerkung. Soll aus drei Bestandtheilen eine Mittelsorte gemischt werden, will man z. B. aus 90, 80 und 52 procentigem Silber 60 procentiges mischen, so könnte man zuerst das 90 und 80 procentige Silber in unzählig verschiedenen Verhältnissen zusammenmischen und unzählige Sorten von einem Mittelgehalt herausbringen, alsdann aus jeder dieser Mittelsorten und der letzteren zu 52 Procent die verlangte Legirung von 60 Procent Silber herstellen.

Eine solche Aufgabe gehört also zu den unbestimmten Aufgaben. Diese Unbestimmtheit wächst, wenn zur Mischung einer Mittelsorte 4, 5 u. s. w. Bestandtheile gegeben sind.

Siebenter Abschnitt.

Potenzen, Wurzeln und Wurzelausziehen.

I. Potenzen.

§. 147.

Ein Product aus lauter gleichen Factoren wird häufig abgekürzt geschrieben, indem man nur einen der gleichen Factoren und rechts oben von ihm die Anzahl derselben hinschreibt.

Z. B. Statt $6 \times 6 \times 6$ schreibt man kürzer 6^3.

„ $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ schreibt man kürzer a^5.

Allgemein bezeichnet hiernach a^b ein Product aus b Factoren, wovon jeder $= a$ ist, also: $a \cdot a \cdot a \ldots a$ (bmal als Factor).

Durch diese Schreibweise entsteht eine neue Zahlform: a^b. Sie wird Potenz genannt und gelesen: a hoch b oder a zur b^{ten} Potenz. Dabei heißt a die Grundzahl, der Grundfactor, oder die Basis und b der Exponent der Potenz. Insbesondere wird a^2 auch das Quadrat und a^3 der Kubus von a genannt.

§. 148.

Potenzgesetze:

1) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

d. h. Ein Product wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man jeden Factor mit der Zahl potenzirt und die erhaltenen Potenzen multiplicirt.

Beweis: Aus dem Begriff der Potenz folgt:

$$(a \cdot b)^n = ab \times ab \times \ldots ab \text{ (nmal als Factor).}$$

Nun werden Producte multiplicirt, wenn man die Factoren in beliebiger Reihenfolge multiplicirt, also ist auch:

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot a \cdot a .. \text{ nmal}) \times (b \cdot b \cdot b \ldots \text{nmal}) = a^n \cdot b^n.$$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

d. h. Ein Bruch wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man Zähler und Nenner desselben mit der Zahl potenzirt.

Beweis: Es ist nach der Bedeutung der Potenz:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} \text{ (nmal als Factor)}$$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \ldots a \text{ (nmal)}}{b \cdot b \cdot b \ldots b \text{ (nmal)}} \text{ (nach §. 76. 2.)}$$

$$= \frac{a^n}{b^n} \text{ (nach der Bedeutung der Potenz).}$$

§. 149.

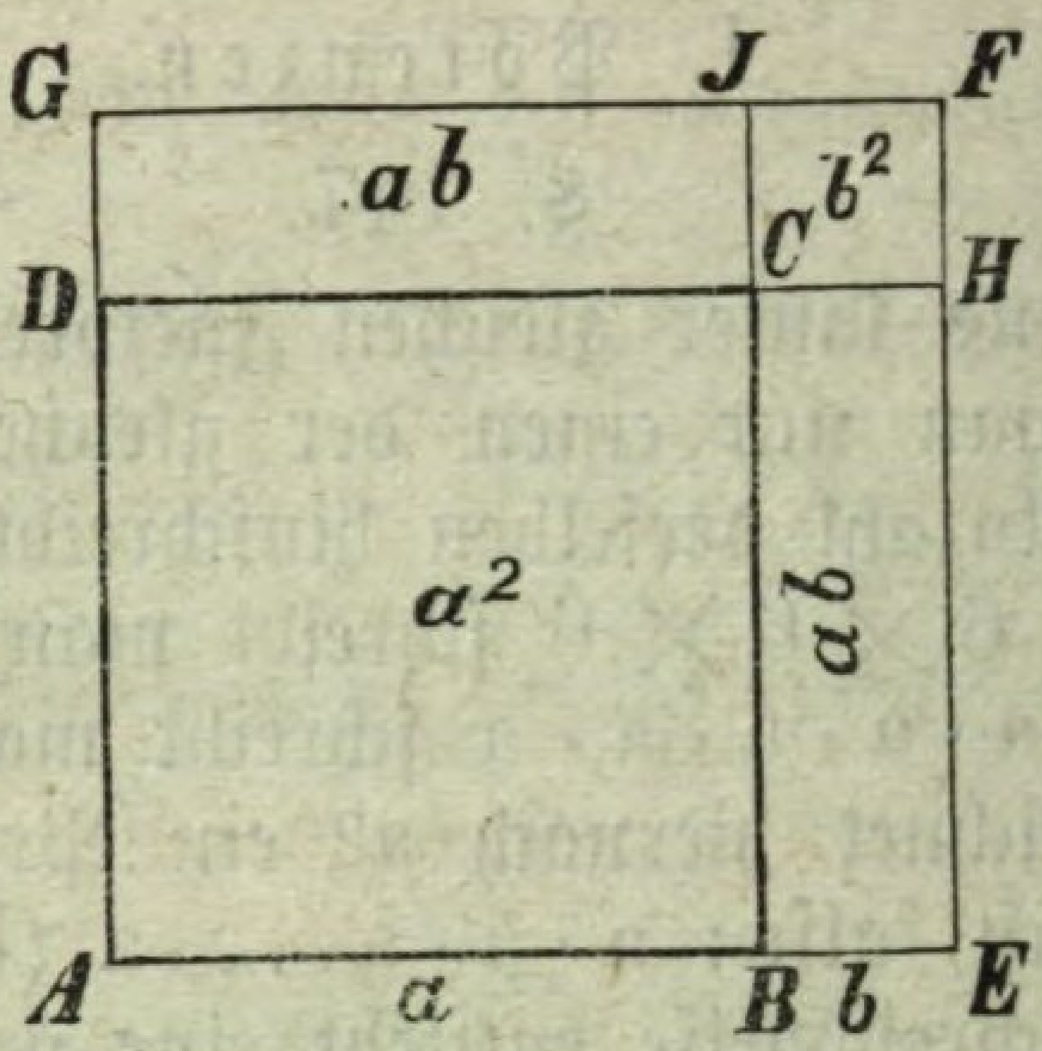
Wird die Summe zweier beliebigen Zahlen a und b auf dem gewöhnlichen Wege zuerst mit sich selbst und dann dreimal mit sich selbst multiplicirt, so erhält man folgende wichtigen Formeln:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

d. h. das Quadrat einer zweigliedrigen Summe ist gleich dem Quadrate des ersten Gliedes plus dem doppelten Producte beider Glieder plus dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Ausrechnung:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$



Diese wichtige Formel kann man sich auch leicht durch eine Zeichnung veranschaulichen. Verlängert man die Seite a eines Quadrates um b Einheiten, so besteht das über a + b gezeichnete Quadrat, wie nebenstehende Figur zeigt, aus folgenden Theilen: 1) aus a^2, 2) aus 2 Rechtecken, deren Seiten a und b und deren Inhalt daher = ab ist, 3) aus b^2.

Ausrechnung:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \\ \qquad a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{array}$$

2) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

d. h. Der Kubus einer zweigliedrigen Summe ist gleich dem Kubus des ersten Gliedes, plus dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes mal dem zweiten Gliede, plus dem dreifachen ersten Gliede mal dem Quadrate des zweiten Gliedes, plus dem Kubus des zweiten Gliedes.

II. Wurzeln.

§. 150.

Aus einer gegebenen Zahl a die nte Wurzel ziehen, heißt: eine neue Zahl ermitteln, welche mit n potenzirt die Zahl a hervorbringt. Die Forderung, daß aus a die nte Wurzel gezogen werden soll, wird durch die Verbindung $\sqrt[n]{a}$ (gelesen: nte Wurzel aus a) ausgedrückt. Dabei heißt a „Radikand“, n „Wurzelexponent“ und das Zeichen: „$\sqrt{}$“ ein Wurzelzeichen. Es ist also z. B. $\sqrt[2]{16} = 4$, denn $4^2 = 16$; $\sqrt[3]{27} = 3$ denn $3^3 = 27$.

Insbesondere wird die 2te Wurzel auch „Quadratwurzel“, die dritte „Kubikwurzel“ genannt.

Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man gewöhnlich abgekürzt: $\sqrt{a}$.

§. 151.

Wurzelgesetze.

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

d. h. Wird eine Wurzel mit ihrem Wurzelexponenten potenzirt, so erhält man den Radikanden.

Beweis folgt unmittelbar aus dem Begriff der Wurzel.

2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

d. h. Aus einem Producte wird eine Wurzel gezogen (gefunden), wenn man sie aus jedem Factor zieht und die erhaltenen Wurzeln multiplicirt.

Beweis: Aus dem Begriffe der Wurzel folgt, daß obiges Gesetz richtig ist, wenn $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b$ ist. Dies ist der Fall, denn $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n$ nach §. 148. 1.

$= a \cdot b$ nach §. 151. 1.

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

d. h. Aus einem Bruche wird eine Wurzel gezogen, wenn man sie sowohl aus dem Zähler, als auch aus dem Nenner zieht und erstere Wurzel durch letztere dividirt.

Beweis: Aus dem Begriffe einer Wurzel folgt, daß obiges Gesetz richtig ist, wenn $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$ ist. Dies ist der Fall, denn: $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}$ (nach §. 148.2.) $= \frac{a}{b}$ (nach §. 151. 1.)

III. Wurzelausziehen aus dekadischen Zahlen.

A. Ausziehen der Quadratwurzeln.

§. 152.

Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel ziehen, heißt (nach §. 150) eine neue Zahl ermitteln, welche mit sich selbst multiplicirt die erstere Zahl hervorbringt. Z. B. $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{144} = 12$.

§. 153.

1) Berechnet man von jeder Zahl der natürlichen Zahlenreihe das Quadrat, so erhält man eine neue Reihe von Zahlen, welche Quadratzahlen genannt werden. Der Anfang dieser Reihe ist:

$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8^2 \quad 9^2 \quad 10^2 \ldots\ldots$

$= 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100 \ldots\ldots$

2) Nur aus Quadratzahlen kann die Quadratwurzel genau gefunden werden; z. B. $\sqrt{36} = 6$. — Die Quadratwurzel aus jeder anderen Zahl liegt zwischen 2 ganzen Zahlen, z. B. $\sqrt{75}$ liegt zwischen 8 und 9, weil $8^2 = 64$, also zu klein und $9^2 = 81$, also zu

groß ist. — Eine solche Wurzel kann aber auch durch keine gebrochene Zahl genau ausgedrückt werden, weil das Quadrat jeder gebrochenen Zahl wieder eine gebrochene Zahl ist; wohl aber kann man sich (wie weiter unten gezeigt werden wird), dem Werthe einer solchen Wurzel bis auf jeden verlangten Grad der Genauigkeit nähern.

3) Wurzeln, deren Werth genau gefunden werden kann, werden **rational**, die anderen **irrational** genannt.

Z. B. $\sqrt{49}$ ist rational; $\sqrt{5}$ ist irrational.

§. 154.

Betrachtet man die beiden zusammengehörigen Zahlenreihen

$$\begin{array}{llllll} 1^2 & 10^2 & 100^2 & 1000^2 & 10000^2 & \text{u. s. w.} \\ = 1 & 100 & 10000 & 1000000 & 100000000 & \text{u. s. w.} \end{array}$$

so findet man leicht:

Die Quadratwurzeln aller Zahlen zwischen 1 und 100, d. h. aller 1- und 2zifferigen Zahlen müssen zwischen 1 und 10 liegen, also einzifferig sein.

Die Quadratwurzeln aller Zahlen zwischen 100 und 10000, d. h. aller 3- und 4zifferigen Zahlen müssen zwischen 10 und 100 liegen, also zweizifferig sein u. s. w.

§. 155.

1) Die Quadratwurzeln aus 1- und 2zifferigen Zahlen findet man leicht mit Hülfe des Einmaleins, genau oder doch annähernd.

Z. B. $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{78}$ liegt zwischen 8 und 9.

2) Die Quadratwurzel aus einer 3- oder 4zifferigen Quadratzahl, z. B. $\sqrt{4096}$ ist, wie gezeigt worden, zweizifferig. Bezeichnen wir einstweilen die Zehner derselben mit a und die Einer mit b, so ist die Wurzel $= a \cdot 10 + b$. a und b müssen also so bestimmt werden, daß: $(a \cdot 10 + b)^2 = 4096$ ist. Dies geschieht in der Praxis nach folgendem Schema, zu welchem nachstehende Schlüsse führen:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{40|96} = \overset{a\cdot 10}{6}\ \ \overset{+\,b}{4} \\ a^2 \cdot 100 = & 36 \\ 2a \cdot 10 = & 12|496 \\ 2ab \cdot 10 + b^2 = & 496 \\ & 0 \end{array}$$

Da nach §. 149. 1: $(a \cdot 10 + b)^2 = a^2 \cdot 100 + 2ab \cdot 10 + b^2$ ist, so haben wir a so groß zu wählen, daß a^2 mit den Hunderten (40) des Radikanden entweder genau übereinstimmt oder die nächst kleinere Quadratzahl ist. — In der Praxis schneidet man aus diesem Grunde die Hunderter, also, von rechts nach links gezählt, zwei Ziffern, durch einen Verticalstrich ab. — Hier ist demnach für a die Zahl 6 zu wählen. Ziehen wir nun $6^2 = 36$ von 40 ab, dann muß der Rest 4 (Hunderter), im Verein mit den Zehnern und Einern, also 496 noch $2ab \cdot 10 + b^2$ enthalten und zwar ist 2ab in den Zehnern und b^2 in den Einern des Restes zu suchen.

Um hierauf b zu bestimmen, berechnen wir $2a = 12$ und dividiren damit in die Zehner des Restes (d. h. in den Rest mit Ausschluß der letzten Ziffer), also in 49 hinein. Dies giebt für b die Zahl 4. Die Zahl 4 ist richtig gewählt, wenn nun $2ab \cdot 10 + b^2 = 496$ ist. Zur Prüfung berechnen wir daher $2ab \cdot 10 + b^2$. Dies geschieht am vortheilhaftesten, wenn wir zuerst $b^2 = 16$ bestimmen, dann die Einer 6 unter die Einer des Restes schreiben und die Zehner im Sinne behalten, hierauf b mit 2a multipliciren = 48, die im Sinne behaltenen Zehner (hier 1 Zehner) hinzurechnen (giebt 49) und endlich diese Summe unter die Zehner des Restes schreiben. Stimmt dann das berechnete $2ab \cdot 10 + b^2 = 496$, wie hier, mit dem Reste 496 überein, so sind a und b richtig gewählt. Sollte dagegen $2ab \cdot 10 + b^2$ größer als der Rest werden, so ist b zu groß genommen, wir müssen in diesem Falle für b die nächst kleinere Zahl nehmen und $2ab \cdot 10 + b^2$ für dieses b von neuem berechnen u. s. w. bis $2ab \cdot 10 + b^2$ mit dem Reste übereinstimmt. In obigem Beispiele findet der erstere Fall statt, also ist 64 die genaue Quadratwurzel der Zahl 4096.

3) Ist die Quadratwurzel aus einer 3- oder 4zifferigen Zahl zu ziehen, welche keine Quadratzahl ist, dann erhält man durch Anwendung des vorstehenden Verfahrens eine ganze Zahl, welche zwar kleiner als der genaue Werth der Wurzel, aber von der letzteren um weniger als 1 verschieden ist. — Zwischen der gefundenen Zahl und der um 1 größeren Zahl muß der genaue Werth der Wurzel liegen.

Z. B. $\sqrt{2|28} = 15$
1
2|1 28
|1 25
3

In diesem Beispiele bleibt ein Rest (3), welcher zum Quadrat der gefundenen Wurzel (15) addirt werden muß, um den Radikanden (228) zu erhalten. Es muß also:

$15^2 + 3 = 228$ sein.

§. 156.

Die Quadratwurzel aus einer 5- oder 6zifferigen Quadratzahl, z. B. $\sqrt{61009}$ ist 3zifferig (§. 154.). Sie kann jedoch ebenfalls durch $a \cdot 10 + b$ ausgedrückt werden, sobald wir unter a eine zweizifferige Zahl verstehen. Soll letztere gefunden werden, so schneiden wir daher wieder, von rechts nach links zählend, zwei Ziffern durch einen Verticalstrich ab ($\sqrt{610|09}$), denken uns einstweilen diese beiden (in nebenstehendem Beispiele fett gedruckten) Ziffern fort und ermitteln nach §. 155 aus der links stehenden 3- oder 4zifferigen Zahl (610) die genaue oder nächst kleinere Quadratwurzel a (24). Der sich etwa

$\sqrt{6|1\,0|}$**09** $= 24$
4
4|21·0
|17 6
3 4

ergebende Rest (34) ist zugleich der Rest, welcher bleiben würde, wenn wir $a^2 = 24^2 = 576$ auf einmal (statt nach und nach) subtrahirten. Deshalb ziehen wir nun 09 in den Rest herunter und rechnen nach §. 155 weiter. Die Rechnung zerfällt sonach in zwei Theile, wovon

```
             a + b
√6|10|09 = 247
 4
4|21·0
  176
48|3409
   3409
      0
```

in nebenstehendem Beispiele der zweite Theil mit fetten Ziffern bezeichnet ist.

§. 157.

Ist die Quadratwurzel aus einer 7- oder 8zifferigen Quadratzahl zu ziehen, z. B. $\sqrt{68492176}$, so schneide man von der gegebenen Zahl 2 Ziffern zur Rechten ab, suche zu der links stehenden Zahl (684921) nach §. 156 die Wurzel, betrachte diese als a und rechne dann nach §. 155 weiter.

```
√68|49|21|76 = 8276
 64
16|449
   324
164|12521
    11529
1654|99276
     99276
         0
```

Die Rechnung zerfällt daher in 3 Theile, wovon in nebenstehendem Beispiele der zweite Theil mit fetten, der dritte Theil mit halbfetten Ziffern bezeichnet ist.

§. 158.

1) Aus dem Vorstehenden ist leicht das Verfahren abzuleiten, nach welchem man die Quadratwurzel auch einer 9- oder mehrzifferigen Quadratzahl genau finden und wie man bestimmen kann, zwischen welchen beiden ganzen Zahlen die Quadratwurzel aus jeder unvollkommenen Quadratzahl liegen muß. Die allgemeine praktische Regel ist folgende (siehe nebenstehendes Beispiel):

```
√2|36|14|46|89 = 15367
 1
2|136
  125
30|1114
    909
306|20546
    18396
3072|215089
     215089
          0
```

1) Theile die gegebene Zahl, von rechts nach links zählend, in Abtheilungen von je zwei Ziffern. (Nur die am weitesten links stehende Abtheilung darf einzifferig sein.) Die Wurzel erhält dann so viel Ziffern, als Abtheilungen vorhanden sind.

2) Ziehe aus der höchsten Abtheilung die Wurzel, d. h. bestimme zur höchsten Ziffer der Wurzel die Zahl (1) deren Quadrat entweder genau oder möglichst nahe mit der höchsten Abtheilung (2)

des Radikanden übereinstimmt, ohne größer als diese zu sein und ziehe das Quadrat (1) dieser Zahl von der höchsten Abtheilung des Radikanden ab.

3) Man führe die Rechnung durch wiederholte Anwendung folgender Vorschrift nach und nach zu Ende:

a. Ziehe zum Rest (1) die nächste Abtheilung (36) herunter, dividire mit dem doppelten bisher gefundenen Theile der Wurzel (2) in den „Rest mit Ausschluß der letzten Ziffer" und schreibe den gefundenen Quotienten (5) als nächste Ziffer in die Wurzel.

b. Berechne das Quadrat der letzten gefundenen Wurzel-Ziffer, schreibe die Einer (5) desselben unter die letzte Ziffer des Restes und behalte die Zehner (2) im Sinne.

c. Multiplicire die letzte gefundene Wurzel-Ziffer (5) mit dem doppelten gefundenen Theile der Wurzel (2), zähle zu diesem Producte die im Sinne behaltenen Zehner (2) hinzu und schreibe die erhaltene Summe unter den Rest links neben die Einer (6) des berechneten Quadrats.

d. Ist nun die unter dem Reste stehende Zahl (125) gleich oder kleiner als der Rest, so ziehe sie von dem letzteren ab, bilde dadurch einen neuen Rest (welcher auch 0 sein kann) und wiederhole dann das so eben (unter 3) beschriebene Verfahren, bis alle Abtheilungen des Radikanden in Rechnung gezogen sind. — Ist jedoch die unter dem Reste stehende Zahl größer als dieser, so ist die letzte gefundene Ziffer der Wurzel zu groß gewählt und man muß sie kleiner bestimmen.

§. 159.

Quadratwurzeln aus Decimalbrüchen. 1) Hat ein Decimalbruch eine gerade Anzahl Decimalstellen, so ist sein Nenner (100, 10000, 1000000 u. s. w.) eine Quadratzahl, also rational; besitzt er eine ungerade Anzahl Decimalziffern, so wird sein Nenner leicht dadurch rational gemacht, daß man ihm eine 0 anhängt. Denkt man sich nun den Decimalbruch, aus welchem die Quadratwurzel gezogen werden soll, als gewöhnlichen Bruch geschrieben, zieht hierauf aus Zähler und Nenner die Quadratwurzel und schreibt dann das Resultat wieder in Form eines Decimalbruches, so bemerkt man leicht:

a. Bei der Bildung der Abtheilungen im Zähler fällt ein Theilstrich dahin, wo der Decimalstrich stand.

b. Die Quadratwurzel des Nenners ist wieder eine dekadische Ordnungszahl; sie enthält so viel Nullen als der Radikand Paare von Nullen, oder der Decimalbruch Paare von Decimalstellen hat.

Hieraus ist für die Praxis folgende Regel hergeleitet worden: „Man setze den ersten Theilstrich dahin, wo das Komma steht, und theile von hier aus den Decimalbruch nach rechts und links hin in Abtheilungen von je 2 Ziffern. Enthält die letzte Abtheilung rechts nur eine Ziffer, so hängt man dem Decimalbruch eine 0 an. Nun ziehe man die Quadratwurzel ohne Rücksicht auf den Decimalstrich

wie bei ganzen Zahlen und setze nur im Resultate gleich während des Rechnens ein Komma, sobald die Wurzel aus den Ganzen gezogen ist und die erste Abtheilung der Decimalziffern in den Rest heruntergenommen wird.

Z. B. $\sqrt{5|76,|48|01} = 2401$; $\sqrt{0,|00|5\cdot3|29} = 0,073$

```
√5|76,|48|01 = 2401;        √0,|00|5·3|29 = 0,073
 4                                   |4 9|
 4|176                            14|  429
  |176                              |  429
  480|4801                               0
     |4801
        0
```

Erläuterung: $\sqrt{0}$ Ganze giebt 0 Ganze; $\sqrt{00}$ Hundertel giebt 0 Zehntel; $\sqrt{53}$ Zehntausendtel giebt 7 Hundertel u. s. w.

2) Ist der Zähler des Decimalbruches nicht rational, so kann die Quadratwurzel zwar nicht genau gefunden werden, aber man kann sich ihr dadurch immer mehr und mehr nähern, daß man dem Radikanden Paare von Nullen anhängt (oder sich angehängt denkt) und das Wurzelausziehen so lange fortsetzt, bis man den gewünschten Grad der Genauigkeit erreicht hat.

```
√3 = 1,732...
 1
 2|2·0·0
  |1 8 9
 34|1 1·0·0
   |1 0 2 9
 346|7·1 0·0
    |6 9 2 4
       1 7 6
```

3) Da nun auch jede ganze Zahl als ein Decimalbruch, dessen Decimalstellen Nullen sind, betrachtet werden kann, so ist man in den Stand gesetzt, auch die Quadratwurzeln aller unvollkommenen Quadratzahlen bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit finden zu können.

§. 160.

Quadratwurzeln aus gewöhnlichen Brüchen.

Aus jedem Bruche wird die Quadratwurzel gefunden (§. 151. 3), wenn man sie aus Zähler und Nenner zieht. Die Quadratwurzel eines Bruches kann jedoch nur dann genau gefunden werden, wenn Zähler und Nenner Quadratzahlen sind.

Z. B. $\sqrt{{}^{16}/_{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = {}^4/_5$. Ist dies nicht der Fall, so erleichtert man sich die Rechnung, wenn man entweder

a. den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt und dann die Wurzel zieht, oder

b. den Nenner zuvor rational macht, d. h. den Bruch in einen andern von gleichem Werthe verwandelt, dessen Nenner eine Quadrat-

zahl ist. Dieser Zweck wird stets erreicht, wenn man Zähler und Nenner mit dem Nenner des Bruches multiplicirt. Z. B.

$$\sqrt{2/3} = \sqrt{6/9} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2{,}4495\ldots}{3} = 0{,}8165\ldots$$

Mitunter führt jedoch auch schon die Multiplication mit einer kleineren Zahl zum Ziele; z. B.

$$\sqrt{7/8} = \sqrt{14/16} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{3{,}7416}{4} = 0{,}9354\ldots$$

B. Ausziehen der Kubikwurzeln.

§. 161.

Aus einer gegebenen Zahl die Kubikwurzel ziehen, heißt (nach §. 150) eine neue Zahl ermitteln, welche mit 3 potenzirt die erstere Zahl hervorbringt, z. B. $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{1728} = 12$.

§. 162.

1) Berechnet man von jeder Zahl der natürlichen Zahlenreihe den Kubus, so erhält man eine neue Reihe von Zahlen, welche Kubikzahlen genannt werden. Die Kubikzahlen der Einer sind:

	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3
=	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

2) Nur aus Kubikzahlen kann die Kubikwurzel genau gezogen werden. Die Kubikwurzel aus jeder anderen Zahl liegt zwischen zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen; z. B. $\sqrt[3]{30}$ liegt zwischen 3 und 4, weil $3^3 = 27$ und $4^3 = 64$ ist. Solche Wurzeln sind irrational (§. 153).

§. 163.

Betrachtet man die beiden zusammengehörigen Zahlenreihen

	1^3	10^3	100^3	1000^3	u. s. w.
=	1	1000	1000000	1000000000	u. s. w.,

so erkennt man leicht:

a. Die Kubikwurzeln der Zahlen zwischen 1 und 1000, d. h. aller 1, 2 und 3zifferigen Zahlen liegen zwischen 1 und 10 und sind daher einzifferig.

b. Die Kubikwurzeln aller Zahlen zwischen 1000 und 1000000, d. h. aller 4, 5 und 6zifferigen Zahlen liegen zwischen 10 und 100 und sind daher 2zifferig u. s. w.

§. 164.

1) Die Kubikwurzeln aus 1—3zifferigen Zahlen findet man mit Hülfe der Kubikzahlen der Einer, genau oder annähernd. Z. B. $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{320}$ liegt zwischen 6 und 7.

2) Die Kubikwurzel aus einer 4-, 5- oder 6ziffrigen Zahl, z. B. $\sqrt[3]{405224}$ ist 2ziffrig. Bezeichnet man einstweilen die Zehner derselben mit a und die Einer mit b, so ist die Wurzel $= a \cdot 10 + b$ und a und b müssen daher so bestimmt werden, daß: $(a \cdot 10 + b)^3 = 405224$ ist. Nun ist nach §. 149. $(a \cdot 10 + b)^3 = a^3 \cdot 1000 + 3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3$; also ist a so zu wählen (siehe unten stehendes Beispiel), daß a^3 mit den Tausenden (405) des Radikanden entweder genau übereinstimmt, oder die nächst kleinere Kubikzahl ist. Dies ist hier die Zahl 7. Zieht man nun $a^3 = 343$ von 405 ab, so muß der Rest 62 (Tausender) im Verein mit den Hundertern, Zehnern und Einern, also 62224 noch $= 3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3$ sein und zwar ist offenbar $3a^2b$ in den Hunderten, $3ab^2$ in den Zehnern und b^3 in den Einern des Restes zu suchen. Um hierauf b zu ermitteln, berechne man $3a^2 = 147$ und dividire damit in die Hunderter des Restes (also in den Rest mit Ausschluß der beiden letzten Ziffern), mithin in 622. Dies giebt für b die Zahl 4. Die Zahl 4 ist richtig gewählt, wenn nun $3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3 = 62224$ ist. Um dies zu prüfen, berechne man daher $3a^2b$ (588) und setze den gefundenen Werth unter die Hunderter, dann $3ab^2$ (336) und setze diesen Werth bis unter die Zehner, hierauf b^3 (64) und setze diesen Werth bis unter die Einer des Restes und ermittele endlich die Summe $3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3 = 62224$. Ist diese Summe gleich dem Rest, so sind a und b richtig gewählt. Dies ist hier der Fall, und daher ist 74 die genaue Kubikwurzel der Zahl 405224. Findet man dagegen beim Zusammenzählen, daß $3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3$ größer ist als der Rest, so muß b kleiner gewählt werden. Ist aber b so groß wie möglich gewählt und doch $3a^2b \cdot 100 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3$ kleiner als der Rest, so ist $a \cdot 10 + b$ nicht genau die gesuchte Kubikwurzel, sondern der wahre Werth der Kubikwurzel liegt zwischen der gefundenen Zahl und der um 1 größeren.

In der Praxis erhält die Rechnung gewöhnlich folgende Gestalt:

$$\begin{array}{rl}
& \sqrt[3]{405|224} = \overset{a+b}{74} \\
& \phantom{\sqrt[3]{}}343| \\
3a^2 = & 147|62224 \\
3a^2b = & \;.\;.\;588 \\
3ab^2 = & \;.\;.\;\;336 \\
b^3 = & \;.\;.\;.\;\;64 \\
\text{Summe:} & \;62224 \\
& \;\;\;\;\;0
\end{array}$$

Der Verticalstrich im Radikanden schneidet, von rechts nach links gezählt, 3 Ziffern ab. Er trennt also die Tausender (405) von den Hundertern, Zehnern und Einern (224) und wird gesetzt, um leichter zu übersehen, in welcher Zahl (405) a^3 zu suchen ist.

§. 165.

1) Soll die Kubikwurzel aus einer 7-, 8- oder 9ziffrigen Zahl gezogen werden, z. B. $\sqrt[3]{44361864}$, so schneide man ebenfalls, von rechts nach links zählend, 3 Ziffern durch einen Verticalstrich ab,

$a' + b'$
$a + b$

$\sqrt[3]{44|361|\mathbf{864}} = 3\;5\;\mathbf{4}$

$a^3 = 27$

$3a^2 = 27 \;|\; 17{\cdot}3{\cdot}6{\cdot}1$

$3a^2b = \;..\;|\; 13{\cdot}5$

$3ab^2 = \;...225$

$b^3 = \;...\;125$

Summe 15875

$3a'^2\;\mathbf{3675} \;|\; 1486\mathbf{864}$

$3a'^2b' = \;.\;\mathbf{14700}$

$3a'b'^2 = \;...\;\mathbf{1680}$

$b'^3 = \;........\mathbf{64}$

$\mathbf{1486864}$

$\mathbf{0}$

ziehe aus der links stehenden Zahl (44361) nach §. 164 die Kubikwurzel (35), betrachte hierauf diese als a', ziehe zum Rest (1486) die drei folgenden Ziffern (864) herunter und fahre nun nach §. 164 fort. Die Rechnung zerfällt in zwei Theile, wovon in nebenstehendem Beispiele der zweite Theil mit fetten Ziffern bezeichnet ist.

2) Hieraus ist leicht das Verfahren abzuleiten, nach welchem auch die Kubikwurzel aus mehr als 9zifferigen Zahlen nach und nach genau oder annähernd gefunden werden kann (man schließt hierbei ganz ähnlich wie beim Quadratwurzelausziehen §. 156).

§. 166.

Kubikwurzeln aus Decimalbrüchen. 1) Man mache den ersten Theilstrich dahin, wo das Komma steht und theile von hier aus nach rechts und links hin die Zahl in Abtheilungen von je drei Ziffern. Enthält die letzte Abtheilung rechts weniger als 3 Ziffern, so ergänze man die fehlenden Stellen durch Nullen. Hierdurch wird der Nenner stets rational. — Nun ziehe man die Kubikwurzel wie aus einer ganzen Zahl und setze nur im Resultat ein Komma, sobald man die Wurzel aus den Ganzen gezogen hat und die erste Abtheilung der Decimalziffern in den Rest heruntergezogen wird. Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen (vergl. §. 159.).

Z. B. $\sqrt[3]{1,|771|561} = 1,21$

1

$3 \;|\; 77{\cdot}1$

6

12

8

728

$432 \;|\; 43561$

432

36

1

43561

0

$\sqrt[3]{0,|000|002|197} = 0,013$

1

$3 \;|\; 1197$

9

27

27

1197

0

2) Ist der Zähler des Decimalbruches keine Kubikzahl, so kann die Kubikwurzel zwar nicht genau gefunden werden, aber man kann sich ihr dadurch immer mehr und mehr nähern, daß man dem Radikanden Nullen anhängt (oder sich angehängt denkt) und das Wurzelausziehen so lange fortsetzt, bis man den gewünschten Grad der Genauigkeit erreicht hat.

3) Da nun auch jede ganze Zahl als ein Decimalbruch, dessen Decimalstellen Nullen sind, betrachtet werden kann, so ist man in den Stand gesetzt, auch die Kubikwurzeln aller unvollkommenen Kubikzahlen bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit finden zu können.

$\sqrt[3]{12} = 2,28\ldots$	$\sqrt[3]{5,\|800} = 1,79\ldots$
8	1
12 | 4·0·0·0	3 | 4·8·0·0
24	21
24	147
8	343
2648	3913
1452 | 135·2·0·0·0	867 | 887·000
11616	7803
4224	4131
512	729
1204352	822339
147648	64661
u. s. w.	u. s. w.

§. 167.

Kubikwurzeln aus gewöhnlichen Brüchen. Man ziehe die Kubikwurzel aus Zähler und Nenner. Ist der Nenner keine Kubikzahl, so ist es jedoch vortheilhaft, dabei wie folgt zu verfahren:

a. Man verwandele den gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch und ziehe dann die Kubikwurzel, oder

b. man mache zuvor den Nenner rational. Dieser Zweck wird stets erreicht, wenn man Zähler und Nenner mit dem Quadrate des Nenners multiplicirt.

Z. B. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 6^2}{6 \cdot 6^2}} = \sqrt[3]{\frac{180}{6^3}} = \frac{\sqrt[3]{180}}{6} = 0,94103\ldots$

Mitunter führt jedoch auch schon die Multiplication mit einer kleineren Zahl zum Ziele. Z. B.

$$\sqrt[3]{2^7/_9} = \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = \sqrt[3]{\frac{25 \cdot 3}{9 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\frac{75}{27}} = \frac{\sqrt[3]{75}}{3} = 1,40572\ldots$$

Achter Abschnitt.

Von den einfachen Bestimmungs-Gleichungen.

§. 168.

Bei der Lösung von Rechenaufgaben hat man aus bekannten Zahlen eine oder auch mehrere unbekannte Zahlen zu finden. In den mehrsten uns im praktischen Leben vorkommenden Fällen übersieht unser Verstand leicht, wie das Ziel durch Anwendung der Grundrechnungsarten oder auch mit Hülfe der Proportionslehre zu erreichen ist. Es giebt aber auch Rechenfragen, bei welchen der Zusammenhang zwischen der gesuchten Zahl und den bekannten Zahlen sich nicht sogleich erkennen läßt, sondern erst durch eine mehr oder minder schwierig zu findende Kette von Verstandesschlüssen sich ergiebt. Zur Lösung solcher schwierigeren Rechenaufgaben bietet die Lehre von den Bestimmungs-Gleichungen das wichtigste Hülfsmittel dar.

§. 169.

Unter einer Gleichung versteht man (s. Einleitung Nr. 6) die Verbindung zweier gleichen Ausdrücke durch ein Gleichheitszeichen, z. B.

1) $(a + b) - c = (a - c) + b$; $(8 + 5) - 3 = (8 - 3) + 5$

2) $3x - \frac{2 + 5x}{6} = 5 - (2x - 3)$.

Die beiden gleichen Ausdrücke werden die Seiten der Gleichung und die durch + oder — verbundenen Theile derselben, die Glieder der Gleichung genannt. Im zweiten der obigen Beispiele heißen die Glieder $3x$, $\frac{2 + 5x}{6}$, 5, $(2x - 3)$.

§. 170.

Man hat zwei Hauptarten von Gleichungen zu unterscheiden: analytische und Bestimmungs-Gleichungen.

1) Wenn eine Gleichung immer richtig ist, welche Werthe man auch den in derselben vorkommenden Buchstaben beilegen mag, wird sie eine analytische Gleichung genannt. Z. B. $n \cdot (a + b) = na + nb$.

2) Ist dagegen eine Gleichung nur unter der Bedingung richtig, daß ein in derselben vorkommender Buchstabe einen ganz bestimmten Werth vorstellt, so heißt sie in Beziehung auf diesen Buchstaben eine algebraische oder Bestimmungs-Gleichung.

So ist z. B. obige Gleichung

$$3x - \frac{2 + 5x}{6} = 5 - (2x - 3)$$

eine Bestimmungs-Gleichung, denn sie ist nur dann richtig, wenn für x der Werth 2 gesetzt wird.

Der Name „Bestimmungs-Gleichung" ist gewählt worden, weil eine solche Gleichung gewöhnlich dazu benutzt wird, den Werth einer noch unbekannten, in der Gleichung gewöhnlich durch x, y oder z bezeichneten Zahl, zu bestimmen.

Die einfachste Art der Bestimmungs-Gleichungen enthält nur eine unbekannte Zahl — kurzweg die Unbekannte genannt — und diese nur einfach, d. h. nicht mit sich selbst multiplicirt (nicht in der zweiten, oder einer höheren Potenz). Im Nachstehenden soll nur diese einfachste Art näher betrachtet werden.

§. 171.

Aus einer Gleichung lassen sich unzählige andere Gleichungen ableiten, indem man beide Seiten um dieselbe Zahl vermehrt oder vermindert, oder beide Seiten mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt u. s. w. Man nennt dies Verfahren eine Gleichung umformen. Die wichtigsten dieser Umformungen sind folgende:

1) Will man ein Glied auf der einen Seite einer Gleichung forthaben, so wird dieses Glied, je nachdem es das Vorzeichen + oder — hat, auf beiden Seiten der Gleichung subtrahirt oder addirt. Z. B.

Aus:	$3x + 2 = 8$	Aus:	$3x - 2 = 8$
folgt:	$3x + 2 - 2 = 8 - 2$	folgt:	$3x - 2 + 2 = 8 + 2$
oder:	$3x = 6.$	oder:	$3x = 10.$

Hieraus folgt die praktische Regel:

In einer Gleichung darf man jedes Glied mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite setzen.

Z. B. Aus:	$7x + 3/5 = 8 - 2x$	Aus:	$8^2/_3 - 12 = -3x$
folgt:	$7x + 2x = 8 - 3/5.$	folgt:	$3x = 12 - 8^2/_3.$

2) Um aus einer Gleichung einen Bruch fortzubringen, multiplicire man beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner dieses Bruches. Z. B.

Aus:	$\frac{x}{6} = 4$	Aus:	$\frac{2}{3}x - 4 = 5x + 2$
folgt:	$6 \cdot \frac{x}{6} = 6 \cdot 4$	folgt:	$3 \cdot 2/3 x - 3.4 = 3 \cdot 5x + 3 \cdot 2$
oder:	$x = 24.$	oder:	$2x - 12 = 15x + 6.$

Enthält eine Gleichung mehrere Brüche, so kann man dieselben nach und nach oder auch auf einmal dadurch fortschaffen, daß man die Gleichung — d. h. beide Seiten derselben — mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen — dem Generalnenner — sämmtlicher Nenner multiplicirt. Z. B.

Aus: $3/4\,x - 5/6 = 2/3 - 1/2\,x$

folgt, wenn man mit dem Generalnenner 12 multiplicirt:

$$12 \cdot 3/4\,x - 12 \cdot 5/6 = 12 \cdot 2/3 - 12 \cdot 1/2\,x$$

oder: $9x - 10 = 8 - 6x.$

Multiplicirt man beide Seiten einer Gleichung mit. — 1, so werden alle Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt. Man wendet dieses Verfahren mitunter an, um einem bestimmten Gliede das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben. Z. B.

Aus: $-5x + 6 = 2$ folgt: $5x - 6 = -2$.

3) Das Gesetz: Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches, wird angewendet:

a. wenn man ein Glied von einem Faktor (seinem Coefficienten) befreien will. Es wird dann die Gleichung durch diesen Faktor dividirt. Z. B.

Aus: $5x = 20$

folgt: $\frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$

oder: $x = 4$.

b. um eine Gleichung, deren Glieder sämmtlich einen gemeinschaftlichen Theiler haben, dadurch zu vereinfachen, daß man sie durch diesen Theiler dividirt. Z. B.

Aus: $15x - 12 = 18$ Aus: $3x^2 - 7x = 8x$

folgt: $\frac{15x}{3} - \frac{12}{3} = \frac{18}{3}$ folgt: $\frac{3x^2}{x} - \frac{7x}{x} = \frac{8x}{x}$

oder: $5x - 4 = 6$. oder: $3x - 7 = 8$.

§. 172.

Eine **Bestimmungs-Gleichung auflösen** heißt, den Werth ihrer Unbekannten ermitteln. Dies geschieht, indem man die gegebene Gleichung so lange umformt, bis die unbekannte Zahl (x) auf einer Seite allein steht und sich auf der anderen Seite nur noch bekannte Werthe befinden.

Am leichtesten erreicht man diesen Zweck gewöhnlich, wenn man nachstehende Reihenfolge einhält:

1) Schaffe die Nenner fort (§. 171. 2.).

2) Löse die Klammern auf, in welchen die Unbekannte vorkommt.

3) Bringe die Glieder mit x auf die eine und die Glieder ohne x auf die andere Seite. (§. 171. 1.)

4) Vereinige auf beiden Seiten die Glieder durch Addition oder Subtraction in ein Glied.

5) Dividire beide Seiten der Gleichung durch den Faktor von x.

Beispiel: Es sei gegeben:

$$8x - \frac{2x - 8}{3} - (6x + 5) = {}^7/_6 - \frac{2x + 3}{4},$$

dann erhält man:

1) durch Multiplication mit dem Generalnenner 12

$$96x - (8x - 32) - (72x + 60) = 14 - (6x + 9),$$

2) wenn man die Klammern auflöst:

$$96x - 8x + 32 - 72x - 60 = 14 - 6x - 9,$$

3) indem man die Glieder mit x auf die eine (linke), die Glieder ohne x auf die andere Seite bringt:

$$96\,x - 8\,x - 72\,x + 6\,x = 14 - 9 - 32 + 60,$$

4) durch Vereinigung der Glieder einer jeden Seite:

$$22\,x = 33$$

5) und indem man auf beiden Seiten durch 22 dividirt:

$$x = {}^{33}/_{22} = {}^{3}/_{2} = 1{}^{1}/_{2}.$$

§. 173.

1) In vielen Fällen wird man nicht alle fünf der angegebenen Umformungen vorzunehmen haben. Z. B.

1. Gegeben: $6\,x + 8 = 3\,x - 15 + 8\,x.$

Lösung: Brüche und Klammern sind nicht fortzuschaffen; man bringe daher gleich die Glieder mit x auf die eine, die Glieder ohne x auf die andere Seite. Dies giebt:

$$8 + 15 = 3\,x + 8\,x - 6\,x,$$

zusammengezogen: $23 = 5\,x,$

durch 5 dividirt: $4{}^{3}/_{5} = x.$

2. Gegeben: $6\,x\,(2\,x - 4) + 12 = (4 - x) \cdot (3\,x + 3).$

Lösung: Brüche sind nicht fortzuschaffen; man löse daher gleich die Klammern auf, indem man die angedeuteten Multiplicationen ausführt. Dies giebt:

$$12\,x^2 - 24\,x + 12 = 12\,x - 3\,x^2 + 12 - 3\,x.$$

Nun subtrahire man auf beiden Seiten 12:

$$12\,x^2 - 24\,x = 12\,x - 3\,x^2 - 3\,x,$$

(in der Praxis wird 12 nur auf beiden Seiten durchgestrichen), dividire die Gleichung durch x:

$$12\,x - 24 = 12 - 3\,x - 3,$$

bringe die Glieder mit x auf eine Seite:

$$12\,x + 3\,x = 12 - 3 + 24,$$

ziehe auf beiden Seiten die Glieder zusammen:

$$15\,x = 33,$$

hebe (dividire) durch 3:

$$5\,x = 11,$$

dividire durch den Coefficienten von x:

$$x = 2{}^{1}/_{5}.$$

§. 174.

Schwieriger, aber auch interessanter und bildender als das Auflösen gegebener Gleichungen ist das Bilden des Ansatzes, d. h. das Ableiten der Bestimmungs-Gleichung aus einer in Worten gegebenen Aufgabe. Hierzu läßt sich keine bestimmte Regel geben, doch kommt es immer darauf an, eine in der Aufgabe enthaltene Größe (oder Zahl) zweimal, in verschiedener Weise, als Zahlwerth auszudrücken, wobei man die unbekannte Zahl gewöhnlich mit x bezeichnet und darauf, daß sie unbekannt ist, zunächst keine Rücksicht nimmt. Ist dies gelungen, so hat man die beiden erhaltenen Aus-

drücke durch ein Gleichheitszeichen zu verbinden, um die gewünschte Bestimmungs-Gleichung zu erhalten.

Einige Beispiele mögen zur weiteren Erläuterung dienen:

1) Von einem Orte A wird ein Courier nach B geschickt, welcher stündlich 7 Kilometer zurücklegt. Nach zwei Stunden wird ihm ein zweiter Courier nachgesandt, welcher stündlich 10 Kilometer macht. Nach wieviel Stunden und in welcher Entfernung von A wird der zweite Courier den ersteren eingeholt haben?

1. Lösung: Zunächst ist zu überlegen, welche in der Aufgabe enthaltene Größe sich dazu eignet, zweimal als Zahlwerth ausgedrückt zu werden? Dies wird z. B. die Länge des Weges sein von A bis zu dem Punkte C, in welchem die beiden Couriere zusammentreffen.

Angenommen der zweite Courier hole den ersten in x Stunden ein, wieviel Stunden ist dann der erste Courier unterwegs?

(x + 2) Stunden.

Wieviel Kilometer legt der 1. Courier in diesen (x + 2) Stunden zurück? . . . . 8 (x + 2) Km.

Der 2. Courier macht stündlich 10 Kilometer, wieviel wird er also in seinen x Stunden zurücklegen? . . . . 10 x Km.

Beide Couriere haben dann dieselbe Wegstrecke zurückgelegt, welche Werthe müssen daher gleich sein?

$$10\,x = 8\,(x + 2).$$

Hiermit ist ein Ansatz (eine Bestimmungs-Gleichung) gefunden und die weitere Auflösung ergiebt:

$$10\,x = 8\,x + 16$$
$$10\,x - 8\,x = 16$$
$$2\,x = 16$$
$$x = 8$$

Also wird der zweite Courier den ersten in 8 Stunden eingeholt haben. Er macht stündlich 10 Km., folglich ist A von C $8 \times 10 = 80$ Km. entfernt.

2. Lösung: Man könnte aber auch zunächst die Länge des Weges von A bis zum Treffpunkte C als unbekannt ansehen und mit x bezeichnen, dann würde zu diesem Wege der erste Courier, welcher stündlich 8 Km. zurücklegt, $\frac{x}{8}$ Stunden und der zweite, da er stündlich 10 Km. macht, $\frac{x}{10}$ Stunden nöthig haben. Nun hat der erste Courier 2 Stunden mehr gebraucht, als der zweite, mithin entsteht die Gleichung:

$$\frac{x}{8} = \frac{x}{10} + 2$$
$$5\,x = 4\,x + 80$$
$$x = 80.$$

Folglich ist A von C 80 Km. entfernt. Der zweite Courier legt stündlich 10 Km. zurück, also wird er zu 80 Km. 80 : 10 = 8 Stunden gebraucht haben.

3. Lösung: Diese Aufgabe läßt sich jedoch auch ohne Anwendung einer Gleichung durch bloße Verstandesschlüsse wie folgt lösen:

Der erste Courier macht stündlich 8 Km. und ist 2 Stunden voraus, mithin hat er einen Vorsprung von $2 \times 8 = 16$ Km. Der zweite Courier legt stündlich 10 Km. zurück, kommt also in jeder Stunde dem ersteren um $10 - 8 = 2$ Km. näher; mithin wird er den Vorsprung von 16 Km. in soviel Stunden nachgeholt haben, als 2 Km. in 16 Km. enthalten sind. Dies giebt wie vorhin 8 Stunden.

Anmerkung. Es ist außerordentlich übend für den Verstand, von Aufgaben dieser Art möglichst viele verschiedene Lösungen aufzusuchen. Eine Aufgabe auf 10 verschiedene Arten lösen, bringt mehr Gewinn, als 10 verschiedene Aufgaben auf eine Art lösen.

2) Edler Pythagoras, sage mir an, wie viele der Jünger
Zählt Dein Haus, die dem Dienst sich weihn der unsterblichen Götter?
Sagen will es Dir, o Polykrates. Siehe, die Hälfte
Weiht sich der herrlichen Mathematik, ein Viertel erforschet
Eifrig die Tiefen der ew'gen Natur; ein Siebentel übt noch
Schweigend die Kraft des Gemüths und horcht der sinnigen Rede;
Dann der Jungfrau'n drei, doch herrlich vor allen Theano;
So viel führ' ich der Jünger zum Born der ewigen Wahrheit*).

Lösung: Hier wird die Zahl der Jünger auf doppelte Weise auszudrücken sein.

Womit bezeichnen wir zunächst die Jüngerzahl? x
Wieviel Jünger weihen sich dann der Mathematik? .... $x/_2$
wieviel erforschen die Natur? .... $x/_4$
wieviel horchen der sinnigen Rede? .... $x/_7$
wieviel Jungfrauen gehören dazu? 3

Wieviel Jünger sind es also zusammen? $x/_2 + x/_4 + x/_7 + 3$.

Nun ist die Zahl der Jünger = x angenommen, welche Bestimmungs-Gleichung entsteht also?

$$x = x/_2 + x/_4 + x/_7 + 3$$

folglich:
$$28x = 14x + 7x + 4x + 84$$
$$28x - 14x - 7x - 4x = 84$$
$$3x = 84$$
$$x = 28.$$

Mithin hat Pythagoras 28 Jünger gehabt.

*) Diese Aufgabe ist aus der vortrefflichen „Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Eduard Heis“ entnommen. Strebsamen Schülern kann diese Aufgabensammlung, so wie auch die von Meyer Hirsch besonders empfohlen werden.

3) Eine Magd, welche jährlich 72 Mark und ein Kleid zum Lohn erhalten sollte, verließ schon nach $10\frac{1}{2}$ Monaten den Dienst und erhielt, da sie das Kleid schon empfangen hatte, nur $60\frac{1}{2}$ Mark Lohn. Wie hoch wurde das Kleid gerechnet?

1. Lösung: Man versuche den Werth des Gesammtlohnes für $10\frac{1}{2}$ Monat auf doppelte Weise auszudrücken.

Wodurch bezeichnen wir zunächst den unbekannten Werth des Kleides? . . . . . . durch x Mark.

Wie hoch ist dann der Werth des jährlichen Gesammtlohnes? . . . . $(72 + x)$ Mk.

Wieviel beträgt daher der Lohn für 1 Monat? $\left(\frac{72 + x}{12}\right)$ Mk.

Wieviel für $10\frac{1}{2}$ Monat? . . . . $\frac{(72 + x) \cdot 10\frac{1}{2}}{12}$ Mk.

Wieviel hat die Magd für diese Zeit wirklich empfangen? . . . . $(60\frac{1}{2} + x)$ Mk.

Welche Werthe müssen mithin gleich sein?

$$\frac{(72 + x)\, 10\frac{1}{2}}{12} = 60\frac{1}{2} + x,$$

folglich

$$\frac{(72 + x)\, \overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{4}{\cancel{12}} \cdot 2} = 60\frac{1}{2} + x$$

$$(72 + x)\, 7 = 484 + 8\,x$$

$$504 + 7\,x = 484 + 8\,x$$

$$504 - 484 = x$$

$$20 = x$$

Das Kleid wurde also = 20 Mark gerechnet.

2. Lösung: Auch diese Aufgabe läßt sich ohne Einführung einer unbekannten Zahl x wie folgt lösen:

Die Magd sollte erhalten für 12 Monate 72 Mk. + 1 Kleid;
sie erhielt für $10\frac{1}{2}$ „ $60\frac{1}{2}$ „ + 1 „
mithin beträgt der Lohn für $12 - 10\frac{1}{2}$
$= 1\frac{1}{2}$ Monat . . . . $11\frac{1}{2}$ Mk.
für $\frac{1}{2}$ Monat . . . . $\frac{23}{6}$ „
„ 1 „ . . . . $\frac{23}{3}$ „
„ 12 „ . . . . 92 „

Diese 92 Mark müssen denselben Werth haben wie 72 Mark + 1 Kleid; folglich entspricht das Kleid einem Werthe von 92 — 72 = 20 Mark.

Uebungs-Aufgaben.

Zum arithmetischen Theil.

Erster Abschnitt.

Lesen und Schreiben der Zahlen.

1. Lies folgende Zahlen: 37, 924, 7813, 3456132, 4500, 620050, 310007, 10000001, 3745831623, 41390200050, 3249426043264, 40000400040040, 1000000000000.

2. Schreibe mit arabischen Ziffern: Viertausend neunhundert und siebzig, Neunzigtausend und sieben, Neun Millionen dreihundert funfzig tausend achthundert vier und dreißig, Fünf und vierzig Billionen sechs Millionen und funfzig.

3. Schreibe mit römischen Ziffern: 14, 29, 36, 48, 57, 72, 99, 163, 485, 503, 612, 1756, 1869, 4509, 10700.

4. Lies folgende Zahlen: XVIII, XXIV, XLII, LXXX, XCVI, CCCIII, CDLXI, DCCLXXXVIII, MDCCCLXX, II.MCII.

Zweiter Abschnitt.

Grundrechnungsarten mit ganzen unbenannten Zahlen.

a. Addiren.

1. Uebe dich auf folgende Weise im Zuzählen von 2: a. 1, 3, 5, 7 u. s. w.; b. 2, 4, 6, 8 u. s. w. bis 100.

2. Uebe dich auf gleiche Weise im Zuzählen von 3, indem du folgende Reihen bis 100 hin fortsetzest:
a. 1, 4. 7 ꝛc.; b. 2, 5, 8 ꝛc.; c. 3, 6, 9 ꝛc.

3. Stelle diese Uebungen auch mit 4, 5 ꝛc. bis 9 hin an!

Anmerkung. Diese Uebungen bilden die Grundlage für ein gewandtes Addiren.

4. Berechne im Kopfe: a. $75 + 26$; b. $137 + 43$; c. $72 + 345$; d. $57 + 49$; e. $213 + 99$; f. $23 + 23 + 24$; g. $47 + 23 + 68$.

5. Addire schriftlich: a. $67 + 26 + 231 + 84 + 49$; b. $734 + 248 + 14 + 372 + 612$; c. $3056 + 701 + 6309$; d. $7005 + 807 + 2645$; e. $3652 + 19843 + 8267 + 1690 + 86325 + 464$; f. $13426004 + 40237 + 184763 + 87 + 5312 + 28075 + 56 + 329$.

Antwort: a. 457; b. 1980; c. 10066; d. 10457; e. 120241; f. 13684863.

b. Subtrahiren.

1. Uebe dich im Abziehen der einzifferigen Zahlen, indem du folgende Reihen bis Null hin fortsetzest:

a. 100, 98, 96 ꝛc. — 99, 97, 95 ꝛc.
b. 100, 97, 94 ꝛc. — 99, 96, 93 ꝛc. — 98, 95, 92 ꝛc.
c. 100, 96, 92 ꝛc. — 99, 95, 91 ꝛc. — 98, 94, 90 ꝛc. — 97, 93, 89 ꝛc.

und so weiter fort.

2. Berechne im Kopf: a. 97 — 45; b. 82 — 59; c. 136 — 78; d. 213 — 99; e. 245 — 66; f. 211 — 14; g. 1000 — 890. — h. Zu welcher Zahl muß man 29 hinzuzählen, um 90 zu erhalten?

3. Subtrahire (schriftlich):

a. 16486 — 4154; e. 2600046 — 842653;
b. 26364 — 11428; f. 763254 — 99897;
c. 86345990 — 1656845; g. 401020 — 380090;
d. 46036 — 3845; h. 50617211 — 816539.

4. Berechne auf drei verschiedene Weisen:

a. (3678 + 1855) — 678; c. 7816 — (395 + 816);
b. (237 + 32) — 162; d. 3600 — (1800 + 936).

Welche Weise ist in jedem einzelnen Falle die vortheilhafteste?

5. Berechne auf neun verschiedene Weisen: (68 + 70) — (12 + 29).

6. In der Aufgabe: 2845 — 1582 hat man die im Subtrahendus stehende 5 für 3 gelesen; wie wird man das Resultat auf dem kürzesten Wege berichtigen?

Antworten:

3) a. 12332;	e. 1757393;	4) a. 4855;	5) 97;
b. 14936;	f. 663357;	b. 107;	6) Man zieht vom
c. 84689145;	g. 20930;	c. 6605;	Resultat noch
d. 42191;	h. 49800672;	d. 864;	200 ab.

c. Multipliciren.

1. Gesetzt du habest vergessen, wie groß 5 × 9 ist, wie kannst du das Resultat sicher finden? (§. 35.)

2. Berechne im Kopf:

a. 3 × 24; 5 × 36; 8 × 46; 7 × 92; 4 × 130; 9 × 87 (§. 38. b. 1);
b. 4 × 29; 7 × 18; 8 × 19; 5 × 99; 2 × 298; 5 × 78 (§. 38. b. 3);
c. 12 × 25; 15 × 44; 55 × 14; 31 × 22; 21 × 33 (§. 38. b 4).
d. Wie groß ist die Zahl, deren 8ter Theil 32 beträgt? (256).
e. 18 × 75; 24 × 36; 45 × 60; 38 × 25; 45 × 45 (§. 38. b. 2).

f. In Europa giebt es 53 verschiedene Sprachen; auf der ganzen Erde aber 16mal so viele und noch 22; wie viele sind das? (870).

3. Berechne schriftlich:

a.	8 × 376462;	f.	6500 × 7403958;
b.	1000 × 936428;	g.	300702 × 28536748;
c.	700 × 2186549;	h.	374359 × 643;
d.	394 × 347592;	i.	2003645 × 3040001;
e.	1623 × 820320005;	k.	9270000 × 13600.

4. Berechne auf drei verschiedene Weisen: a. 4 × (36 + 25); b. 12 × (225 — 26)*); (95 + 35) × 6; d. (25 × 12) × 4.

Antworten:

3) a. 3011696;	f. 48125727000;	4) a. 244;
b. 936428000;	g. 8581057197096;	b. 2388;
c. 1530584300;	h. 240712837;	c. 780;
d. 136951248;	i. 6091082803645;	d. 1200.
e. 1331379368115;	k. 126072000000;	

d. Dividiren.

1. Wie groß ist jeder Theil, wenn 63 in 7 gleiche Theile getheilt wird?

2. Wie oft ist 7 in 63 enthalten, d. h. wie oft kann 7 von 63 abgezogen werden?

3. Berechne im Kopf:
a. 128 : 4; 219 : 3; 637 : 7; 800 : 5; 360 : 12; 900 : 60.
b. 105 : 35; 1200 : 15; 192 : 48; 189 : 27; 432 : 36 (§. 36. 1).
c. 324 : 36**); 204 : 17; 720 : 48***); 1080 : 90.
d. 148 : 12; 236 : 9; 219 : 18; 504 : 54; 253 : 33.

4. Berechne schriftlich:
a. Theile 2785634 durch 2, 3, 4 u. s. w. bis 9 (§. 38. 1).

b.	18711 : 21;	g.	260458 : 4800;
c.	2094576 : 264;	h.	546000 : 75;
d.	7632 : 32;	i.	2109543 : 8910;
e.	23457 : 543;	k.	605302700 : 630;
f.	491750000 : 875;	l.	720195000 : 1900000.

5. Berechne auf möglichst verschiedene Weise:
a. (361 + 23) : 6; b. (748 — 23) : 25; c. (316 — 35 + 128) : 46; d. (60 × 84) : 12; e. 720 : (6 × 15).

---

*) Man rechne: 12 × (225 — 26) = 12 × 199 = 2388, oder = (12 × 225) — (12 × 26 = 2388 oder auch = 12 (200 — 1) = 2388.
**) 324 : 36 = (360 — 36) : 36 = 10 — 1 = 9.
***) 720 : 48 = 360 : 24 = 180 : 12 = 60 : 4 = 30 : 2 = 15.

Antworten:

4) a. 1392817, 928544 Rest 2, 696408 Rest 2 u. s. w.

b. 891;	g. 54, Rest 1258;	5) a. 64;
c. 7934;	h. 7280;	b. 29;
d. 238, Rest 16;	i. 236, Rest 6783;	c. 8 Rest 41;
e. 43, Rest 108;	k. 960797, Rest 590;	d. 420;
f. 562000;	l. 379, Rest 95;	e. 8.

Dritter Abschnitt.

a. Von den Theilern und Vielfachen.

1. Suche die Theiler der Zahlen 10, 12, 25, 30, 13!

2. Wieviel Vielfache hat eine jede Zahl? Gieb die Vielfachen der Zahl 5 an, welche 50 nicht übersteigen!

3. Suche drei gemeinschaftliche Theiler der Zahlen 30 und 105; ebenso der Zahlen 24 und 42!

4. Gieb drei gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 6 und 8 an!

5. Suche den größten gemeinschaftlichen Theiler von:

a. 245 und 1484;	d. 336 und 4900;
b. 1085 „ 13299;	e. 667 „ 105;
c. 190 „ 399;	f. 10710 „ 204.

6. Zerlege folgende Zahlen in ihre Primfactoren: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 66, 455, 1173.

7. Suche im Kopf das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von: a. 3 und 4; b. 4 und 6; c. 8 und 24; d. 9 und 12; e. 2, 3 und 4; f. 9, 12 und 18.

Ferner durch schriftliches Rechnen von:

g. 4, 5, 6, 15 und 32;	i. 2, 6, 15, 22, 33, 40;
h. 10, 14, 35 und 49;	k. 3, 5, 7, 22.

Antworten:

5) a. 7; b. 31; c. 19; d. 28; e. 1; f. 102.

6) a. 2×2; b. 2×3; c. $2 \times 2 \times 2$; d. 3×3; e. 2×5; f. $2 \times 2 \times 3$; g. 2×7; h. $2 \times 3 \times 11$; i. $5 \times 7 \times 13$; k. $3 \times 17 \times 23$.

7) g. 480; h. 490; i. 1320; k. 2310.

b. Von den gewöhnlichen Brüchen.

1. Wie groß sind: $^5/_6$ von 30? $^2/_3$ von 39? $^8/_5$ von 25?

2. Wieviel Achtel sind a. 3 Ganze, b. 5 Ganze, c. 12 Ganze, d. 32 Ganze?

3. Verwandele in unechte Brüche: $1^3/_5$, $5^2/_3$, $8^5/_6$, $12^{11}/_{12}$, $28^7/_{15}$, $98^{12}/_{17}$, $362^{27}/_{115}$, $206004^{105}/_{3008}$.

4. Verwandele in gemischte Zahlen: $^{5}/_{3}$, $^{15}/_{4}$, $^{28}/_{7}$, $^{44}/_{9}$, $^{125}/_{12}$, $^{245}/_{9}$, $^{52}/_{7}$, $^{729}/_{32}$, $^{2815}/_{124}$, $^{361076}/_{1700}$. $^{189000}/_{315}$.

5. Hebe (reducire) folgende Brüche so viel als möglich: a. $^{4}/_{6}$; b. $^{9}/_{12}$; c. $^{15}/_{25}$; d. $^{12}/_{18}$; e. $^{24}/_{32}$; f. $^{70}/_{80}$; g. $^{44}/_{77}$; h. $^{20}/_{28}$; i. $^{96}/_{120}$; k. $^{132}/_{792}$; l. $^{450}/_{1575}$; m. $^{143}/_{156}$; n. $^{205}/_{369}$; o. $^{714}/_{1020}$; p. $^{15}/_{77}$; q. $^{385}/_{1768}$; r. $^{9690}/_{11339}$.

6. Verwandele: a. $^{2}/_{3}$ in 9tel; b. $^{7}/_{8}$ in 32stel; c. $^{3}/_{5}$ in 100tel!

7. Mache gleichnamig:

a. Im Kopf: 1) $^{1}/_{2}$ und $^{2}/_{3}$; 2) $^{1}/_{2}$, $^{3}/_{4}$; 3) $^{4}/_{5}$, $^{7}/_{8}$; 4) $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$; 5) $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{15}$; 6) $^{3}/_{8}$, $^{2}/_{9}$; 7) $^{7}/_{12}$, $^{2}/_{15}$; 8) $^{5}/_{16}$, $^{11}/_{24}$; 9) $^{5}/_{9}$, $^{7}/_{21}$.

b. Schriftlich: 10) $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{5}$, $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{8}$; 11) $^{3}/_{8}$, $^{7}/_{9}$, $^{1}/_{6}$, $^{11}/_{45}$, $^{24}/_{27}$, $^{2}/_{33}$; 12) $^{8}/_{25}$, $^{11}/_{15}$, $^{5}/_{21}$, $^{35}/_{49}$, $^{12}/_{35}$, $^{31}/_{147}$.

8. Addire: a. Im Kopf:

1) $^{2}/_{8} + ^{3}/_{8}$;	4) $^{1}/_{2} + ^{1}/_{3}$;	7) $^{3}/_{4} + ^{7}/_{8}$;
2) $^{5}/_{12} + ^{7}/_{12}$;	5) $^{2}/_{3} + ^{3}/_{4}$;	8) $^{5}/_{6} + ^{7}/_{9}$;
3) $^{1}/_{2} + ^{1}/_{4}$;	6) $^{1}/_{4} + ^{5}/_{6}$;	9) $^{5}/_{8} + ^{5}/_{12}$;

b. Schriftlich:

10) $^{8}/_{141} + ^{35}/_{141} + ^{90}/_{141} + ^{102}/_{141} + ^{46}/_{141} + ^{75}/_{141}$;
11) $^{2}/_{3} + ^{5}/_{6} + ^{7}/_{8} + ^{1}/_{2}$;
12) $^{7}/_{40} + ^{3}/_{8} + ^{5}/_{6} + ^{11}/_{12} + ^{4}/_{5} + ^{15}/_{16}$;
13) $2^{1}/_{2} + 5^{7}/_{8} + 1^{11}/_{12} + 12^{5}/_{6}$;
14) $8^{1}/_{2} + 13 + 12^{3}/_{4} + 29^{11}/_{15}$;
15) $128^{1}/_{5} + ^{6}/_{7} + 718^{11}/_{14} + 2^{6}/_{21} + 96^{13}/_{25}$;
16) $4^{5}/_{12} + 5^{11}/_{18} + 6^{17}/_{21} + ^{17}/_{28} + 8^{2}/_{3}$;
17) $7^{2}/_{3} + 83^{3}/_{5} + 257^{9}/_{16} + 4^{3}/_{8} + 5^{1}/_{2} + 349^{4}/_{9} + 38^{5}/_{6} + 243^{7}/_{10} + 55^{19}/_{24}$;
18) $7^{3}/_{4} + 12^{1}/_{6} + 25 + 17^{8}/_{15} + 2^{15}/_{16} + 28^{7}/_{20} + 11^{41}/_{56}$;
19) $216^{1}/_{3} + 6415^{2}/_{3} + 728^{7}/_{12} + 3608^{5}/_{8} + 7100^{20}/_{33} + 2008^{23}/_{44}$.
20) Die erste von 4 Zahlen beträgt $8^{2}/_{3}$, die zweite $5^{5}/_{8}$ mehr als die erste, die dritte $12^{5}/_{12}$ mehr als die zweite und die vierte ist um $8^{7}/_{20}$ größer als die erste und dritte zusammengenommen. Wie groß ist die Summe dieser Zahlen?

9. Subtrahire: a. im Kopf:

1) $^{8}/_{11} - ^{5}/_{11}$;	4) $12 - ^{4}/_{5}$;	7) $2^{7}/_{8} - 1^{3}/_{16}$;
2) $7^{5}/_{8} - ^{3}/_{8}$;	5) $9 - 2^{3}/_{4}$;	8) $6^{1}/_{2} - 4^{3}/_{4}$;
3) $13^{1}/_{2} - 5$;	6) $^{5}/_{6} - ^{1}/_{4}$;	9) $8^{2}/_{9} - 1^{5}/_{6}$.

b. Schriftlich:

10) $^{1250}/_{3673} - ^{918}/_{3673}$;	15) $^{322}/_{423} - ^{115}/_{504}$;
11) $365^{111}/_{112} - ^{98}/_{112}$;	16) $25^{9}/_{10} - 19^{4}/_{15}$;
12) $7008^{13}/_{35} - 875$;	17) $213^{9}/_{14} - 199^{20}/_{21}$;
13) $769 - ^{313}/_{728}$;	18) $4825^{113}/_{260} - 9^{187}/_{195}$.
14) $536 - 345^{15}/_{17}$;	

19) Wenn man die Brüche a. $\frac{4}{5}$, b. $\frac{5}{9}$ umkehrt, d. h. den Zähler zum Nenner und den Nenner zum Zähler macht, um wieviel ändert sich ihr Werth?

20) Wie ändert sich der Werth des Bruches $\frac{5}{12}$, wenn man a. zum Zähler und Nenner 3 addirt, b. vom Zähler und Nenner 3 subtrahirt?

10. Multiplicire: a. Im Kopf:

1) $5 \times \frac{1}{9}$;	9) $3 \times 1\frac{1}{4}$;	17) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$;
2) $7 \times \frac{7}{8}$;	10) $5 \times 2\frac{1}{2}$;	18) $\frac{7}{8} \times \frac{5}{6}$;
3) $4 \times \frac{7}{8}$;	11) $4 \times 5\frac{5}{8}$;	19) $\frac{11}{12} \times \frac{4}{5}$;
4) $8 \times \frac{5}{6}$;	12) $\frac{3}{4} \times 8$;	20) $3\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$;
5) $15 \times \frac{9}{10}$;	13) $\frac{2}{3} \times 2$;	21) $\frac{5}{6} \times 7\frac{1}{2}$;
6) $7 \times \frac{33}{35}$;	14) $\frac{7}{9} \times 5$;	22) $12\frac{1}{2} \times 7\frac{7}{8}$;
7) $3 \times \frac{12}{25}$;	15) $7\frac{2}{3} \times 9$;	23) $2\frac{5}{11} \times 5\frac{2}{5}$;
8) $9 \times \frac{2}{15}$;	16) $9\frac{4}{5} \times 15$;	24) $7\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{5}$;

b. Schriftlich:

25) $45 \times \frac{24}{25}$;	30) $3610\frac{2}{3} \times 18\frac{1}{2}$;
26) $\frac{328}{715} \times 330$;	31) $215\frac{4}{5} \times 137\frac{11}{12}$;
27) $98 \times 38\frac{7}{8}$;	32) $6800 \times 12\frac{1}{2}$;
28) $\frac{15}{28} \times \frac{36}{55}$;	33) $\frac{338}{495} \times \frac{165}{169}$.
29) $\frac{9}{10} \times 12\frac{5}{6}$;	

34) Von welcher Zahl ist $7\frac{2}{3}$ der achtzehnte Theil?

35) Welche Zahl ist das Funfzehnfache von $3\frac{3}{5}$?

36) Berechne auf möglichst bequeme Weise: $\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{3} \times \frac{8}{15} \times 6\frac{3}{4} \times \frac{4}{9}$!

11. Dividire: a. Im Kopf:

1) $\frac{8}{9} : 4$;	7) $15 : \frac{3}{4}$;	13) $4 : 2\frac{2}{3}$;
2) $\frac{8}{9} : 5$;	8) $7 : \frac{2}{3}$;	14) $12 : 1\frac{1}{2}$;
3) $\frac{12}{13} : 9$;	9) $20 : \frac{15}{16}$;	15) $\frac{12}{21} : 8$;
4) $18\frac{12}{25} : 6$;	10) $2\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$;	16) $5\frac{5}{6} : \frac{2}{3}$;
5) $6\frac{2}{3} : 5$;	11) $4\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$;	17) $\frac{2}{3} : 5\frac{5}{6}$;
6) $2\frac{8}{9} : 13$;	12) $\frac{7}{8} : 4\frac{1}{2}$;	18) $2\frac{4}{9} : 2\frac{7}{9}$;

b. Schriftlich:

19) $\frac{429}{617} : 3$;	22) $\frac{135}{136} : \frac{9}{10}$;	25) $61\frac{7}{8} : 30\frac{15}{16}$;
20) $127\frac{3}{4} : 18$;	23) $65\frac{1}{2} : \frac{12}{13}$;	26) $1000\frac{1}{2} : 100\frac{1}{2}$;
21) $271 : \frac{7}{8}$;	24) $\frac{12}{13} : 65\frac{1}{2}$;	27) $54 : 5\frac{2}{5}$.

28) Wie oft ist in 60 enthalten: a. 5, b. 4, c. 3, d. 2, e. 1, f. $\frac{1}{2}$, g. $\frac{1}{3}$, h. $\frac{1}{4}$, i. $\frac{3}{4}$?

29) Berechne auf möglichst einfache Weise: $5\frac{5}{6} : \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times 2\frac{1}{7}$!

30) Ebenso: $(1\frac{2}{3} + 7\frac{5}{6}) : (\frac{5}{6} \times \frac{19}{20}) - 25\frac{2}{3} : \frac{11}{12} + 13\frac{1}{3} \times 3\frac{3}{4}$!

12. Verwandele folgende Bruchsbrüche in einfache Brüche:

a. $\frac{\frac{3}{4}}{5}$, b. $\frac{\frac{1}{4}}{2}$, c. $\frac{5}{\frac{2}{3}}$, d. $\frac{3\frac{1}{8}}{5}$, e. $\frac{7\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$, f. $\frac{3}{7\frac{1}{2}}$.

Antworten:

1) 25, 26, 40;
2) 24, 40, 96, 256 Achtel;
3) 8/5, 17/3, 53/6, 155/12; [illegible]427/15, 1678/17, 41657/115, 619660137/3008;
4) 1 2/3, 3 3/4, 4, 4 8/9, 10 5/12, 27 2/9, 7 3/7, 22 25/32, 22 87/124, 212 676/1700, 600;

5) a. 2/3, b. 3/4, c. 3/5, d. 2/3, e. 3/4, f. 7/8, g. 4/7, h. 5/7, i. 4/5, k. 1/6, l. 2/7, m. 11/12, n. 5/9, o. 7/10, p. 15/77, q. 385/1768, r. 570/667,

6) a. 6/9, b. 28/32, c. 60/100.

7) 1) 3/6, 4/6; 2) 2/4, 3/4; 3) 32/40, 35/40; 4) 6/12, 4/12, 3/12; 5) 25/30, 14/30; 6) 27/72, 16/72; 7) 35/60, 8/60; 8) 15/48, 22/48; 9) 35/63, 21/63;
10) 80/120, 90/120, 96/120, 100/120, 105/120;
11) 4455/11880, 9240/11880, 1980/11880, 2904/11880, 10560/11880, 720/11880;
12) 1176/3675, 2695/3675, 875/3675, 2625/3675, 1260/3675, 775/3675;

8) 1) 5/8; 2) 1; 3) 3/4; 4) 5/6; 5) 1 5/12; 6) 1 1/12; 7) 1 5/8; 8) 1 11/18; 9) 1 1/24; 10) 2 74/141; 11) 2 7/8; 12) 4 3/80; 13) 23 1/8; 14) 63 59/60; 15) 946 227/350; 16) 26 1/9; 17) 1046 341/720; 18) 105 263/560; 19) 2007 89/264; 20) 93 47/120.

9) 1) 3/11; 2) 7 1/4; 3) 8 1/2; 4) 11 1/5; 5) 6 1/4; 6) 7/12; 7) 1 11/16; 8) 1 3/4; 9) 6 7/18; 10) 332/3673; 11) 365 13/112; 12) 6133 13/35; 13) 768 415/728; 14) 190 2/17; 15) ~~1403/2632;~~ 16) 6 19/30; 17) 13 29/42; 18) 4815 371/780; 19) Die Brüche werden a. um 9/20, b. um 1 11/45 größer.
20) a. Der Bruch wird um 7/60 größer; b. der Bruch wird um 7/36 kleiner.

10) 1) 5/9; 2) 6 1/8; 3) 3 1/2; 4) 6 2/3; 5) 13 1/2; 6) 6 3/5; 7) 1 11/25; 8) 1 1/5; 9) 3 3/4; 10) 12 1/2; 11) 22 1/2; 12) 6; 13) 1 1/3; 14) 3 8/9; 15) 69; 16) 147; 17) 3/10; 18) 35/48; 19) 11/15; 20) 3; 21) 6 1/4; 22) 98 7/16; 23) 13 14/55; 24) 27; 25) 43 1/5; 26) 151 5/13; 27) 3809 3/4; 28) 27/77; 29) 11 11/20; 30) 66797 1/3; 31) 29762 5/12; 32) 85000; 33) 2/3; 34) 138; 35) 54; 36) 2.

11) 1) 2/9; 2) 8/45; 3) 4/39; 4) 3 2/25; 5) 1 1/3; 6) 2/9; 7) 20; 8) 10 1/2; 9) 21 1/3; 10) 1; 11) 7 1/5; 12) 7/36; 13) 1 1/2; 14) 8; 15) 1/14; 16) 8 3/4; 17) 4/35; 18) 22/25; 19) 143/617; 20) 7 7/72; 21) 309 5/7; 22) 1 7/68; 23) 70 23/24; 24) 24/1703;

25) 2; 26) $9\frac{64}{67}$; 27) 10;
28) a. 12, b. 15, c. 20, d. 30, e. 60, f. 120, g. 180, h. 240, i. 80;
29) 30; 30) 34.

12) a. $\frac{3}{20}$, b. $\frac{1}{8}$, c. $7\frac{1}{2}$, d. $\frac{5}{8}$, e. $9\frac{1}{5}$, f. $\frac{2}{5}$.

c. Von den Decimalbrüchen.

1. Schreibe in Form der Decimalbrüche:

a. $\frac{12}{10}$, b. $\frac{365}{100}$, c. $\frac{267642}{10000}$, d. $\frac{170003267}{1000000}$, e. $\frac{25}{100}$, f. $\frac{5}{10}$, g. $\frac{27}{1000}$, h. $\frac{312}{10000000}$, i. $\frac{600}{100000}$!

2. Lies auf dreifache Weise: a. 1,317; b. 26,7403; c. 0,263; d. 0,00263704.

3. Zergliedere den Bruch 3,752 auf siebenfache Weise!

4. Addire:

1) 0,4 + 0,5 + 0,6;
2) 3,6 + 14,73 + 0,623 + 39,4;
3) 0,0018 + 2,173 + 65,32 + 0,987 + 6,54 + 3,2 + 0,1;
4) 3,15 + 2,3716 + 0,036 + 0,7096;
5) 0,327 + 23,6435 + 10,452 + 9,95856 + 271,28 + 95,26574;
6) 5,73204 + 64,369756 + 0,74862 + 9,5 + 38,422008 + 7,18513 + 49,016432.

5. Subtrahire:

1) 0,7 — 0,4;
2) 3,785 — 1,342;
3) 36,5925 — 23,5782;
4) 261,543 — 98,69;
5) 123,62 — 85,5378;
6) 0,7326 — 0,003265;
7) 826,738 — 239,284326;
8) (3,6 + 0,05) — 2,345;
9) (3,6 — 0,05) + 2,345;
10) (3,6 — 0,05) — 2,345.

6. Multiplicire:

1) 10 × 7,63;
2) 1000 × 3,703;
3) 100 × 26,3;
4) 10000 × 8,6;
5) 4 × 0,2;
6) 0,4 × 0,2;
7) 3,65 × 78,623;
8) 635 × 0,034;
9) 45,603 × 6,094;
10) 0,03745 × 0,056009;
11) 2,6374 × 0,705;
12) 0,0074 × 0,000086.

7. Dividire:

1) 86,7 : 10;
2) 3045,2 : 1000;
3) 48,32 : 100;
4) 2,36 : 10000;
5) 0,03 : 1000;
6) 0,9 : 3;
7) 8,268 : 4;
8) 0,5265 : 9;
9) 307,7945 : 65;
10) 266,6846 : 364;
11) 20,4 : 625;
12) 19,72 : 5,8;
13) 203,5888 : 3,62;
14) 7,6 : 3,54;
15) 36,54 : 2,6374;
16) 725 : 64;
17) 35 : 364;
18) 712 : 4,65;
19) 370,8 : 0,0045;
20) 1 : 0,111.

8. Verwandele in Decimalbrüche:

1) $^1/_2$;
2) $^3/_4$;
3) $^5/_8$;
4) $^{11}/_{32}$;
5) $^{46}/_{125}$;
6) $^{31}/_{200}$;
7) $^2/_3$;
8) $^7/_{11}$;
9) $^{85}/_{101}$;
10) $^3/_7$;
11) $^5/_{12}$;
12) $^{12}/_{370}$;
13) $^{31}/_{3030}$;
14) $^5/_{27}$;
15) $8^6/_{17}$;
16) $12^{17}/_{18}$.

9. Verwandele in gewöhnliche Brüche:

1) 0,875;
2) 7,6875;
3) 26,2345...;
4) 0,002708...;
5) $0,\overline{6}66$...;
6) $0,\overline{72}7272$...;
7) $12,\overline{357}357357$..;
8) $7,\overline{1234}1234$..;
9) $0,6\overline{24}2424$...;
10) $8,76\overline{3}33$...;
11) $26,344\overline{34}34$..;
12) $0,00\overline{36}3636$....

10. Multiplicire auf abgekürzte Weise:

1) 2,56739... × 0,48076....;
2) 56,0374 ... × 4,0325...;
3) 0,071826... × 0,004917...;
4) 763,562 × 1,715;
5) 8,2136 × 36,5006;
6) 45,21304 × 0,00079.

11. Dividire auf abgekürzte Weise:

1) 6,32645...: 0,34645...;
2) 34,357 : 3,7846;
3) 2 : 7,364306...;
4) 7,5 : 0,03904513.

Antworten:

4) 1) 1,5; 2) 58,353; 3) 78,3218; 4) 6,2672; 5) 410,9268; 6) 174,973986;

5) 1) 0,3; 2) 2,443; 3) 13,0143; 4) 162,853; 5) 38,0822; 6) 0,729335; 7) 587,453674; 8) 1,305; 9) 5,895; 10) 1,205;

6) 1) 76,3; 2) 3703; 3) 2630; 4) 86000; 5) 0,8; 6) 0,08; 7) 286,97395; 8) 21,59; 9) 277,904682; 10) 0,00209753705; 11) 1,859367; 12) 0,0000006364.

7) 1) 8,67; 2) 3,0452; 3) 0,4832; 4) 0,000236; 5) 0,00003; 6) 0,3; 7) 2,067; 8) 0,0585; 9) 4,7353; 10) 0,73265; 11) 0,03264; 12) 3,4; 13) 56,24; 14) 2,14689...; 15) 13,85455...; 16) 11,328125; 17) 0,09615....; 18) 153,11828...; 19) 82400; 20) $9,\overline{009}009$....

8) 1) 0,5; 2) 0,75; 3) 0,625; 4) 0,34375; 5) 0,368; 6) 0,155; 7) $0,\overline{6}66$...; 8) $0,\overline{63}6363$...; 9) $0,\overline{84158}415$...; 10) $0,\overline{428571}428571$...; 11) $0,41\overline{6}66$; 12) $0,0\overline{324}324$...; 13) $0,0\overline{10231}023$...; 14) $0,\overline{185}185$...; 15) 8,35294....; 16) $12,9\overline{4}4$.

9) 1) $\frac{7}{8}$; 2) $7\frac{11}{16}$; 3) $26\frac{469}{2000}$; 4) $\frac{677}{250000}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{8}{11}$; 7) $12\frac{119}{333}$; 8) $7\frac{1234}{9999}$; 9) $\frac{103}{165}$; 10) $8\frac{229}{300}$; 11) $26\frac{3409}{9900}$; 12) $\frac{1}{275}$.

1) 1,234298...; 2) 225,9708...; 3) 0,000353168...; 4) 1309,509...; 5) 299,8013...; 6) 0,035718302...

11) 1) 18,261...; 2) 9,0781...; 3) 0,27158...; 4) 192,085415...

Vierter Abschnitt.

Grundrechnungsarten mit benannten Zahlen.

I. Resolviren.

Berechne im Kopf:

a. Wieviel Pfennige sind:

1) 3 Mk., 2) 17 Mk., 3) $\frac{1}{2}$ Mk., 4) $\frac{4}{5}$ Mk., 5) $6\frac{2}{5}$ Mk., 6) $8\frac{1}{2}$ Mk., 7) 9 Mk. 85 Pf., 8) 12 Mk. 12 Pf., 9) 16 Mk. 8 Pf., 10) 25 Mk. 2 Pf.?

b. Wieviel Silbergroschen sind?

11) 4 Thlr., 12) 9 Thlr., 13) 12 Thlr., 14) 84 Thlr., 15) $\frac{1}{2}$ Thlr., 16) $\frac{1}{3}$ Thlr., 17) $\frac{2}{3}$ Thlr., 18) $\frac{1}{4}$ Thlr., 19) $\frac{3}{4}$ Thlr., 20) $\frac{5}{6}$ Thlr., 21) $\frac{2}{5}$ Thlr., 22) $\frac{5}{8}$ Thlr.

c. Wieviel Pfennige (alte) sind:

23) 8 *sgr*, 24) 14 *sgr*, 25) 1 Thlr., 26) 5 Thlr., 27) $\frac{1}{2}$ *sgr*, 28) $\frac{1}{3}$ *sgr*, 29) $\frac{1}{4}$ *sgr*, 30) $\frac{1}{6}$ *sgr*, 31) $\frac{2}{3}$ *sgr*, 32) $\frac{3}{4}$ *sgr*, 33) $\frac{5}{6}$ *sgr*, 34) $\frac{3}{5}$ *sgr*?

d. Verwandele

35) 12 Mandel in Stück,
36) $5^1/_2$ Schock „ „
37) 8 Tage 6 Stunden in Stunden,
38) 14 Dutz. 5 St. „ Stück,
39) 6 Buch 20 Bogen in Bogen,
40) 7^{m} 22^{cm} „ cm.
41) 12 k. 8 gr. „ dgr.
42) 15 Hltr. 12 Ltr. „ Ltr.

Berechne schriftlich:

e. Wieviel Pfennige sind:

43) 183,67 Mk., 44) 0,37 Mk., 45) 20,08 Mk., 46) 360,7 Mk.

f. 47) 3815 ß = ? ₰,
48) 7085 Ctr. = ? k. (Kgr.)
49) 575 Meilen = ? ^{m},
50) 2809 Tage = ? Minuten,
51) $^5/_7$ ß = *sgr* und ₰,
52) $8^7/_8$ Guld. südd. = ? Kreuzer,

53) Wieviel Pfennige sind 45 ß 24 *sgr* 6 ₰?

54) Verwandele 3675 Neuschffl. $38^3/_8$ Ltr. in Achtelltr.!

55) Drücke 52 Ballen 5 Ries $18^3/_4$ Buch Schreibpapier in Bogen aus!

56) Ein Mann ist im Januar 1776 geboren und 92 Jahre 263 Tage 10 Stunden 8 Minuten alt geworden; wie viel Minuten hat er gelebt? (Beachte die Schaltjahre.)

g. Löse in die niederen Maßeinheiten auf:

57) $0{,}364^{m}$,
58) $2{,}003042^{Km}$,
59) $15{,}3008503\,\square^{m}$,
60) $4{,}1300467$ Kb^{dm}
61) 237,20389 k (Kgr.),
62) 1,8030046 Tonnen.

63) Wieviel Millimeter sind 8^{Km} 6^{Dm} 2^{m} 8^{mm}?

64) Verwandele 3 k. (Kgr.) 28 gr. 6 cgr. in Milligramm!

Antworten:

1) 300 ₰,	12) 270 *sgr*,	23) 96 ₰,	34) $7^1/_5$ ₰,
2) 1700 ₰,	13) 360 *sgr*,	24) 168 ₰,	35) 180 St.,
3) 50 ₰,	14) 2520 *sgr*,	25) 360 ₰,	36) 330 St.,
4) 80 ₰,	15) 15 *sgr*,	26) 1800 ₰,	37) 198 Std.,
5) 640 ₰,	16) 10 *sgr*,	27) 6 ₰,	38) 173 St.,
6) 850 ₰,	17) 20 *sgr*,	28) 4 ₰,	39) 164 Bogen.
7) 985 ₰,	18) $7^1/_2$ *sgr*,	29) 3 ₰,	40) 722 ^{cm},
8) 1212 ₰,	19) $22^1/_2$ *sgr*,	30) 2 ₰,	41) 120080 $^{dgr.}$,
9) 1608 ₰,	20) 25 *sgr*,	31) 8 ₰,	42) 1512 Ltr.
10) 2502 ₰,	21) 12 *sgr*,	32) 9 ₰,	
11) 120 *sgr*,	22) $18^3/_4$ *sgr*,	33) 10 ₰,	

43) 18367 ₰,	48) 354250,	53) 16494,
44) 37 ₰.	49) 4312500,	54) 1470307,
45) 2008 ₰,	50) 4044960,	55) 252450,
46) 36070 ₰,	51) 21 *sgr* $5^1/_7$ ₰,	56) 48767648,
47) 1373400,	52) $532^1/_2$,	

57) 3^{dm} 6^{cm} 4^{mm},	61) 237 k (Kgr.) 203,89 gr.
58) 2^{Km} 3^{m} 4^{cm} 2^{mm},	62) 1 T 803 k (Kgr.) 4,6 gr.
59) $15\square^{m}\ 30\square^{dm}\ 8\square^{cm}\ 50{,}8\square^{mm}$,	63) 8062008 ^{mm},
60) 4 Kb^{dm} 130 Kb^{cm} 46,7 Kb^{mm},	64) 3028060 mgr.

II. Reduciren.

Berechne im Kopf:

a. Wieviel Mark und Pfennige sind:

1) 312 ₰, 2) 7356 ₰, 3) 1008 ₰, 4) 3600 ₰, 5) 9820 ₰, 6) 1003 ₰?

b. Wieviel Thaler und Silbergroschen sind:

7) 48 *sgr*, 8) 88 *sgr*, 9) 112 *sgr*, 10) 135 *sgr*, 11) 302 *sgr*?

c. Verwandele in eine mehrfach benannte Zahl:

12) 20 ₰, 13) 31 ₰, 14) 47 ₰, 15) 82 ₰, 16) 130 ₰?

d. Drücke als Thalerbruch aus:

17) 15 *sgr*, 18) 25 *sgr*, 19) 7 *sgr* 6 ₰, 20) 12 *sgr* 6 ₰, 21) 27 *sgr* 6 ₰!*)

e. Verwandele in einen Silbergroschenbruch:

22) 6 ₰, 23) 4 ₰, 24) 8 ₰, 25) 10 ₰, 26) $2^2/_5$ ₰!

f. 27) 72 Stück = ? Mdl. u. Stck.,
28) 300 Minut. = ? Stunden,
29) 230 Ltr. = ? Schffl. u. Ltr.,
30) 635 ^{cm} = ? ^{m} u. ^{cm}.,
31) 3608 gr. = ? k. u. gr.
32) 3 ^{cm} 8 ^{mm} = ? ^{m}.

Berechne schriftlich:

g. Reducire so weit als möglich:

33) 783265 ₰ (in Mark)
34) 300268 ₰ (in 10-Markst. 2c.),
35) 6378 ₰ (in 20-Markst. 2c.),
36) 208432 ₰ (in 20-Markst. 2c.),
37) 76823 *sgr*,
38) 300465 ₰,
39) 7804185 Secunden,
40) 3419286 Bogen,
41) 27030046 ^{mm},
42) 5030080703 □ ^{cm},
43) 2000450004 Kb ^{cm},
44) 846230040004 mgr.

h. 45) 18 *sgr* 9 ₰ = ? ℛ,
46) 2 ℛ 28 *sgr* $1^1/_2$ ₰ = ? ℛ,
47) 9 Rs 11 Bch $2^2/_3$ Bg = ? Ball.,
48) 563,2 □ ^{m} = ? Ar,
49) 3 ^{m} 8 ^{cm} 4 ^{mm} = ? ^{Dm},
50) 316 □ ^{cm} 7 □ ^{mm} = ? □ ^{m},
51) 6 Tg. 17 Stund. 8 Minut. $34^2/_7$ Secunden = ? Tage.

i. Löse in alle höheren und niederen Maßeinheiten auf:

52) 3640,30045 ^{Dm},
53) 17043,00954 □ ^{dm},
54) 5306000,07846 Kb ^{cm},
55) 263450,0376 Dgr..
56) Wieviel Km, Dm, m, cm und mm sind 6340,0456 ^{m}?
57) Verwandele 540320,004 Neuloth in Ctr., ℔, Neuloth, gr., dgr. und cgr.!

---

*) Es fehlen $2^1/_2$ *sgr* = $^1/_{12}$ ℛ an 1 ℛ, also sind 27 *sgr* 6 ₰ = $^{11}/_{12}$ ℛ.

Antworten:

1) 3 Mk. 12 ₰,	9) 3 ℛ 22 *sgr*,	17) $^1/_2$ ℛ,	25) $^5/_6$ *sgr*,
2) 73 „ 56 „	10) 4 „ 15 „	18) $^5/_6$ „	26) $^1/_5$ „
3) 10 „ 8 „	11) 10 „ 2 „	19) $^1/_4$ ℛ,	27) 4 Mdl. 12 St.,
4) 36 „ — „	12) 1 *sgr* 8 ₰	20) $^5/_{12}$ ℛ,	28) 5 Stunden,
5) 98 „ 20 „	13) 2 „ 7 „	21) $^{11}/_{12}$ ℛ,	29) 4 Schffl. 30 Ltr.
6) 10 „ 3 „	14) 3 „ 11 „	22) $^1/_2$ *sgr*,	30) 6^m 35^{cm},
7) 1 ℛ 18 *sgr*,	15) 6 „ 10 „	23) $^1/_3$ „	31) 3 k. 608 gr.,
8) 2 „ 28 „	16) 10 „ 10 „	24) $^2/_3$ „	32) $0,038^m$.

33) 7832 Mk. 65 ₰,	40) 712 Ball. 3 Ries 10 Buch 6 Bg.,
34) 300 Zehnmk. 2 Mk. 68 ₰,	41) 27^{Km} 3^{Dm} 4^{cm} 6^{mm},
35) 3 Zwanzigmk. 3 Mk. 78 ₰,	42) 50 $□^{Hm}$ 30 $□^{Dm}$ 8 $□^{m}$ 7 $□^{dm}$ 3 $□^{cm}$,
36) 104 „ 4 „ 32 „	43) 2 Kb^{Dm}, 450 Kb^{dm}, 4 Kb^{cm},
37) 2560 ℛ 23 *sgr*,	44) 846 T 230 Kgr. 4 Dgr. 4 mgr.
38) 834 ℛ 18 *sgr* 9 ₰,	
39) 90 Tage 7 Stund. 49 Minut. 45 Secunden,	

45) $^5/_8$ ℛ,	47) $^{43}/_{45}$ Ball.,	49) $0,3084^{Dm}$,	51) $6^5/_7$ Tag.
46) $2^{15}/_{16}$ ℛ,	48) 5,632 Ar,	50) 0,031607 $□^m$,	

52) 36^{Km} 4^{Hm} 3^m $4,5^{mm}$,	55) 2 T 634 Kgr. 5 Hgr. 3 dgr. 7 cgr. 6 mgr.
53) 1 $□^{Dm}$ 70 $□^m$ 43 $□^{dm}$ 95,4 $□^{mm}$,	56) 6^{Km} 3^{Hm} 4^{Dm} 4^{cm} $5,6^{mm}$,
54) 5 Kb^m 306 Kb^{dm} 78,46 Kb^{mm},	57) 108 Ctr. 6 ℔ 20 Nlth. 4 cgr.

III. Addiren benannter Zahlen.

1. Berechne: a. 32 Mk. 27 ₰ + 6 Mk. 39 ₰ + 315 Mk. 6 ₰. b. 135 Mk. 57 ₰ + 7314 Mk. + 12 Mk. 85 ₰ + 576 Mk. 9 ₰ + 682 Mk. + 72 ₰ + 3892 Mk. 5 ₰ + 7032 Mk. 35 ₰.

2. Nach amtlichen Mittheilungen gab Preußen in Folge des 1866 gegen Oesterreich geführten Krieges aus: 25500000 ℛ Mobilmachungskosten, 39800000 ℛ laufende Mehrkosten gegen den Friedensetat, 1800000 ℛ Demobilmachungskosten, 27000000 ℛ Retablissementskosten; wieviel also im Ganzen? Wieviel Mark sind dies?

3. Wie schwer ist eine zum Verfeuern fertig gemachte gez. 8^{cm} Granate? Es wiegt im Durchschnitt der Eisenkern 2 k. 483,3 gr., der Bleimantel 1,5 k., die Sprengladung 166,7 gr., die Bolzenkapsel 5,83 gr., der Nadelbolzen 39,16 gr., die Mundlochschraube 19,99 gr., die Zündschraube 8,33 gr. und der Vorstecker 6,7 gr.

4. Bei einer Brigadeschießübung wurden verausgabt:

a.	für Munitionsmaterialien.............	820 ℛ	27 sgr	8 ₰
b.	für Material zu den Scheiben..........	604 „	12 „	9 „
c.	für Bettungs- und Batteriebaumaterialien	356 „	28 „	11 „
d.	für Schanz- und Werkzeug...........	97 „	— „	3 „
e.	für Unterhaltung der Baulichkeiten.....	92 „	17 „	9 „
f.	für Transportkosten................	85 „	23 „	— „
g.	für Schreibmaterialien...............	29 „	16 „	6 „
h.	für diverse (verschiedene) Bedürfnisse.....	70 „	20 „	10 „

Wieviel beträgt dies im Ganzen? Wieviel in Mark und Pfennigen?

5. Berechne: 112 ℛ 17 sgr $8\frac{3}{4}$ ₰ + 98 ℛ 25 sgr $9\frac{1}{2}$ ₰ + 304 ℛ $5\frac{3}{4}$ ₰ + 816 ℛ 17 sgr + 26 ℛ 18 sgr $4\frac{5}{8}$ ₰!

6. Wie groß ist die Summe von 15 Ballen 6 Ries $8\frac{5}{8}$ Buch, 26 Ballen 7 Ries $12\frac{1}{4}$ Buch, 3 Ries $18\frac{5}{6}$ Buch, 113 Ball. 9 Buch, 7 Ballen 3 Ries $19\frac{2}{9}$ Buch, 15 Ballen 8 Ries $1\frac{2}{3}$ Buch?

7. Ein Gespannführer hat 5 Fässer geladen. Diese wiegen: 3 Ctr. 85 ℔ $45\frac{1}{2}$ Loth, 6 Ctr. 17 ℔ 8 Loth, 5 Ctr. 76 ℔ $14\frac{3}{4}$ Loth, 4 Ctr. 38 ℔ $22\frac{5}{8}$ Loth und 5 Ctr. 89 ℔ $17\frac{3}{4}$ Loth. Wie schwer hat er zu fahren?

8. Berechne: a. $37^{Dm}\ 8^{m}\ 3{,}2^{cm} + 48^{Dm}\ 2^{m}\ 5^{cm}\ 4^{mm} + 9^{m}\ 7^{dm}\ 8{,}5^{cm} + 50^{Dm}\ 4^{m}\ 9^{cm}\ 1^{mm}$!

b. $37\square^{m}\ 8\square^{cm}\ 29\square^{mm} + 95\square^{m}\ 25\square^{dm}\ 78\square^{cm} + 85\square^{m}\ 68\square^{cm}\ 9{,}2\square^{mm} + 36\square^{m}\ 127\square^{cm}$!

c. 3815 k. 15 gr. + 1097 k. 98 gr. + 754 k. 87 gr. + 590 k. 91 gr. + 8776 k. 79 gr. + 454 k. 92 gr.

9. Friedrich der Große wurde am 24. Januar 1712 geboren und erreichte ein Alter von 74 Jahren 6 Monaten und 23 Tagen; wann ist er hiernach gestorben?

10. Wieviel betragen in Oestreich: 232 Fl. 36 Kr., 56 Fl. 80 Kr., 198 Fl. 64 Kr. und 250 Fl. 75 Kr.?

11. Wie groß ist der Umfang eines Feldes, dessen Seiten $34^{Dm}\ 6^{m}\ 68^{cm}$, $40^{Dm}\ 5^{m}\ 39^{cm}$, $38^{Dm}\ 8^{m}\ 40^{cm}$ und $40^{Dm}\ 5^{m}\ 38^{cm}$ betragen?

12. Es wurden nach und nach an Hafer empfangen: 62 Schffl. 3 Ltr., 8 Schffl. 45 Ltr., 123 Schffl. 9 Ltr., 5 Schffl. 25 Ltr., 213 Schffl. 37 Ltr.; wieviel im Ganzen?

13. 712 Hect. 53 Ar + 612 Hect. 12 Ar + 95 Hect. 8 Ar + 335 Hect. 37 Ar.

Antworten:

1) a. 353 Mk. 72 ₰, b. 19645 „ 63 „
2) a. 94100000 Thlr., b. 282300000 Mk.,
3) 4 k. 230,01 gr.,
4) a. 2157 Thlr. 27 *sgr* 8 ₰, b. 6473 Mk. 76,6 ₰,
5) 1358 Thlr. 19 *sgr* $4\frac{5}{8}$ ₰,
6) 179 Ball. $9\frac{43}{72}$ Bch.,
7) 26 Ctr. 7 ℔ $8\frac{5}{8}$ Lth.,
8) a. 1 ^{Km} 3 ^{Hm} 7 ^{Dm} 3 ^{m} 9 ^{dm}, b. 2 □^{Dm} 53 □^{m} 27 □^{dm} 81 □^{cm} 38,2 □^{mm}, c. 15486 k. 462 gr.,
9) 1786, den 17. Aug.,
10) 738 Fl. 55 Kr.,
11) 154^{Dm} 5^{m} 85^{dm},
12) 414 Schffl. 19 Ltr.,
13) 1755 Hect. 10 Ar.

IV. Subtrahiren benannter Zahlen.

1. a. 367 Mk. 57 ₰ — 292 Mk. 32 ₰. b. 85 Mk. — 58 Mk. 8 ₰. c. 812 Mk. 36 ₰ — 258 Mk. 59 ₰. d. 35 20=Mark — 16 Mk. 8 ₰.

2. Wieviel behält man, wenn man 23005 Mk. 78 ₰ von 47802 Mk. 12 ₰ ausgiebt?

3. Von 12 Hltr. 43 Ltr. nimm 8 Hltr. 1 Schffl. 15 Ltr.

4. Die 9^{cm} gez. Granate wiegt durchschnittlich 6,88 k., die 9^{cm} Kartätsche 5,25 k.; wie groß ist die Gewichtsdifferenz?

5. Zur Anfertigung von Raketen und Zündlichten sind 28 Ries 16 Buch 3 Bogen Papier veranschlagt, aber nur 27 Ries 19 Buch 14 Bogen verbraucht; wieviel Papier ist erspart worden?

6. Wie hoch ist ein Kostenanschlag überstiegen, wenn 294 Thlr. 18 *sgr* 6 ₰ statt der veranschlagten 225 Thlr. 12 *sgr* 3 ₰ verausgabt worden sind?

7. Berechne: a. 35^{Dm} 4^{m} 7^{dc} 8,2^{cm} — 28^{Dm} 7^{m} 3^{dc} 5,7^{mm};
b. 270$^{H.Ar}$ 71,5^{Ar} — 149$^{H.Ar}$ 34,9^{Ar};
c. 5004 □^{Km} 15 □^{Dm} 7 □^{cm} 8,4 □^{mm} — 914 □^{Km} 8 □^{m} 23,75 □^{cm};
d. 518 Kb^{m} 70 Kb^{cm} 3,45 Kb^{mm} — 372 Kb^{m} 3840 Kb^{cm} 45,7 Kb^{mm}!

8. Ein Kaufmann hat die Lieferung von $3848\frac{3}{4}$^{m} Seidentuch und $2516\frac{1}{2}$^{m} Baumwollenzeug übernommen, und nach und nach 1800^{m} Seidentuch, $568\frac{1}{2}$^{m} Seidentuch, $965\frac{5}{8}$^{m} Baumwollenzeug, $713\frac{1}{2}$^{m} Seidentuch, $1225\frac{3}{4}$^{m} Baumwollenzeug geschickt; wieviel hat er noch zu liefern?

9. Die kürzeste Nacht dauert in Berlin 7 Stunden 13 Minuten, und die längste 16 Stunden 24 Minuten; um wieviel währt diese länger als jene?

10. Ziehe ab a. 35 Thlr. 22 *sgr* $8\frac{3}{4}$ ₰ von 172 Thlr. 15 *sgr* $10\frac{1}{2}$ ₰;
b. 632 Ctr. 48 ℔ $42\frac{3}{8}$ Neuloth von 1030 Ctr. 90 ℔ $13\frac{5}{6}$ Neuloth;
c. 819 Neuschffl. $32\frac{1}{2}$ Ltr. von 2100 Neuschffl. $13\frac{3}{5}$ Ltr.;
d. 96 Schock 3 Mdl. 12 Stück von 701 Schock 1 Mdl. 5 Stück!

11. Wie lange währt a. der Tag, b. die Nacht, wenn die Sonne um 3 Uhr $37\frac{1}{2}$ Minuten auf und um 8 Uhr $23\frac{3}{4}$ Minuten untergeht?

12. Wie alt war König Wilhelm I. am Tage der Kapitulation und Gefangennahme Napoleon III. bei Sedan? (Geburtstag: 22. März 1797; Datum genannter Kapitulation: 2. September 1870.)

13. Ziethen starb am Morgen des 26. Januar 1786 86 Jahre 8 Monate und 8 Tage alt, wann wurde er geboren?

14. Eine telegraphische Depesche, welche um 3 Uhr 45 Minuten 48 Sekunden in Berlin aufgegeben wurde, traf in Köln um 3 Uhr 41 Minuten 56 Sekunden (Kölner Zeit) ein. Wie lange ist dieselbe unterwegs gewesen? Die richtig gehende kölner Uhr geht im Vergleich zur Berliner Uhr 25 Minuten 41 Sekunden nach.

15. An einem Festungsthore steht: Erbaut MDXLIV; wie alt war dieses Thor im Jahre 1873?

16. Ein Dampfschiff fuhr am 6. April, Nachmittags $4^3/_4$ Uhr, von Hamburg ab und landete am 20. April, Morgens 5 Uhr, in New-York. Wie lange hatte die Reise gedauert?

17. 1763 den 15. Februar wurde der Friede zu Hubertsburg geschlossen und damit der 7jährige Krieg beendigt. Wenn nun dieser Krieg genau 6 Jahre 5 Monate 17 Tage gedauert hat, wann muß er dann seinen Anfang genommen haben?

18. Von 36 Groß Stahlfedern wurden 2 Groß 8 Dtz., dann 14 Dtz. 8 Stck. und hierauf noch 21 Groß $7^1/_2$ Dtz. verkauft; wieviel blieben übrig?

Antworten:

1) a. 75 Mk. 25 ₰,
   b. 26 „ 92 „
   c. 553 „ 77 „
   d. 683 „ 92 „
2) 24796 Mk. 34 ₰,
3) 3 Hltr. 78 Ltr.,
4) 1,63 k.,
5) 16 Buch 13 Bogen,
6) 69 ℛ 6 *sgr* 3 ₰,
7) a. $6^{Dm}\ 7^{m}\ 4^{dm}\ 7^{cm}\ 6{,}3^{mm}$,
   b. $121^{H.Ar}\ 36{,}6^{Ar}$,
   c. $4090\,\square^{Km}\ 14\,\square^{Dm}\ 91\,\square^{m}\ 99\,\square^{dm}\ 73\,\square^{cm}\ 33{,}4\,\square^{mm}$,
   d. $145\,Kb^{m}\ 996\,Kb^{dm}\ 229\,Kb^{cm}\ 957{,}75\,Kb^{mm}$.
8) a. $766^3/_4{}^{m}$ Seidentuch,
   b. $325^1/_8{}^{m}$ Baumwollenzeug,
9) 9 St. 11 Min.
10) a. 136 ℛ 23 *sgr* $1^3/_4$ ₰,
   b. 398 Ctr. 41 ℔ $21^{11}/_{24}$ Rlth.,
   c. 1280 Schffl. $31^1/_{10}$ Ltr.,
   d. 604 Sch. 1 Mdl. 8 St.,
11) a. 16 St. $46^1/_4$ Min.,
   b. 7 „ $13^3/_4$ „
12) 73 J. 5 Mt. 10 Tg.,
13) 1699, den 18. Mai.
14) 21 Min. 49 Sek.,
15) 329 Jahre,
16) 13 Tg. 12 St.,
17) 1756, den 29. August,
18) 10 Groß 5 Dtz. 10 St.

V. Multipliciren benannter Zahlen.

1. a. 12 × 24 Mk. 98 ₰*); b. 57 × 31 ℔ 49 Nlth.; c. 375 × 19 Hltr. 99 Ltr.*)

2. a. 50 × 6 Schffl. 3 Ltr.*); b. 100 × 2 Schffl. 15 Ltr.*; c. 300 × 4 Faß 29 Ltr.*)

3. a. 19 × 24^{m} 8^{cm}*); b. 39 × 30 ℔ 5 Nlth.; c. 59 × 6 Mk. 28 ₰.

4. Wieviel Pulver ist zu 5 Wurf aus dem Probirmörser nöthig, wenn zu jedem Wurf 87,7 gr. genommen werden?

5. Wie schwer ist ein Wagen belastet, auf welchem 65 — 23^{cm} Granaten transportirt werden? — Die 23^{cm} Granate wiegt im Durchschnitt 28 k. 300 gr.

6. Eine Kommune hat 4 Unterofficiere 25 Gemeine auf 2 Tage mit Verpflegung einquartiert. Wieviel hat der Kommandoführer zu zahlen, wenn pro Mann und Tag $^{1}/_{2}$ Mk. vergütet werden?

7. Ein marschirender Truppentheil hat 3 Vorspannpferde $3^{1}/_{2}$ Meilen weit benutzt; wieviel hat er zu zahlen, wenn pro Pferd und Meile 75 ₰ vergütet werden?

8. Wie lang ist ungefähr das 12 Centimeter Mörserrohr, da seine Länge circa $3^{1}/_{4}$ Kaliber und der Mündungsdurchmesser 14,7^{cm} beträgt?

9. Berechne: a. 46 × (32 ℛ 17 *sgr* $10^{3}/_{4}$ ₰), b. $32^{5}/_{6}$ × (27 Ctr. 54 ℔ $36^{5}/_{8}$ Neuloth), c. $52^{4}/_{5}$ × (54 Ball. 7 Ries 16 Buch $15^{1}/_{2}$ Bogen).

10. a. 46 × (5^{Km} 4^{Dm} 2^{m} 8,34^{cm}), b. 507 × (147 □^{m} 6 □^{cm} 98,4 □^{mm}), c. 780 × (3045 Kb^{m} 39 Kb^{dm} 8 Kb^{mm}).

11. Wieviel hat man für 26 Ries $15^{5}/_{6}$ Buch zu zahlen, wenn das Ries zu 2 ℛ $12^{3}/_{4}$ *sgr* gerechnet wird?

12. Wieviel gelten $308^{1}/_{2}$ Louisdor à 5 ℛ $17^{1}/_{2}$ *sgr*?

13. Verwandele in Mark und Pfennige des neuen Münzgesetzes:

a. 24 ℛ,	e. 12 ₰,	i. 5 ₰,	n. 3 ℛ $12^{1}/_{2}$ *sgr*,
b. 20 *sgr*,	f. 6 ₰,	k. 3 ₰,	o. 15 ℛ 18 *sgr* 9 ₰,
c. 18 *sgr*,	g. 8 ₰,	l. 13 *sgr* 8 ₰,	p. 63 ℛ 22 *sgr* 11 ₰,
d. 3 ℛ 24 *sgr*,	h. 9 ₰,	m. 8 *sgr* 4 ₰,	q. 3 Frdr.

*) Anwendung von Vortheilen.

14. Verwandelung alter Maße und Gewichte in metrisches Maß; a. annähernd, b. genau.

a. $1600^{\times} = ?$ m
b. $2750^{\times} = ?$ m
c. $1055{,}5' = ?$ m
d. $77'' = ?$ cm
e. $0{,}6'' = ?$ mm
f. $7^{0}\,9'\,2'' = ?$ Dm
g. $32\frac{1}{2}$ Ellen = ? m
h. 5400 Meilen = ? N. Meilen.
i. $18\frac{3}{4}\square' = ?\ \square^{m}$
k. 325 Morgen = ? Hect.
l. $3\frac{3}{4}$ Metzen = ? Ltr.
m. $16\frac{3}{4}$ Klafter = ? Kb^{m}
n. $315\frac{5}{8}$ Quart = ? Ltr.
o. 13,8 ℔ = ? k.
p. 56 ℔ 18 Loth = ? k.
q. 29 Cent = ? gr.

Antworten:

1) a. 299 Mk. 76 ₰
b. 1822 ℔ 43 Nlth.
c. 7496 Hltr. 25 Ltr.
2) a. 303 Schffl.
b. 230 „
c. 1287 Faß
3) a. 457^{m} 52^{cm}
b. 1173 ℔ 45 Nlth.
c. 370 Mk. 52 ₰
4) 438,5 gr.
5) 1839,5 k.
6) 29 Mk.
7) 7 Mk. 87,5 ₰
8) $47{,}775^{cm}$.

9) a. 1499 ℛ 13 *sgr* $2\frac{1}{2}$ ₰, b. 904 Ctr. 47 ℔ $2\frac{25}{48}$ Nlth.
c. 2892 Ball. 5 Rs. 10 Buch $21\frac{3}{5}$ Bogen.
10) a. 231^{Km} 9^{Hm} 3^{Dm} 5^{m} 8^{dm} $3{,}64^{cm}$,
b. $7\square^{Hm}$ $45\square^{Dm}$ $29\square^{m}$ $35\square^{dm}$ $40\square^{cm}$ $88{,}8\square^{mm}$,
c. $2 Kb^{Hm}$ $375 Kb^{Dm}$ $130 Kb^{m}$ $420 Kb^{dm}$ $6 Kb^{cm}$ $240 Kb^{mm}$.

11) 64 ℛ 29 *sgr* $1\frac{1}{8}$ ₰
12) 1722 ℛ 13 *sgr* 9 ₰
13) a. 72 Mk.
b. 2 „
c. 1 Mk. 80 ₰
d. 11 „ 40 „
e. 10 ₰
f. 5 „
g. $6\frac{2}{3}$ „
h. $7\frac{1}{2}$ „
i. $4\frac{1}{6}$ „
k. $2\frac{1}{2}$ „
l. 1 Mk. $36\frac{2}{3}$ ₰
m. $83\frac{1}{3}$ ₰
n. 10 Mk. 25 ₰
o. 46 Mk. $87\frac{1}{2}$ ₰
p. 191 Mk. $29\frac{1}{6}$ ₰
q. 51 Mk.

	annähernd:	genau:
14) a.	1200^{m}	$1205{,}184^{m}$
b.	$2062\frac{1}{2}{}^{m}$	$2071{,}41^{m}$
c.	329.8^{m}	$331{,}2687^{m}$
d.	$200{,}2^{cm}$	$201{,}355^{cm}$
e.	$0{,}156^{mm}$	$0{,}1569^{mm}$
f.	$2{,}907^{Dm}$	$2{,}92357^{Dm}$
g.	$21\frac{2}{3}{}^{m}$	$21{,}6755^{m}$
h.	$5423\frac{11}{23}$ N. M.	5423,22 N. M.
i.	$1\frac{7}{8}\square^{m}$	$1{,}84695\square^{m}$
k.	82,875 Hect.	82,979 Hect.
l.	$12\frac{6}{7}$ Ltr.	12,8816 Ltr.
m.	$55\frac{5}{6}$ Kb^{m}	55,9266 Kb^{m}
n.	$300\frac{5}{7}$ Ltr.	361,391 Ltr.
o.	6,9 k.	6,9 k.
p.	28,3 k.	28,3 k.
q.	4,833 . . gr.	4,833 . gr.

VI. Dividiren mit benannten Zahlen.

1. 6 ℔ kosten 468 ₰; wieviel kostet 1 ℔?

2. Was kostet 1 Meter, wenn man 12 Meter für 110 Mark erhält?

3 20 Personen theilen sich in 249 Mk.; wieviel erhält jede?

4. Für 11 k. Gußstahl gab man 14 Mk. 52 ₰; wie hoch kommt das k.?

5. Wieviel erhält man für 1 Mk., wenn man für 9 Mk. 10 Schffl. 22 Ltr. erhält?

6. Eine 21 ^{Km} lange Eisenbahn kostet 2325679 Mk.; wie hoch kommt a. 1 ^{Km}, b. 1 ^{Dm}, c. 1 ^{cm}?

7. Für 4 Ballen 8 Ries giebt man 588 Mark; wieviel kostet 1 Ries?

8. Wie theuer kommt das Ar eines Bauplatzes von 4 Ar $16\frac{1}{2}$ □^{m} in Mark zu stehen, wenn für denselben 420 Friedrichsdor à 5 ₰ 20 *sgr* bezahlt worden sind?

9. Wie oft sind 12 Mk. in 96 Mk. enthalten?

10. 1 Liter kostet 0,6 Mk.; wieviel Liter kann man für 4 Mk. 50 ₰ kaufen?

11. Wieviel Stücke von 1 ^{m} 36 ^{cm} Länge kann man aus 20 ^{m} 7 ^{dm} Zwillich schneiden?

12. Ein ausgerüstetes 9 ^{cm} Feldgeschütz wiegt 1835 k., wie schwer hat jedes der 6 vorgespannten Pferde zu ziehen?

13. Wieviel 8 ^{cm} Eisenkerne kann man laden, wenn der Eisenkern im Mittel 2,5 k. wiegt und der Wagen mit circa 30 Ctr. belastet werden soll?

14. Das Hintergewicht des 431,3 k. schweren gez. 9 ^{cm} Rohres beträgt circa $^{2}/_{19}$; wie groß ist daher der Druck, welchen es bei horizontaler Lage auf die Richtsohle ausübt?

15. Ob sich wohl die gez. 9 ^{cm} Granate, wenn sie einen Weg von 1600 ^{m} zurückgelegt hat, 400mal um ihre Achse gedreht haben kann, selbst wenn ihre anfängliche Drehungsgeschwindigkeit unverändert dieselbe bliebe? Drall des gez. 9 ^{cm} Rohres: 470,78 ^{cm}.

16. Berechne:

a. 28 *sgr* 8 ₰ : 6,

b. 316 Schffl. $48\frac{2}{3}$ Ltr. : 14,

c. 36 ℔ $40\frac{3}{4}$ Nlth. : $8\frac{1}{2}$,

d. 3815 ₰ 8 *sgr* $9\frac{3}{4}$ ₰ : $7\frac{3}{5}$,

e. 4 Ball. 5 Rs. $15\frac{7}{8}$ Bch. : $12\frac{1}{2}$,

f. 17 Ctr. 38 ℔ $2\frac{1}{2}$ Nlth.: $1824\frac{5}{6}$.

17. Wie oft sind enthalten:
a. 12 *sgr* 6 ₰ in 3 Thlr 22 *sgr* 6 ₰,
b. $18\frac{3}{4}$ Neuloth in 315 ℔ 39 Neuloth,
c. 4 Ries $18\frac{1}{2}$ Buch in 7 Ballen 3 Ries $17\frac{1}{2}$ Buch,
d. 216 Thlr 28 *sgr* $9\frac{3}{4}$ ₰ in 3685 Thlr $10\frac{5}{6}$ ₰.

18. Dividire:
a. 55^{Km} 18^{Dm} 4^{m} $2{,}7^{cm}$: 21,
b. $8030\square^{m}$ $7\square^{dm}$ $4{,}2\square^{mm}$: 310.

19. Berechne:
a. 323 Hltr. 2 Ltr. : 52,1 Ltr.,
b. 21 k. 162,75 gr. : 1 k. 209,3 gr.,
c. 1^{Dm} 8^{m} 8^{dm} 5^{cm} $3{,}104^{mm}$: 3^{m} 6^{dm} $4{,}8^{mm}$.

Antworten:

1) 78 ₰,
2) 9 Mk. $16\frac{2}{3}$ ₰
3) 12 „ 45 „
4) 1 „ 32 „
5) 1 Schffl. 8 Ltr.
6) a. 110746,62 Mk.
b. 1107,4662 „
c. 1,11074662 „
7) 12 Mk. 25 ₰
8) 1714 Mk. 29 ₰
9) 9 mal
10) $7\frac{1}{2}$ Ltr.
11) 15 Stück und 30^{cm} bleiben übrig.
12) 305,8 k.
13) 600 St.
14) 45,4 k.
15) Nein, 339mal
16) a. 4 *sgr* $9\frac{1}{2}$ ₰
b. 22 Schffl. $32\frac{1}{21}$ Ltr.
c. 4 ℔ $16\frac{19}{34}$ Lth.
d. 502 Thlr $4\frac{67}{152}$ ₰
e. 3 Rs. 13,27 Bch.
f. $47\frac{6812}{10949}$ Nlth.
17) a. 9mal
b. $842\frac{2}{25}$ mal
c. 15 mal
d. $16\frac{923026}{937269}$ mal
18) a. 2^{Km} 62^{Dm} 7^{m} $81{,}08^{cm}$
b. $25\square^{m}$ $90\square^{dm}$ $34\square^{cm}$ $51{,}6\square^{mm}$
19) a. 620 mal
b. 17,5 „
c. 5,23 „

VII. Gemischte Aufgaben.

1. Jeder in eine Flüssigkeit untergetauchte oder auch nur eingetauchte Körper verliert so viel an seinem Gewicht, als die Flüssigkeitsmasse wiegt, welche er aus der Stelle treibt. Man findet nun, daß ein Stück Blei in der Luft 1 k. 404,48 gr. und unter Wasser 1 k. 281,28 gr. wiegt. a. Wie schwer ist das von dem Blei verdrängte Wasser? b. Wieviel mal ist das Blei schwerer als ein gleiches Volumen (ein gleicher Raumtheil) Wasser, d. h. wie groß ist das specifische Gewicht*) des Bleies?

2. Welche Kraft ist nöthig, um ein 290,5 k. schweres 8^{cm} Kanonenrohr, welches in einen Fluß gefallen ist, bis an die Oberfläche des Wassers zu heben? Specifisches Gewicht des Stahles 7,9.

*) Unter dem eigenthümlichen oder specifischen Gewicht eines Körpers versteht man allgemein die Zahl, welche angiebt, wie viel mal dieser Körper schwerer ist als ein gleicher Raumtheil (destillirtes) Wasser.

3. Es sollen 467 Faschinen, 590 Schanzkörbe, 345 Schartenhurden und 28 Kniehurden gefertigt werden. a. Wieviel Strauch ist erforderlich, wenn zu 1 Faschine 6 Bund, zu 1 Schanzkorb $3\frac{1}{2}$ Bund, zu 1 Schartenhurde 4 Bund, zu 1 Kniehurde 10 Bund veranschlagt werden. b. Wieviel kostet dieses Strauch, wenn pro Schock 26 Mk. 45 ₰ bezahlt werden?

4. Ein Unterofficier ging mit 11 Gemeinen auf Kommando und erhielt einen Verpflegungsvorschuß von 35 ℛ︀. Von diesem hatte er ausgegeben:

a. Die Verpflegung für 12 Marschtage à 3 *sgr* 9 ₰ pro Mann und Tag,

b. ein 10tägiges Gehalt von 2 ℛ︀ 20 *sgr* für sich und 1 ℛ︀ für jeden Kanonier,

c. Vorspannvergütung für einen zweispännigen Wagen auf $3\frac{1}{4}$ Meilen à $7\frac{1}{2}$ *sgr* pro Pferd und Meile.

Wieviel hat er zurückzuzahlen?

5. Wieviel Fourage hat eine Batterie im Monat März verbraucht, wenn sie 16 Reit- und 120 Zugpferde zu verpflegen hatte und die tägliche Ration für jedes Reitpferd 4 k. Hafer, $2\frac{1}{2}$ k. Heu, $3\frac{1}{2}$ k. Stroh, für jedes Zugpferd $4\frac{3}{4}$ k. Hafer, $2\frac{1}{2}$ k. Heu, $3\frac{1}{2}$ k. Stroh beträgt?

6. In Petersburg ist es 1 Std. 6 Min. früher, in Paris 44 Min. später und in London 54 Min. später Mittag als in Berlin. Wie spät ist es in den genannten Städten, wenn es in Berlin 8 Uhr 20 Min. vormittags ist.

7. Im Jahre 1872 sollen in Würtemberg 230902000 Maikäfer mit einem Kostenaufwande von 15604 Gulden gesammelt und getödtet worden sein. Auf jeden Maikäfer kommt eine Nachkommenschaft von circa 20 Engerlingen und jeder Engerling verbraucht während seiner dreijährigen Entwickelungszeit etwa 2 ℔ Pflanzensubstanz. a. Wieviel Pflanzensubstanz würde die Nachkommenschaft der getödteten Maikäfer verzehrt haben, wenn auch nur der vierte Theil als durchschnittliche Zahl der lebengebliebenen Engerlinge in Rechnung stellt? b. Wie hoch ist der abgewendete Schaden abzuschätzen, wenn man diese Pflanzensubstanz nach dem Werthe des Heues, wovon der Centner $3\frac{1}{2}$ Mk. kostet, veranschlagt?

8. In einer Wüste findet ein von Hunger und Durst gequälter Wanderer zwei andere, welche, an einer Quelle sitzend, soeben ihren letzten Vorrath verzehren wollen, aber dennoch bereit sind, mit dem Ankömmling brüderlich zu theilen. Der eine liefert 3, der andere 5 Eier zu dem gemeinschaftlichen Mahle. Beim Abschiede giebt der erste Wanderer an die beiden anderen 8 Goldstücke. Bei der Theilung entsteht Streit; wieviel hat jeder zu fordern, wenn die 8 Goldstücke

nicht als Geschenk, sondern streng als Bezahlung des Genossenen angesehen werden?

Antworten:

1) a. 123,2 gr.
   b. 11,4 „
2) 253,73 k.
3) a. 6527 Bund
   b. 2877 Mk. $31\frac{11}{12}$ ₰
4) 1 ℛ 21 *sgr* 3 ₰
5) 634 k. Hafer
   340 k. Heu
   476 k. Stroh
6) a. 7 Uhr 14 Min.
   b. 9 Uhr 4 Min.
   c. 9 „ 14 „
7) a. 11545100 k.
   b. 80815700 Mk.
8) a. 1 Goldstück
   b. 7 Goldstücke.

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisse und Proportionen.

1. Gieb die Exponenten folgender Verhältnisse an:
$12 : 4$; $3 : 15$; $\frac{8}{9} : 4$; $5 : \frac{3}{4}$; $\frac{7}{8} : \frac{3}{4}$; $2\frac{4}{5} : 8$.

2. Wie findet man aus dem 1. Gliede und dem Exponenten eines Verhältnisses das 2. Glied?

1. Glied	Exponent	2. Glied
12	3	?
$5\frac{5}{6}$	7	?
8	$\frac{3}{4}$	?

3. Wie findet man aus dem Exponenten und dem 2. Gliede das 1. Glied?

1. Glied	Exponent	2. Glied
?	$\frac{1}{2}$	3
?	$9\frac{2}{3}$	12
?	$7\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

4. Gieb 6 Verhältnisse an, welche dem Verhältnisse $3 : 4$ gleich sind!

5. Drücke folgende Verhältnisse in den möglichst kleinsten ganzen Zahlen aus:
$4 : 6$; $18 : 12$; $\frac{2}{3} : 5$; $4 : \frac{5}{6}$; $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$; $9\frac{1}{6} : 6\frac{1}{4}$.

6. Verwandele jedes der folgenden Verhältnisse in ein Verhältniß, dessen 1. Glied gleich 1 ist:
$5 : 15$; $4 : 9$; $7\frac{1}{2} : 15$; $\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$; $2\frac{1}{2} : 6\frac{1}{3}$.

7. Wieviel und welche Proportionen lassen sich aus den 4 Zahlen 3, 6, 9 und 18 bilden, da $3 \times 18 = 6 \times 9$ ist?

8. Leite aus der Proportion $8 : 2 = 6 : 1\frac{1}{2}$ durch Versetzung der Glieder 7 andere Proportionen ab!

9. Bringe in folgenden Proportionen x in die 4. Stelle:
$4 : 5 = x : 7$; $7 : x = 8 : \frac{3}{4}$; $x : 2\frac{1}{2} = 3 : \frac{3}{4}$.

10. Berechne aus folgenden Proportionen x:
a. $8 : 9 = 10 : x$; b. $\frac{4}{5} : 1\frac{1}{2} = x : 6\frac{1}{2}$; c. $4\frac{2}{3} : x = 11 : 4\frac{2}{5}$; d. $x : 8\frac{5}{6} = 3 : 26\frac{1}{2}$.

11. Bringe in folgenden Proportionen die Brüche fort, ohne x mit einem Faktor zu behaften:

a. $4 : 9 = \frac{2}{5} : x$,
b. $\frac{8}{9} : \frac{5}{12} = 3 : x$,
c. $\frac{3}{4} : 12 = 1\frac{5}{6} : x$,
d. $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{3} = 4\frac{2}{7} : x$.

12. Vereinfache folgende Proportionen so viel als möglich:

a. $12 : 15 = 8 : x$,
b. $7 : 13 = 21 : x$,
c. $75 : 18 = 60 : x$,
d. $33 : 121 = 12 : x$,
e. $8\frac{1}{3} : 2\frac{1}{2} = 20 : x$,
f. $1\frac{13}{15} : 4\frac{1}{5} = 2\frac{2}{3} : x$.

Antworten:

10) a. $11\frac{1}{4}$ b. $3\frac{7}{15}$ c. $1\frac{13}{15}$ d. 1

11) a. $10 : 9 = 1 : x$ b. $32 : 15 = 3 : x$ c. $3 : 4 = 22 : x$ d. $21 : 16 = 10 : x$

12) a. $1 : 5 = 2 : x$ b. $1 : 13 = 3 : x$ c. $5 : 18 = 4 : x$ d. $1 : 11 = 4 : x$ e. $1 : 3 = 2 : x$ f. $1 : 3 = 2 : x$

Sechster Abschnitt.

Proportionsrechnungen.

I. Regel de tri-Aufgaben.

A. Einfache Regel de tri.

1. Wenn man 3^m für 1 Mk. erhält; wieviel mal 1 Mk. muß man dann für 54^m bezahlen?

2. Wieviel kosten aber die 54 Meter, wenn man für jede 3^m 4 Mk. zu bezahlen hat?

3. Für 6 k. bezahlt man 42 Mk.; wie hoch kommen a. 1 k., b. 5 k.?

4. Wie theuer sind 21 Meter Leinewand, wenn 3 Meter 280 ₰ kosten?

5. 12 Mann haben in einer gewissen Zeit 32 Faschinen angefertigt; wieviel Mann muß man anstellen, um in derselben Zeit 350 Faschinen zu erhalten?

6. Wenn der monatliche Servis für einen Unterofficier $1^2/_3$ ℛ betrug, wieviel Servis war für 18 Tage zu zahlen?

7. In einer Festung sind Lebensmittel für 2000 Mann auf 6 Wochen vorhanden; wie lange wird man 1600 Mann damit verpflegen können?

8. England besitzt das größte Schiff der Welt, Great-Eastern mit Namen. Dieses wiegt 12000 engl. Tons und trägt 22500 Tons. Verwandele diese Gewichte in deutsche Tonnen. 127 engl. Tons = 125 deutsche Tonnen.

9. 14 Hltr. kosten 90 Mk. 30 ₰; wieviel kosten 45 Hltr.?

10. 2 preuß. Morgen = 51 Aren. Wieviel Ar sind $715^2/_3$ Morgen?

11. Die Donau ist 394 geographische Meilen lang. Wieviel Kilometer sind das? $13^1/_2$ Meilen = 100^{Km}.

12. Eine Batterie gebraucht $26^4/_5{}^m$ Futterleinewand, wenn dieselbe $0{,}9^m$ breit ist. Beim Ankauf findet sich von der passenden Sorte nur $1{,}2^m$ breite Leinewand vor; wieviel ist davon nothwendig?

13. Um 336 Kb^m Erde auszuheben, sind 60 Mann, welche 12 Stunden lang arbeiten sollen, veranschlagt; wieviel Arbeiter muß man anstellen, wenn die Arbeit in $10^1/_2$ Stunden vollendet werden soll?

14. Wieviel Kubikmeter Buchenholz sind an Heizkraft $7^1/_2$ Kb^m Kiefernholz gleich zu setzen, wenn sich die Heizkraft des Buchenholzes zu der des Kiefernholzes wie 1000 : 764 verhält?

15. Beim Füllen von 12^{cm} Kartätschen ist man genöthigt, statt 45 100 gr. schwerer Kartätschkugeln 133,3 gr. schwere Kugeln zu verwenden. Wieviel Kugeln dieser letzteren Sorte hat man zu nehmen, um dasselbe Gewicht der Kartätsche zu erhalten?

16. Wieviel Kilometer sind $176^2/_5$ Seemeilen, wenn 6 Seemeilen gleich $11^1/_9$ Kilometer?

17. Eine Festung, welche eine Besatzung von 3500 Mann hat, ist auf 6 Monate verproviantirt; um wieviel Mann muß die Besatzung vermindert werden, wenn der Proviant 9 Monate reichen soll?

18. Auf einem Situationsplane findet man die Entfernung zweier $^3/_4$ Meilen von einander gelegenen Punkte = 22,5^{cm}; wie weit sind darnach zwei Ortschaften von einander entfernt, deren Abstand auf dem Plane 25,65^{cm} beträgt?

19. Wie theuer kommen 6 Ballen 5 Ries 8 Buch 12 Bogen Schreibpapier, wenn 3 B. 5 Rs. 16 Bch. 16 Bg. 430 Mk. kosten?

20. Beim Fouragiren ist man genöthigt für $^1/_3$ des Haferbedarfs, Weizen zu nehmen; wieviel hat man zu fordern, wenn 1325 k Hafer zu empfangen wären und wenn 100 ℔ Hafer an Nahrungswerth gleich 95,23 ℔ Weizen gerechnet werden?

21. Wieviel beträgt die Haferration von $10^1/_2$ ℔ in Liter ausgedrückt, wenn man 1 Hektoliter Hafer = 43,6 k. rechnet?

22. Man hat auf 30 Tage den Haferbedarf für 150 Pferde, von welchen jedes täglich $8^1/_2$ Ltr. erhalten soll, empfangen. Für wieviel Pferde reicht dieser Hafer ebenso lange aus, wenn die tägliche Ration auf $6^1/_2$ Ltr. herabgesetzt wird?

23. Wie theuer kommen 38 k. 6 gr. Seide, wenn 19 k. 36 Dgr. 5 gr. 1290 Mk. 33 ₰ kosten?

24. Wieviel kosten $166^2/_3$ k., wenn $32^1/_2$ k. $46^4/_5$ Mk. kosten?

25. Einem Truppentheil wurden für $112^1/_2$ k. Fleisch 2 ₰ 18 *sgr* 9 ₰ Schlachtsteuer zurückgezahlt; wieviel beträgt dies pro Centner in Mk.?

26. Wie lange reichen 6 Reit- und 20 Zugpferde mit 26 Hltr. $45^1/_2$ Ltr. Hafer, wenn jedes Reitpferd täglich $7^1/_2$ ℔, das Zugpferd 9 ℔ Hafer erhält und $10^1/_2$ ℔ Hafer = 12 Ltr. gerechnet werden?

27. Eine Infanterie-Kompagnie hat 2 Ctr. 25 k. 16 gr. Blei wieder aufgefunden. a. Wieviel Geld ist ihr dafür zu berechnen, wenn der Centner Blei mit $13^1/_2$ Mk. vergütet wird? b. Wieviel Zündnadelplatzpatronen, wovon als Aequivalent 1227 für jeden Ctr. Blei gewährt werden, können dafür empfangen werden?

28. In einer Festung befinden sich Lebensmittel für 4500 Mann auf 8 Monate. Es liegen anfangs nur 4000 Mann darin, zu denen aber nach 5 Monaten noch 2000 Mann hinzukommen. Wie lange reichen nun noch die Lebensmittel?

29. Ein Soldat erhält in 4 Tagen 3 k. Brod. Der Hektoliter Roggen giebt 69 k. Mehl, 3 k. Mehl geben 4 k. Brod. Wenn nun der Hektoliter Roggen $17^1/_2$ Mk. kostet, wie hoch kommt das Korn für eine Batterie von 108 Mann in 1 Monat (30 Tage) zu stehen?

30. Wieviel Hektoliter Mehl à 59 k. sind nöthig, um 2615 Mann 6 Tage lang mit einer täglichen Brodportion von 1 ℔ 20 Nlth. zu versehen, wenn 4 ℔ Mehl 5 ℔ Brod liefern?

31. 130 ℔ Roggen sind als Pferdefutter 100 ℔ Hafer gleich zu achten. Wieviel Hektoliter Roggen hat man hiernach für $12\frac{1}{2}$ Hektoliter Hafer zu empfangen, wenn durchschnittlich 1 Hektoliter Roggen 73 k. und ein Hektoliter Hafer 43,5 k. wiegt.

32. In $\frac{3}{4}$ Stunden werden in einer Mühle $2\frac{1}{2}$ Schffl. Korn gemahlen; wieviel also von vormittags $\frac{1}{2}$10 Uhr bis abends 10 Uhr?

33. Durch eine Moorgegend sollte ein Kanal gegraben werden und man machte den Anschlag, daß 52 Mann denselben in 4 Wochen 3 Tagen fertig machen könnten. Nun arbeiteten anfänglich 30 Mann 2 Wochen 1 Tg., dann 12 Mann 3 Wochen und darnach 18 Mann 5 Tage daran. Wie lange hatten jetzt noch 12 Mann daran zu thun?

34. Jemand kauft $\frac{4}{5} + \frac{2}{7} + \frac{3}{4}$ Meter und giebt für $\frac{2}{3}$ Meter $\frac{5}{6}$ Mk. Wieviel bezahlt er?

35. $\frac{2}{5} - \frac{1}{4}$ k. kosten den 5ten Theil von $\frac{6}{7}$ Mk. Wieviel kosten $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ k.?

Antworten:

1) 18mal
2) 72 Mk.
3) a. 7 Mk.
   b. 35 Mk.
4) 19 Mk. 60 ₰
5) 131 ($131\frac{1}{4}$)
6) 1 Thlr. = 3 Mk.
7) $7\frac{1}{2}$ Woch.
8) a. $11811\frac{3}{127}$ Ton.
   b. $22145\frac{85}{127}$ „
9) 290 Mk. 25 ₰
10) $18249\frac{1}{2}$
11) 2918,5
12) $20{,}1^{m}$
13) 69 ($68\frac{4}{7}$)
14) 5,73 Kb^{m}
15) 34 (33,7)
16) $326\frac{2}{3}$
17) 1167 ($1166\frac{2}{3}$)
18) 0,855 Ml.
19) 785 Mk. 10 ₰
20) $883\frac{1}{3}$ k. Hafer
    420,6 k. Weiz.
21) 12 (12,04) Ctr.
22) 196 ($196\frac{2}{13}$)
23) 2532 Mk. 42 ₰
24) 240 Mk.
25) $3\frac{1}{2}$ „
26) 10 ($10\frac{1037}{3600}$) Tg.
27) a. 33 Mk. 75 (75,4) ₰
    b. 3068 (3067,9) Stck.
28) $2\frac{2}{3}$ Monat
29) 462 Mk. 22,8 ₰
30) $148\frac{272}{295}$ Hltr.
31) 9,68...
32) $41\frac{2}{3}$ Schffl.
33) 59 Tg.
34) 2 Mk. 29 ₰
35) 47,6 ₰.

B. Zusammengesetzte Regel de tri.

1. Für 20 Pferde bezahlt man auf 45 Tage 90 Mk. Weidegeld; wieviel für 36 Pferde auf 100 Tage?

2. Ein Fuhrmann erhält für 22 Ctr. Fracht, 20 Meilen weit zu fahren, 300 Mk.; wieviel für 36 Ctr., die 24 Meilen weit gehen?

3. Auf 12 Faschinenbänken sind in 2 Tagen bei täglich 4 Stunden Arbeit 192 Faschinen gebunden worden; wieviel sind in 6 Tagen bei täglich 6stündiger Arbeit von 16 Faschinenbänken zu erwarten?

4. 10 Arbeiter werfen einen Damm in 6 Tagen auf, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wieviel Tage brauchen dazu 8 Arbeiter, die täglich nur 9 Stunden darauf verwenden?

5. Wenn 600 Soldaten mit einem gewissen Brodvorrathe 8 Tage reichen sollen, so kann der Mann täglich 2 ℔ erhalten; wieviel kann er bekommen, wenn derselbe Vorrath für 1000 Mann 6 Tage auslangen soll?

6. In einer Festung können 3600 Mann von dem vorhandenen Fleischvorrathe 28 Tage lang täglich $^1/_4$ k. Fleisch erhalten; wie schwer wird die tägliche Fleischportion bestimmt werden müssen, wenn 3000 Mann 42 Tage verpflegt werden sollen?

7. 24 Mann können erfahrungsmäßig in 5 Stunden 250 15^{cm} Kartuschbeutel nähen. Nun sollen 45 Mann in 6 Tagen 4500 dieser Kartuschbeutel anfertigen; wieviel Stunden muß man täglich arbeiten lassen?

8. 10 Arbeiter verdienen, wenn sie 20 Tage täglich 12 Stunden arbeiten, 240 Mk.; wieviel macht's in 32 Tagen auf 16 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten?

9. Wieviel 0,8^{m} breites Baumwollenzeug ist zu 1328 8^{cm} Kartuschbeuteln à 0,5 k. erforderlich, da zu 100 solcher Kartuschbeutel 16,7^{m} 0,5^{m} breites Seidentuch veranschlagt werden?

10. Wenn 6500 Soldaten mit einem gewissen Brodvorrathe 90 Tage reichen sollen, so kann jeder Mann täglich 2 ℔ erhalten; wieviel kann er bekommen, wenn dieser Vorrath für 7200 Mann 85 Tage ausreichen soll?

11. Wenn 5 Mann in 1 Stunde 6 Sandsäcke nähen können, a. wieviel werden 47 Mann in 8$^3/_4$ Stunden fertigen? b. wieviel Mann sind anzustellen, um 3570 Säcke in 11 Stunden zu erhalten?

12. Aus 10 Bund Strauch hat man 10 Kniehurden, welche 0,9^{m} hoch und 2,8^{m} lang sind, gefertigt; auf wieviel Schartenhurden von 0,6^{m} Höhe und 1,4^{m} Länge wird man rechnen können, wenn noch 250 Bund Strauch dazu disponibel sind?

13. Wieviel verdienen 36 Arbeiter in 48 Tagen, wenn 12 Arbeiter in 6$^1/_2$ Tagen 1116 Mk. verdient haben?

14. 9 Mann haben in $4^1/_2$ Stunden 14 Stück $0{,}9^{m}$ hohe und $0{,}6^{m}$ weite Schanzkörbe geflochten; wieviel Körbe von $0{,}8^{m}$ Höhe und $0{,}5^{m}$ Durchmesser sind in 6 Tagen à 5 Arbeitsstunden von 111 Mann zu erwarten?

15. Für $14^2/_3$ Mk. kann man 5 Lampen 20 Abende, jeden Abend zu 3 Stunden gerechnet, mit Oel unterhalten; für wieviel Abende à $3^3/_4$ Stunden reichen $26^2/_5$ Mk. aus, wenn 6 Lampen unterhalten werden sollen?

16. Ein Avancirter erhält den Auftrag, mit 35 Mann, welche täglich 5 Stunden beschäftigt werden sollen, einen Graben von 5375^{m} Länge, 1^{m} Breite und $^4/_5{}^{m}$ Tiefe auszuheben. Er will sich im Voraus annähernd berechnen, in welcher Zeit diese Arbeit vollendet sein wird und benutzt dazu eine früher gemachte Erfahrung, nach welcher 20 Mann in ähnlichem Erdboden, bei täglich 6stündiger Arbeit, einen Graben von 2210^{m} Länge, $1^1/_2{}^{m}$ Breite und $^3/_4{}^{m}$ Tiefe in 32 Tagen ausgehoben haben. Zu welchem Resultat wird derselbe gelangen?

17. Für einen Exercierplatz von 876^{m} Länge und 570^{m} Breite wurden halbjährlich 38 Mk. Pacht gezahlt. Wieviel ist vierteljährlich zu entrichten, nachdem man unter denselben Bedingungen noch ein Stück Land, welches 660^{m} lang und 438^{m} breit ist, hinzugepachtet hat?

18. Um die Friedens-Pulvermagazine einer zu armirenden Festung in 12 Tagen räumen zu können, sind 8 Gespanne à 4 Pferde, wovon jedes täglich 6 Fuhren leistet, veranschlagt. Es wird jedoch nothwendig, die Räumung in 9 Tagen zu bewerkstelligen. Wieviel Gespanne sind jetzt erforderlich, wenn statt der in Aussicht genommenen Militairgespanne Miethgespanne à 2 Pferde, welche nur $^2/_3$ soviel laden können als erstere, genommen werden müssen, dafür aber täglich 8 Fuhren machen sollen?

Antworten:

1) 360 Mk.	7) 8 Std.	12) 750
2) 589 Mk. 9 (9,09) ₰	8) 512 Mk.	13) 24723 Mk. 69,23 ₰
3) 1152	9) $138{,}61^{m}$	14) 1554 Körbe
4) 10 Tg.	10) $1^{31}/_{34}$ ℔	15) 24
5) $1^3/_5$ ℔	11) a. $493^1/_2$ Säcke	16) 38 $(37^{4411}/_{4641})$ Tg.
6) $^1/_5$ k.	b. 270 $(270^5/_{11})$ M.	17) 30 Mk.
	18) 12 Gespanne.	

II. Procentrechnungen.

1. Wieviel Zinsen geben jährlich:
a. 3850 Mk. zu 5 %, b. 5914 Mk. zu $4^1/_2$ %.

2. Wieviel hat man an Kapital und Zinsen nach Ablauf eines Jahres zurückzuzahlen, wenn man
a. 8444 Mk. 25 ₰ zu $3^2/_3$ %,
b. 2747 Mk. 50 ₰ zu $4^1/_2$ % geliehen hat?

3. Ein Avancirter hat bei seiner Verheirathung einen $3^1/_2$ procentigen Staatsschuldschein über 50 ₰, den er für 42 ₰ 10 *sgr* gekauft hat, deponirt; a. wieviel Zinsen erhält er halbjährlich? b. wie hoch verzinst sich sein Geld?

4. Welches Kapital bringt jährlich: a. zu 4 % 130 Mk. Zinsen, b. zu $4^1/_2$ % 127 Mk. 80 ₰ Zinsen?

5. Ein Regiment will die Instandhaltung eines Denkmales dadurch sicherstellen, daß es ein Kapital niederlegt, aus dessen Zinsenertrag die auf $22^1/_2$ Mk. jährlich veranschlagten Unterhaltungskosten bestritten werden sollen. Welche Summe ist zu deponiren, wenn $4^1/_2$ % Zinsen gerechnet werden?

6. Die Wittwe eines im Kriege gefallenen Feldwebels erhält jährlich 300 Mk. Wittwenpension und für jedes ihrer 3 Kinder unter 15 Lebensjahren 90 Mk. Erziehungsgeld. Welches Kapital würde zu $4^1/_2$ % einen Zinsenertrag geben, welcher diesen Einkünften gleich wäre?

7. 2876 Mk. trugen jährlich 158 Mk. 18 ₰ Zinsen ein; welches war der Zinsfuß?

8. Eine Sparkasse zahlt für jede eingelegte 3 Mk. 10 ₰ Zinsen jährlich; zu wieviel Procent verzinst dieselbe?

9. Ein Wucherer nahm von jede ausgeliehene 5 Mk. wöchentlich 15 ₰ Zinsen; wie hoch läßt er sich das verliehene Geld verzinsen?

10. Wieviel Zinsen geben 2640 Mk. zu $5^1/_2$ % in 3 Jahren?

11. Wieviel Interessen hat Jemand monatlich zu verzehren, wenn er 10500 Mk. zu $4^1/_2$ % und 8448 Mk. zu 5% ausgeliehen hat?

12. Ein Uebungsplatz, welcher jährlich 3630 Mk. Pacht gekostet hat, wird für 50400 Mk. angekauft; wie hoch verzinst sich die Kaufsumme, wenn noch in Betracht kommt, daß man jährlich 150 Mk. Weidegeld einnimmt?

13. Jemand hat in 4 Jahren 7296 Mk. Zinsen eingenommen; wie groß ist das Kapital, wenn dasselbe zu $4^3/_4$ % ausgeliehen ist?

14. Welchen Betrag muß eine Sammlung erreichen, wenn man den Hinterlassenen eines Verunglückten aus dem Zinsertrage eine

Unterstützung von 150 ₰ täglich gewähren will und das Kapital zu 5 % untergebracht werden kann?

15. In welcher Zeit haben 5860 Mk. zu $3^2/_3$ % 968 Mk. 70 ₰ Zinsen eingebracht?

16. Zu wieviel Procent muß man 1895 Mk. verleihen, um in 3 Jahren 265 Mk. 90 ₰ Zinsen zu erhalten?

17. Wie lange muß ein Kapital verzinset werden, wenn es zu $4^1/_2$ % ebensoviel Zinsen bringen soll, als zu 3 % in 12 Jahren?

18. Jemand ist nach einem Jahre 2500 Mk. zu bezahlen schuldig; wieviel hat er jetzt zu zahlen, wenn $6^1/_4$ % Disconto gerechnet werden?

19. Eine Artillerie-Brigade hat für Gebäude, welche auf ihrem Schießplatze errichtet worden sind, 6900 Mk. und zwar 3000 Mk. nach 6 Monaten und den Rest nach 1 Jahre zu zahlen; sie zahlt nach 3 Monaten die ganze Summe mit $6^1/_2$ % Disconto; wie hoch beläuft sich der auszuzahlende Betrag?

20. Es hat Jemand 980 Mk. nach 5 Jahren zu bezahlen und bezahlt die Schuld baar mit $4^1/_2$ % Disconto. a. Wieviel beträgt der Abzug? b. die baare Bezahlung?

21. Jemand hat aus einer öffentlichen Kasse Johannis, also am 24. Juni, zu empfangen 205 Mk. Ein Wechsler zahlt ihm diese Summe am 27. April mit $^2/_3$ % Disconto für den Monat. Wieviel beträgt die baare Zahlung? (siehe §. 131. II.)

22. Die Oekonomie-Verwaltung eines Regiments kauft für $1150^1/_5$ Mk. Leder. Es werden ihr $8^3/_4$ % Rabatt vom Hundert bewilligt. a. Wieviel ist baar zu bezahlen? b. Wieviel beträgt der Rabatt?

23. Die Bücherrechnung einer Brigadebibliothek beträgt 650 Mk. Wieviel Procent Rabatt sind gegeben worden, wenn nur 585 Mk. wirklich gezahlt werden?

24. Wieviel Friktionsschlagröhren sind zu 1226 Schuß bei 20 % Vorrath erforderlich?

25. Es haben bei 560 Schuß 12 Schlagröhren versagt; wieviel Procent sind dies?

26. Von 95 Schuß haben 60 die Scheibe getroffen; wieviel Procent Treffer hat man erzielt?

27. Wie oft muß man bei 35 Schuß die Scheibe treffen um 67 % Treffer zu erhalten?

28. Eine Batterie von 6—8 ^{cm} Geschützen giebt 3 Lagen Kartätschen gegen eine Scheibe ab. Es werden 128 Treffer gezählt. a. Wieviel Treffer kommen durchschnittlich auf jeden Schuß? b. Wieviel Procent der verschossenen Kugeln haben getroffen?

29. Wieviel Kilo 25 procentige*) Pulverkohle gewinnt man aus 264 Kilo Holz? und wieviel Kilo reiner Kohlenstoff ist darin enthalten, wenn der Kohlenstoffgehalt 89,73 Procent beträgt?

30. Wieviel Kilo geläutertes Pech entstehen aus 325 k. ungeläutertem, wenn man auf 18 Procent Abgang zu rechnen hat?

31. Beim Läutern von Salpeter rechnet man 12 % Verlust? Wieviel ungeläuterter Salpeter ist erforderlich um daraus 1250 k. geläuterten zu gewinnen?

32. Beim Reiben von Mehlpulver hat man aus 78 k. Kornpulver $73\frac{3}{4}$ k. Mehlpulver erhalten; wieviel Procent sind verloren gegangen?

Antworten:

1) a. $192\frac{1}{2}$ Mk.
   b. 266 Mk. 13 ₰
2) a. 8753 Mk. 87 (87,25) ₰
   b. 2871 „ 14 (13,75) ₰
3) a. 26 *sgr* 3 ₰ = 2 Mk. $62\frac{1}{2}$ ₰
   b. $4\frac{17}{127}$ %
4) a. 3250 Mk.
   b. 2840 „
5) 500 Mk.
6) 12666 Mk. 67 (66,66) ₰
7) $5\frac{1}{2}$ %
8) $3\frac{1}{3}$ %
9) $156\frac{3}{7}$ %
10) 435 Mk. 60 ₰,
11) 74 Mk. 57,5 ₰
12) $7\frac{1}{2}$ %
13) 38400 Mk.
14) 10950 Mk.
15) $4\frac{1}{2}$ Jahr
16) $4\frac{2}{3}$ %
17) 8 Jahre
18) 2352 Mk. 94 (94,11..) ₰
19) 6347 „ 41 ₰
20) a. 180 Mk.
    b. 800 „
21) 202 Mk. 40 ₰
22) a. 1049,56 Mk.
    b. 100,64 Mk.
23) 10 %
24) 1471 ($1471\frac{1}{5}$)
25) $2\frac{1}{7}$ %
26) $63\frac{3}{19}$ %
27) 23 ($23\frac{9}{20}$) mal
28) a. $7\frac{1}{9}$
    b. $14\frac{22}{27}$ %
29) a. 66 k.
    b. 59,22 k.
30) $266\frac{1}{2}$ k.
31) $1420\frac{5}{11}$ k.
32) $5\frac{35}{78}$ %.

---

*) Kohle heißt 25 procentig, wenn aus 100 Gewichtstheilen Holz 25 Gewichtstheile Kohle entstanden sind.

III. Kettenrechnung.

1. Wie lang ist ein preußischer Fuß in Metern ausgedrückt, wenn 1 preuß. Fuß = 139,13 Pariser Linien und 443,296 Pariser Linien = 1 Meter sind?

2. Wieviel Meter sind 250 Schritt, wenn 1 Schritt = 2 Fuß dc., 10 Fuß dc. = 12 Fuß ddc., und 100 Fuß ddc. = $31{,}4^m$?

3. Ein Engländer wettete, daß er 68 Yards in 20 Sprüngen zurücklegen wolle und gewann diese Wette. Wieviel Meter kommen durchschnittlich auf einen Sprung, da 1 Yard = 3 engl. Fuß, 1 engl. Fuß = 135 pariser Linien, 1 Meter = 443,3 solcher Linien ist?

4. Wieviel gilt in Oesterreich 1 Ducaten à $2^3/_4$ ℳ Gold, wenn Gold $15^1/_2$ Procent Agio giebt und für 1 ℳ preußisch 1 Gulden 60 Kreuzer österreichisch Geld gezahlt werden?

5. Wie weit ist ungefähr eine feindliche Batterie in Metern entfernt, wenn man zwischen Blitz und Knall langsam bis 4 zählt (also circa 4 Sekunden vergangen sind), der Schall in der Sekunde 1080 Fuß ddc. zurücklegt, und 1 Fuß ddc. = $^5/_{16}{}^m$ ist?

6. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich wohl die Erde um die Sonne? Die jährliche Erdbahn beträgt rund 130 Millionen Meilen; das Jahr ist zu 365 Tagen 6 Stunden zu rechnen.

7. Wieviel Pfennige kostet eine Gewehrladung von 4,83 gr., wenn der Centner Pulver zu 75 Mk. gerechnet wird?

8. Beim Schmelzen des Bleies rechnet man 5 Procent Abgang; wieviel Kilo Blei sind zum Gießen von 13500 Geschossen erforderlich, wenn 18 auf 1 ℔ gehen?

9. Zur Instandsetzung einer Reitbahn sollen 240 Kb^m Flußsand angefahren werden. Wieviel vierspännige Fuhren sind dazu erforderlich, wenn auf jedes Pferd 6 Centner Last gerechnet werden, 1 Kubikfuß Sand circa 115 ℔ wiegt und $32^1/_3$ Kubikfuß einem Kubikmeter gleich sind?

10. Vor Erfindung der Buchdruckerkunst (1440) kostete eine geschriebene Bibel etwa 450 Goldgulden, deren 72 aus 1 Mark Gold geprägt wurden. Wieviel macht dies in unserem Gelde? 95 damalige Mark = 100 Kölner Mark, 1 Kölner Mark = $^1/_2$ Altpfund, 1069 Altpfund = 1000 Neupfund, aus 1 Neupfund werden $139^1/_2$ Zehnmarkstücke geprägt.

11. Zu Karls des Großen Zeiten kaufte man einen fetten Ochsen zu 5 fränkischen Schillingen. Wieviel beträgt dies nach unserem Gelde? Von diesen Schillingen wurden 22 aus 1 köln. ℔ Silber geprägt; nach der Thalerwährung gehen 14 ₰ auf 1 Mark oder ½ ℔ köln. Silber. 1 ₰ = 3 Mk.

Antworten:

1) 0,31385...^{m}	5) 1350^{m}	9) 372 (371⅚)
2) 188,4^{m}	6) 4,12...Ml.	10) 4293 Mk. fast
3) 3,106...^{m}	7) 0,725 ₰	11) 19,09 Mk.
4) 5 Gld.. 8(8,2)Kr.	8) 393,75 k.	

IV. Theilungsrechnung.

1. Zwei Personen kaufen zusammen einen Garten für 1350 Mk. und theilen denselben so, daß A. 120 □^{m}, B. 180 □^{m} erhält; wieviel hat jeder zu zahlen?

2. Unser Pulver besteht aus 74 Theilen Salpeter, 16 Theilen Kohle und 10 Theilen Schwefel; wieviel sind von diesen Bestandtheilen in 450 Kilo Pulver enthalten?

3. Wieviel Kupfer und wieviel Zinn sind in einem bronzenen langen 15^{cm} Rohr, dessen Gewicht 2664,8 k. beträgt, enthalten? Geschützbronze besteht aus 100 Theilen Kupfer und 10 Theilen Zinn.

4. Von 4 Batterien sind 40 Mann Arbeiter nach Verhältniß ihrer disponiblen Mannschaften zu stellen. Wie hat die Vertheilung stattzufinden, wenn die 1ste Batterie 30, die 2te 20, die 3te 25 und die 4te 10 Mann dienstfreie Leute hat?

5. 2016 Mann sollen in 3 Dörfern nach Verhältniß der Einwohnerzahl einquartiert werden. Das Dorf M hat 845, N 650 und P 1025 Einwohner; wieviel Mann Einquartierung erhält jedes Dorf?

6. Zur Bereitung blauer Oelfarbe sind 2,8 Theile Bleiweiß, 0,32 Theile Diesbacher Blau und 2,2 Theile Leinölfirniß erforderlich; wieviel muß von jedem Bestandtheil genommen werden, um 133 k. Farbe zu erhalten?

7. Man will 374½ k. grauen Satz, welcher aus 75 Theilen Salpeter, 25 Theilen Schwefel und 7 Theilen Mehlpulver besteht, mengen; wieviel von jedem Bestandtheil ist zu nehmen?

8. Wieviel Salpeter, Schwefel, Mehlpulver und Kolophonium sind zu 32½ k. Zündlichtersatz erforderlich? Der Satz besteht aus

100 Theilen Salpeterschwefel (75 Th. Salp. 25 Th. Schw.), 85 Theilen Mehlpulver und 7 Theilen Kolophonium.

9. Zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen gab A. $750\frac{1}{2}$, B. $1023\frac{4}{5}$, C. $815\frac{2}{5}$, D. $526\frac{3}{5}$ Mk. Sie gewinnen $311\frac{3}{4}$ Mk. Wieviel hat jeder vom Gewinn zu fordern?

10. Unter 2 leichte und 1 schwere Fußbatterien à 6 Geschützen sind 18 Faß Pulver à 52 k. so zu vertheilen, daß jedes Geschütz gleichviel Schuß erhält; wieviel Pulver kommt jeder Batterie zu?

11. Zur Kriegszeit erhielt das Dorf A 20 Mann auf 2 Tage, B. 15 Mann auf 5 Tage, C. 12 Mann auf 7 Tage und D. 28 Mann auf $3\frac{1}{2}$ Tag Einquartierung. Später wurden dafür in Summa $148\frac{1}{2}$ Mk. vergütet. Wieviel ist davon jedem Dorfe zu geben?

12. Ein Fuhrmann fährt 10 Ctr. Pulver 8 Meilen, 16 Ctr. 10 Meilen, 24 Ctr. 12 Meilen, 16 Ctr. 7 Meilen, 25 Ctr. 8 Meilen, insgesammt für 1245 Mk. a. Wieviel nahm er für jede Fuhre? b. Wieviel für jeden Centner auf eine Meile?

13. Zur Anlage eines Festungswerkes mußte das Dorf A 20 Mann 14 Tage, das Dorf B 25 Mann 10 Tage, C. 24 Mann 15 Tage, D 30 Mann 8 Tage schicken. Es wurden nachher $4915\frac{1}{2}$ Mk. Entschädigung gezahlt. Wieviel erhielt jedes Dorf?

14. A, B, C und D pachten eine Weide für 162 Mk. A weidet 15 Pferde 40 Tage lang, B 8 Pferde 51 Tage lag, C 12 Pferde 48 Tage lang und D 8 Pferde 45 Tage lang; wieviel hat jeder zu zahlen?

15. Drei Personen theilen sich in 546 Mk. B. bekommt 30 Mk. mehr als A und C 36 Mk. mehr als B; wieviel jede Person?

Antworten:

1) A 540 Mk.
B 810 „
2) 333 k. Salp.
72 k. Kohle
45 k. Schw.
3) 2422,54 k Kupf.
242,25 k. Zinn
4) 1ste 14, 2te 9,
3te 12, 4te 5 Mann
5) M 676 Mann
N 520 „
P 820 „
6) 70 k. Bleiweiß
8 k. Blau
55 k. Leinöl
7) $262\frac{1}{2}$ k. Salp.
$87\frac{1}{2}$ k. Schw.
$24\frac{1}{2}$ k. Mehlp.
8) 12 k. 695,3 gr. Salp.
4 „ 231,8 „ Schw.
14 „ 388 „ Mehlp.
1 „ 184,9 „ Kolph.
9) A 75 Mk. 5 ₰
B 102 Mk. 38 ₰
C 81 Mk. 66 ₰
D 52 „ 66 „
10) 292,5 k. (leichte B.)
351 k. (schw. B.)
11) A 20 Mk.
B $37\frac{1}{2}$ Mk.
C 42 Mk.
D 49 Mk.
12) a. 90, 180, 324
126, 225 Mk.
b. $1\frac{1}{8}$ Mk.

13) A 1218 Mk.	14) A 50 Mk.	15) A 150 Mk.
B $1087\frac{1}{2}$ Mk.	B 34 „	B 180 „
C 1566 Mk.	C 48 „	C 216 „
D 1044 Mk.	D 30 „	

V. Mischungsrechnung.

1. Zur Bereitung von Zünderkitt schmilzt man 2 k. Terpentin à k. zu 2 Mk. und 1 k. gelbes Wachs à k. zu 4,1 Mk. zusammen; wie theuer kommt 1 k. der Mischung?

2. Man mengt 3 Sorten Korn und zwar 6 Hltr. à 17 Mk., 4 Hltr. à $18\frac{1}{2}$ Mk. und 3 Hltr. à $18\frac{1}{4}$ Mk.; wie hoch kommt ein Hltr. der Mengung zu stehen?

3. Wie schwer wird durchschnittlich das Hektoliter Hafer einer Mengung sein, welche aus 10 Hltr. à 23,5 k., 12 Hltr. à 24,2 k., 5 Hltr. à 22,6 k. und 8 Hltr. à 23,9 k. hergestellt worden ist?

4. Wieviel kostet 1 k. Kleister, zu welchem auf 466,7 gr. Weizenstärke 58,3 gr. Leim, 8,3 gr. Alaun und circa 46 ℔ Wasser genommen worden sind, wenn für 1 ℔ Stärke 60 ₰, 1 ℔ Leim 76 ₰, 1 ℔ Alaun 2 Mk gezahlt worden und man zur Bereitung von 4 ℔ Kleister etwa für 24 ₰ Holz verbraucht hat?

5. Ein silbernes Gefäß wiegt $2\frac{1}{2}$ k. und ist an Gehalt 900-theilig; wieviel reines Silber ist in demselben?

6. Wieviel Gold und wieviel Kupfer enthält ein Zehnmarkstück? Aus 1 ℔ reinen Goldes werden $139\frac{1}{2}$ Zehnmarkstücke geprägt, welche auf 900 Theile Gold 100 Theile Kupfer enthalten.

7. Man will aus 30 % und 95 % Spiritus $110\frac{1}{2}$ Kilogramm 70 % mischen; wieviel von jeder Sorte ist zu nehmen?

8. Ein Mehlhändler hat Mehl zu $9\frac{3}{4}$ Mk. und zu 12 Mk. das Hektoliter. Er will 100 Hltr. à $11\frac{1}{4}$ Mk. mengen; wieviel hat er von jeder Sorte zu nehmen?

9. Man will aus fremdländischem Kanonenmetall, von welchem auf 100 Theile Kupfer die eine Sorte 13, die andere 8 Theile Zinn enthält, eine Legirung bereiten, bei welcher auf 100 Theile Kupfer 10 Theile Zinn kommen. Wieviel ist von jeder Sorte zu 2650 k. zu nehmen?

10. Wieviel k. 800theiliges und wieviel k. 960theiliges Silber müssen verbunden werden, damit 26 k. 900theiliges entstehen?

11. Um Mörtel zu bilden, werden Kalk und Sand in dem Verhältniß 1 : 2 vermischt. Ein Kubikmeter Kalk und 2 Kubikmeter Sand geben aber nicht 3 Kubikmeter Mörtel, sondern nur $2^2/_5$ Kubikmeter. Wenn nun 60 Kubikmeter Mörtel bereitet werden sollen, wieviel Kalk und wieviel Sand ist erforderlich?

12. Wieviel Wasser hat man zu 38 k. 82 % Spiritus hinzuzusetzen, um daraus Branntwein zu 40 % zu machen?

13. Wieviel Kupfer muß zu 6 k. 950theiligem Silber gesetzt werden, damit die Legirung 900theilig wird?

14. Eine Milchverkäuferin soll die Milch eines Rittergutes für 15 ₰ das Liter verkaufen; sie mischt aber soviel Wasser hinzu, daß nun das Liter nur noch 10 ₰ werth ist. Wieviel Milch und wieviel Wasser ist in 1 Liter dieses Gemisches enthalten?

Antworten:

1) 2,7 Mk.
2) $17^3/_4$ Mk.
3) 23,703 . . . k.
4) 30 ₰ circa
5) 2,25 k.
6) 3,585 . gr. Gold
0,398 . . gr. Kupfer
7) $42^1/_2$ k. 30 %
68 k. 95 %
8) $33^1/_3$ Hltr. von ersterer
$66^2/_3$ „ „ letzterer
9) 1060 k. von ersterer
1500 k. „ letzterer
10) $9^3/_4$ k. 800theiliges
$16^1/_4$ k. 960 „
11) 25 Kb^m Kalk
50 Kb^m Sand
12) 39,9 k.
13) $^1/_3$ k.
14) $^2/_3$ Ltr. Milch
$^1/_3$ Ltr. Wasser.

Siebenter Abschnitt.

A. Ausziehen der Quadratwurzeln.

1) $\sqrt{2025} = 45.$
2) $\sqrt{324} = 18.$
3) $\sqrt{186624} = 432.$
4) $\sqrt{2917264} = 1708.$
5) $\sqrt{722500} = 850.$
6) $\sqrt{8107561764} = 90042.$
7) $\sqrt{1011,24} = 31,8.$
8) $\sqrt{0,5329} = 0,73.$
9) $\sqrt{0,00001444} = 0,0038.$
10) $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$
11) $\sqrt{31} = 5,56776\ldots$
12) $\sqrt{36457} = 190,93716\ldots$
13) $\sqrt{4,526} = 2,12744\ldots$
14) $\sqrt{0,023} = 0,15166\ldots$
15) $\sqrt{^9/_{144}} = {}^1/_4$
16) $\sqrt{7^1/_4} = 2,69258\ldots$
17) $\sqrt{^4/_5} = 0,89443\ldots$
18) $\sqrt{^5/_8} = 0,79057\ldots$
19) $\sqrt{23^2/_3} = 4,86484\ldots$
20) $\sqrt{25 \times 309} = 87,89195\ldots$

B. Ausziehen der Kubikwurzeln.

1) $\sqrt[3]{140608} = 52.$
2) $\sqrt[3]{41063625} = 345.$
3) $\sqrt[3]{8998912} = 208.$
4) $\sqrt[3]{3{,}966822287} = 1{,}583.$
5) $\sqrt[3]{24{,}5} = 2{,}90439\ldots$
6) $\sqrt[3]{0{,}00871} = 0{,}20574\ldots$
7) $\sqrt[3]{0{,}000002} = 0{,}012599\ldots$
8) $\sqrt[3]{{}^{125}/_{343}} = {}^{5}/_{7}$
9) $\sqrt[3]{{}^{5}/_{6}} = 0{,}94103\ldots$
10) $\sqrt[3]{{}^{1}/_{12}} = 0{,}43679\ldots$
11) $\sqrt[3]{8^{3}/_{4}} = 2{,}06069\ldots$
12) $\sqrt[3]{15^{2}/_{3}} = 2{,}50222\ldots$

Achter Abschnitt.

Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

A.

1) $10x - 6 = 3x + 15$
2) $5x + 7 = 3x - 13 + 6x$
3) $6 - 9x - 3x = 27 - 15x$
4) $3x + 13 - 2x = 5x - 2 - 7x$
5) $10 + {}^{2}/_{3}\,x = 6x - 8$
6) ${}^{3}/_{5}\,x - 3 + 2x = 9 + {}^{1}/_{2}\,x$
7) $3^{1}/_{2} - 2^{2}/_{3}\,x = -6 + 8^{11}/_{12}\,x$
8) $-{}^{7}/_{8}\,x - 1^{1}/_{2}\,x = {}^{5}/_{6} - 2^{1}/_{6}\,x$
9) $6 - (4x - 10) = 8(9 - 4x)$
10) $2x - 3({}^{1}/_{2}\,x + 6) = -(8 - 6x)$
11) $x - b = a$
12) $a - x = b$
13) $m - bx = ax - n$
14) $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$
15) $x - (5a + 2b - c) = 3c - 3a - x$
16) $mx + \frac{a}{b} = -(1 - nx)$
17) $\frac{ax}{3a + 2b} = a(3a - 2b)$
18) $\frac{3a + x}{x} - 5 = \frac{6}{x}$
19) $\frac{a(d^2 + x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}$
20) $(x - a)(x + b) - a(a - b) = \frac{a(a + b)}{2} + x^2$

B.

1. Addire ich zum sechsten Theil einer Zahl 12, so erhalte ich 15; wie heißt diese Zahl?

2. Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß man dasselbe Resultat erhält, wenn man sie durch 6 theilt, oder um 6 vermindert?

3. Als eine Zahl mit 3 multiplicirt und dann das Product durch 8 dividirt wurde, so erhielt man $^{1}/_{2}$ mehr als den vierten Theil dieser Zahl. Wie heißt diese Zahl?

4. Eine der wichtigsten Jahreszahlen der Geschichte wird mit 4 Ziffern geschrieben, von welchen die zweite um 7 größer als die erste, die dritte um 7 größer als die vierte und die vierte um 8

kleiner als die zweite ist. Zusammengezählt geben diese 4 Ziffern 16. Du errathest diese Zahl leicht; nun rechne sie auch aus!

5. Theile 84 so in zwei Theile, daß die Hälfte des ersten Theiles um 16 kleiner ist als $^1/_{13}$ des zweiten Theiles.

6. Zwei Schäfer begegnen sich mit Schafen. Hans sagte zu Fritz: Gieb mir eins von deinen Schafen, alsdann habe ich noch einmal so viel als du! Fritz sagte zu Hans: Nein, gieb du mir eins von deinen, dann habe ich eben so viel als du! Nun ist zu berechnen, wieviel ein jeder hatte.

7. Wieviel Geld haben wir noch in unserer gemeinschaftlichen Reisekasse? fragte ein Freund den anderen. Dieser antwortete: Bis M verbrauchten wir $^1/_8$, dann bis N $^5/_6$ so viel als wir jetzt noch haben und seit wir uns hier in P aufhalten, haben wir genau 100 Mark, Alles in Allem aber so viel ausgegeben als unsere Kasse jetzt noch enthält. Nun mache dir das Vergnügen und rechne dir die Antwort aus.

8. Vater, sagte ein 14jähriger Knabe: Heute, zu unserem gemeinschaftlichen Geburtstage, bist du grade 3mal so alt als ich. Dies ist richtig, antwortete der Vater. Wenn wir es beide erleben, wird aber auch die Zeit kommen, in welcher ich nur doppelt so alt bin als du. Kannst du mir angeben, nach wie viel Jahren?

9. Ein Mann hatte vier Kinder, von welchen die jüngsten ihn drängten ein Testament zu machen, in der Hoffnung, der Vater werde sie besser bedenken als die älteren. Darauf verordnete der Vater: Mein ältestes Kind soll von dem ganzen Vermögen 100 Mk. zum Voraus haben und von dem übrigen den fünften Theil. Das zweitälteste soll alsdann 200 Mk. wegnehmen und von dem übrigen wieder den fünften Theil. Und so soll jedes folgende Kind immer 100 Mk. mehr vorweg nehmen als das vorhergehende und von dem Reste $^1/_5$ erhalten bis zum jüngsten Kinde hin, dieses erhält, was dann noch übrig bleibt. Wieviel bekommt jedes Kind?

10. In einer Festung befinden sich 3mal so viel Infanteristen als Artilleristen und nur $^1/_8$ so viel Kavalleristen als Infanteristen und Artilleristen zusammen. Wieviel von jeder Truppengattung umfaßt die 3600 Mann starke Garnison?

11. Wie theuer ist ein Pferd gekauft worden, wenn der Käufer zuerst $^1/_5$ der Kaufsumme, später $^1/_4$ des Restes und zuletzt 810 Mk. bezahlt?

12. Drei Burschen beschließen an einem Jahrmarktabende ihre gesammte übrig gebliebene Baarschaft einem am Wege sitzenden Blinden zu geben. Als sie zusammenlegen, finden sich noch 333 Pfennige vor und es zeigt sich, daß der eine genau so viel Mark als der zweite Zehntelmark und der dritte Pfennige besitzt. Wieviel hatte ein jeder?

13. Ein Mann erzählt: Um 6 Uhr Morgens stehe ich auf, benutze $^3/_4$ der Tageszeit zum Arbeiten, $^1/_8$ zum Ankleiden und

Essen ꝛc. und nur 2 Stunden zur Erholung. Wann ging dieser Mann zu Bett?

14. Wie alt bist du? fragte ein 12jähriger Sohn seinen Vater. Die Antwort lautete: Dies kannst du berechnen, wenn ich dir sage: Deine Mutter, du und ich, wir drei sind zusammen 88 Jahre alt und vor 20 Jahren war ich grade doppelt so alt als deine Mutter. Wie alt ist der Vater?

15. Zwei Freunde A und B, welche 60 Kilometer weit von einander wohnen, haben sich verabredet, Morgens 7 Uhr aufzubrechen um sich unterwegs zu treffen. A bricht jedoch schon um $6^1/_2$ Uhr auf, während B sich um eine halbe Stunde verspätet. A macht stündlich $3^3/_4$, B 4 Kilometer. In welcher Entfernung vom Wohnorte des A und um welche Zeit treffen sie zusammen?

16. Um 6 Uhr geht ein Güterzug von M nach N, welcher 1 Meile in 12 Minuten zurücklegt. Eine halbe Stunde später fährt ein Courierzug auf einem zweiten Geleise denselben Weg und braucht 6 Minuten zu einer Meile. In wieviel Zeit und in welcher Entfernung von M wird er den Güterzug eingeholt haben?

17. Ein Bote geht von M nach N und macht stündlich 4 Kilometer. Nach 3 Stunden wird ihm ein zweiter Bote von einem 6 Kilometer weiter vorwärts gelegenen Orte P mit der Weisung nachgeschickt, den ersten Boten in 6 Stunden einzuholen. Wieviel Kilometer hat er stündlich zurückzulegen?

18. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden; durch die eine geschieht es in 6, durch die andere in 8 Stunden. In welcher Zeit wird der Wasserbehälter gefüllt sein, wenn beide Röhren gleichzeitig fließen?

19. Ein anderes Bassin kann durch 3 Röhren mit Wasser gefüllt werden, durch die erste in 8, durch die zweite in 9 und durch die dritte in 6 Stunden. In welcher Zeit wird das Bassin gefüllt sein, wenn man alle drei Röhren fließen läßt und gleichzeitig ein Abflußrohr öffnet, durch welches das volle Bassin in 12 Stunden entleert werden kann?

20. Eine Bäuerin verkauft auf dem Markte zuerst die Hälfte ihrer Eier und noch ein halbes dazu, dann die Hälfte vom Reste und wieder ein halbes Ei dazu, hierauf wieder die Hälfte vom Reste und ein halbes Ei dazu, u. s. w. bis sie beim fünften Verkaufe nur noch 1 Ei hingeben kann. Wieviel Eier hatte diese Frau zu Anfang?

Antworten: A.

1) 3	8) -4	14) $\frac{ab}{c}$	18) $\frac{3a-b}{4}$
2) 5	9) 2	15) $a+b+c$	19) d/c
3) 7	10) $-1^9/_{11}$	16) $\frac{a+b}{b(n-m)}$	20) $\frac{3a^2+ab}{2(b-a)}$
4) -5	11) $a+b$	17) $9a^2-4b^2$	
5) $3^3/_8$	12) $a-b$		
6) $5^5/_7$	13) $\frac{m+n}{a+b}$		
7) $^{114}/_{139}$			

B.

1) 18	8) 14	12) 3 Mk.	16) 30 Minut.
2) $7^1/_5$	9) 400 Mk.	3 Zehntelm.	5 Meil.
3) 4		3 Pfg.	17) 5 Kilom.
4) 1870	10) 2400 Inf.	13) 10 Uhr	18) $3^3/_7$ St.
5) 26 u. 58	800 Art.	14) 44 Jahr	19) $3^3/_{23}$
6) 7 — 5	400 Kav.	15) 2 Uhr 45 M. ca.	20) 31.
7) 2400 Mk.	11) 1350 Mk.	$30^{30}/_{31}$ Kilom.	

Anhang.

Verzeichniß der merkenswerthesten Münzen, Maße und Gewichte.

I. Münzen.

a. Nach dem neuen Münzgesetz für das Deutsche Reich:
1 Mark (Mk., ℳ) = 100 Pfennige (Pfg., ₰).

Anmerkung. 1 Mark ist genau = $^1/_3$ Thaler = 10 Silbergroschen der älteren Münzen.

b. Nach dem älteren Münzgesetze:
1 Thaler (Thlr., ℛ) = 30 Silbergroschen (Sgr., *sgr*),
1 Silbergroschen = 12 Pfennige (Pfg., ₰).
1 süddeutscher Gulden (Florin, fl.) = 60 Kreuzer (kr.)
= $17^1/_2$ *sgr* preuß.,
1 Kreuzer = 4 Pfennige.
1 österreichischer Gulden = 100 Neukreuzer (= 2 *sgr* preuß.).

c. Goldmünzen:
Im Deutschen Reiche werden nur noch neu geprägt:
10=Markstücke und 20=Markstücke.
Aeltere Goldmünzen sind:
1 Krone = $8^4/_{10}$ ℛ Gold = ungefähr 9 ℛ 10 *sgr* in Silber (der Silberwerth wechselt nach dem Course),
1 halbe Krone = $4^2/_{10}$ ℛ Gold,
1 preuß. Friedrichsdor (Pistole) = 5 ℛ Gold = $5^2/_3$ ℛ Silber,
1 Doppel=Friedrichsdor = 10 Gold = $11^1/_3$ ℛ, „
1 nichtpreußische Pistole (Louisdor) = 5 ℛ Gold = ungefähr $5^1/_2$ ℛ in Silber (hat Courswerth),
1 Dukaten = $2^3/_4$ ℛ Gold = ungefähr $3^1/_6$ ℛ in Silber (hat Courswerth).

II. Maße.

1) Nach der Maß= und Gewichtsordnung für den Norddeutschen Bund vom 17. August 1868.

Die Grundlage des Maßes und Gewichtes ist das Meter oder der Stab mit decimaler Theilung und Vervielfachung.

Vorbemerkung. Die im Nachfolgenden mit kleiner Schrift gedruckten Maßeinheiten sind in dem oben bezeichneten Gesetz nicht mit aufgeführt.

A. Längenmaße. Einheit: Meter oder Stab. Eintheilungszahl 10.

Kilometer,	Hektometer,	Dekameter,	Meter,	Decimeter,	Centimeter,
Km	Hm	(Kette) Dm	(Stab) m	dm	(Neuzoll) cm
1000^m	100^m	10^m	1^m	$0{,}1^m$	$0{,}01^m$

Millimeter (Strich) mm
$0{,}001^m$.

Entfernungsmaß: Meile = 7500^m.

B. Flächenmaße: Es dienen dazu die Quadrate über den Längenmaßen. — Einheit: Quadratmeter ($\square^m$). — Eintheilungszahl: $10 \times 10 = 100$.

$\square^{Km}$	$\square^{Hm}$	$\square^{Dm}$	$\square^m$	$\square^{dm}$	$\square^{cm}$	$\square^{mm}$
	(Hektar)	(Ar)				
$1000000\,\square^m$	$10000\,\square^m$	$100\,\square^m$	$1\,\square^m$	$0{,}01\,\square^m$	$0{,}0001\,\square^m$	$0{,}000001\,\square^m$

Die Namen Ar und Hektar statt Quadratdekameter und Quadrathektometer werden beim Ausmessen von Ländereien angewendet.

C. Körpermaße: Es werden dazu die Würfel benutzt, deren Kanten gleich den Längenmaßen sind. — Grundlage: Kubikmeter (Kb^m). Einheit für die Hohlmaße: Kubikdecimeter mit dem besonderen Namen Liter oder Kanne. — Eintheilungszahl: $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Kb^{Km}	Kb^{Hm}	Kb^{Dm}	Kb^m	Kb^{dm}
				(Liter, Ltr.)
$1000000000\,Kb^m$	$1000000\,Kb^m$	$1000\,Kb^m$	$1\,Kb^m$	$0{,}001\,Kb^m$

Kb^{cm}	Kb^{mm}
$0{,}000001\,Kb^m$	$0{,}000000001\,Kb^m$

1 Hektoliter (Hltr.) oder Faß = 100 Liter.
1 Scheffel = $\frac{1}{2}$ Hektoliter = 50 Liter.
1 Schoppen = $\frac{1}{2}$ Liter = 0,5 Liter.

2) Aeltere preußische Maße.

A. Längenmaß: Einheit: die Ruthe.

a. Zwölftheiliges oder Duodecimalmaß (ddc)

1 Ruthe (^{0}) = 12 Fuß ($'$ddc) = 144 Zoll ($''$ddc) = 1728 Linien ($'''$ddc)
= 1 „ „ = 12 „ „ = 144 „ „
1 „ „ = 12 „ „

Der Duodecimalfuß heißt auch Werkfuß oder rheinländischer Fuß.

b. Zehntheiliges oder Decimalmaß (dc)

1 Ruthe (^{0}) = 10 Fuß ($'$dc) = 100 Zoll ($''$dc) = 1000 Linien ($'''$dc)
1 „ „ = 10 „ „ = 100 „ „
1 „ „ = 10 „ „

c. 1 Schritt ($\times$) = $2'$dc; 1 Elle = $25\frac{1}{2}''$ddc.
1 preuß. Meile = $24000'$ddc = $20000'$dc.

B. Flächenmaße:

a. Duodecimalmaß.

1 Quadratruthe ($\square^0\ \square$R) = 144 Quadratfuß ($\square'$) ddc.
1 Quadratfuß = 144 Quadratzoll ($\square''$) ddc.
1 Quadratzoll = 144 Quadratlinien ($\square'''$) ddc.

b. Decimalmaß.

1□⁰ = 100□′ dc; 1□′ = 100□″ dc; 1□″ = 100□‴ dc.

c. 1 Morgen = 180□⁰, 1 Hufe = 30 Morgen.

C. Körpermaße.

a. Duodecimalmaß:

1 Kubikruthe (c^0) = 1728 Kubikfuß (c′ddc);
1 Kubikfuß = 1728 Kubikzoll (c″ddc);
1 Kubikzoll = 1728 Kubiklinien (c‴ddc).

b. Decimalmaß:

1 c^0 = 1000 c′dc; 1 c′dc = 1000 c″dc; 1 c″dc = 1000c‴dc.

c. 1 Klafter ist 6′ddc lang, 6′ddc hoch und 3′ddc breit = 108 c′ddc.

1 Schachtruthe ist 1^0 lang, 1^0 breit und 1′ hoch = 144 c′ddc.

1 Haufen Holz = $4\frac{1}{2}$ Klafter.

1 Tonne Kohlen = 4 Scheffel.

D. Fruchtmaße.

1 Wispel (Wisp) = 24 Scheffel (Schffl.); 1 Scheffel = 16 Metzen (Mtz.)
1 Scheffel = $^{16}/_9$ c′ddc = 3072 c″ddc; 1 Metze = $^1/_9$c′ddc = 192 c″.

E. Flüssigkeitsmaße.

1 Fuder (Wein) = 4 Oxhoft; 1 Oxhoft = 3 Eimer.
1 Ohm = 2 Eimer; 1 Eimer = 2 Anker; 1 Anker = 30 Quart.
1 Tonne (Bier) = 100 Quart; 1 Quart = 64 c″ = $^1/_3$ Metze.

3) Zeitmaß.

1 Jahr = 12 Monate = $52^1/_7$ Woche = 365 Tage; 1 Schaltjahr = 366 Tage.

1 Monat wird durchschnittlich zu 30 Tagen gerechnet. Januar hat 31 Tage, Februar 28 (im Schaltjahr 29), März 31, April 30, Mai 31, Juni 30, Juli 31, August 31, September 30, October 31, November 30, December 31 Tage.

1 Woche = 7 Tage; 1 Tag = 24 Stunden; 1 Stunde = 60 Minuten; 1 Minute = 60 Sekunden.

Anmerkung. 1) Genau genommen hat das Jahr, (d. i. der Zeitraum, in welchem die Erde ihren Lauf um die Sonne vollendet) 365 Tage 5 Stunden $48^3/_4$ Minuten. Der Ueberschuß von 5 Stunden $48^3/_4$ Minuten wird für 6 volle Stunden gerechnet, welche dann in 4 Jahren einen Tag ausmachen. Daher kommt es, daß alle 4 Jahre ein Tag eingeschaltet wird und dann der Februar 29 Tage, das Jahr 366 Tage hat. Ein Monat ist ungefähr der Zeitraum, in welchem der Mond sich um die Erde, ein Tag der Zeitabschnitt, in welchem sich die Erde um ihre Achse dreht.

2) Man erkennt die Schaltjahre daran, daß sich ihre Jahreszahl durch 4 (ohne Rest) theilen läßt.

3) Zählt man die Monate an den Knöcheln und den dazwischenliegenden Vertiefungen einer Hand (mit Ausschluß des Daumens) her, so haben die Monate bei welchen man auf einen Knöchel zeigt, 31 und die bei welchen man in eine Vertiefung trifft, 30 Tage. Ausgenommen ist der Februar, welcher nicht 30 sondern 28 oder bei einem Schaltjahre 29 Tage zählt.

4) Zählmaße.

1 Ballen (Papier) = 10 Ries; 1 Ries = 20 Buch; 1 Buch = 24 Bogen Schreib- und 25 Bogen Druckpapier.

1 Schock = 60 Stück; 1 Mandel = 15 Stück.
1 Groß = 12 Dutzend = 144 Stück.
1 Dutzend = 12 Stück.
1 Zimmer (Felle) = 4 Decher; 1 Decher = 10 Stück.

III. Gewichte.

1) Nach der neuen Gewichtsordnung für den Norddeutschen Bund.

Die Einheit des Gewichtes bildet das Kilogramm (Kgr., k.) = 2 ℔ Es ist das Gewicht eines Liters destillirten Wassers bei + 4 Grad des hunderttheiligen Thermometers.

Kilogramm	Hektogr.	Dekagr. (Neuloth)	Gramm	Decigr.	Centigr.	Milligr.
Kgr. oder k.	Hgr.	Dgr.	gr.	dgr.	cgr.	mgr.
1000 gr.	100 gr.	10 gr.	1 gr.	0,1 gr.	0,01 gr.	0,001 gr.

1 Pfund (℔) = 1/2 Kilogramm.
1 Centner (Ctr.) = 100 Pfund = 50 Kilogramm.
1 Tonne = 1000 Kilogramm = 2000 Pfund.

Anmerkung. Kilogramm wird sehr häufig in Kilo abgekürzt. In der Artillerie wird für Kilogramm stets die Bezeichnung k. benutzt und alle Gewichtsangaben in Kilogramm oder in Gramm gegeben.

2) Aeltere preußische Gewichte.

1 Centner (Ctr.) = 100 Pfund (℔, Pf.); 1 ℔ = 30 Loth (Lth.); 1 Loth = 10 Quentchen (Qtch.); 1 Qtch. = 10 Zent (Zt.); 1 Zt. = 10 Korn (K.).

IV. Vergleichung der älteren Maße und Gewichte mit den neuen.

Altes Maß.	Neues Maß.	Neues Maß.	Altes Maß.
1 Fuß	= 0,31385 ^{m} (5/16 ^{m})	1 Meter	= 3,1862 Fuß (3,2′)
1 Zoll	= 2,615 ^{cm} (13/5 ^{cm})	1 Centimtr.	= 0,3823 Zoll (5/13″)
1 Elle	= 0,66694 ^{m} (2/3 ^{m})	1 Meter	= 1,4994 Ellen (3/2 E.)
1 Meile	= 1,0043 Meilen	1 Meile	= 0,99569 Meilen
1 □ Fuß	= 0,098504 □ ^{m} (1/10)	1 □ ^{m}	= 10,152 □ Fuß (10 1/7)
1 Morgen	= 25,532 Ar (25 1/2)	1 Hektar	= 3,9166 Morgen (4)
1 Kubikzoll	= 17,891 Kb ^{cm} (18)	1 Kubikcentim.	= 0,055894 Kubikzoll (1/18)
1 Klafter	= 3,3389 Kb ^{m} (3 1/3)	1 Kb. Meter	= 0,2995 Klft. (3/10)
1 Quart	= 1,145 Liter (1 1/7)	1 Liter	= 0,87334 Quart (7/8)
1 Metze	= 3,4351 Liter (3 3/7)	1 Liter	= 0,29111 Metzen (7/16)
1 Scheffel	= 1,0992 Schffl. (1 1/10)	1 Scheffel	= 0,90973 Scheffel (10/11)
1 Pfund	= 0,5 Kilogramm	1 Kilogramm	= 2 Pfund.

Anmerkung. Die eingeklammerten Zahlen geben leicht zu behaltende ungefähre Näherungswerthe an.

Zweiter Theil.

Geometrie.

Einleitung.

§. 1.

Jeder allseitig begrenzte Theil des unendlichen Raumes heißt Körper. — An jedem Körper lassen sich drei Hauptabmessungen (Dimensionen) unterscheiden. Diese heißen: Länge, Breite und Höhe.

Bei dem geometrischen Körper denkt man sich den begrenzten Raum vollkommen leer. Die Körper, welche wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, sind mit irgend einem Stoff (einer Materie) erfüllt und heißen, zum Unterschiede von dem geometrischen Körper, physische Körper.

§. 2.

Die Grenzen eines Körpers werden Flächen; die Grenzen der Flächen Linien und die Grenzen der Linien Punkte genannt. — Man kann sich jedoch auch abgesondert und unabhängig von dem Körper die Vorstellung von der Fläche, der Linie und dem Punkte bilden. Die Gesammtgrenze eines Körpers heißt seine Oberfläche.

Die Fläche hat zwei Hauptabmessungen: Länge und Breite; die Linie besitzt nur eine Abmessung: Länge; der Punkt hat keine Abmessung; er ist nur ein Ort im Raume.

Sind die Linien, welche man mit Bleistift, einer Ziehfeder u. s. w. zieht, wirkliche Linien? die Punkte, welche man mit dem Bleistift, einer feinen Nadel u. s. w. macht, wirklich Punkte?

§. 3.

Körper, Flächen, Linien und Punkte führen den gemeinschaftlichen Namen Raumgrößen.

Der Punkt ist keine wirkliche Größe; man pflegt ihn aber der Einfachheit wegen mit zu den Raumgrößen zu zählen.

§. 4.

Von den Linien unterscheidet man gerade und krumme Linien. Bei der geraden Linie liegen alle Theile in derselben Richtung, bei der krummen Linie ist kein Theil gerade. Besteht eine Linie aus zwei oder mehreren in einem Zuge zusammenhängenden geraden Linien, so wird sie eine gebrochene Linie genannt.

Wenn im Nachfolgenden von Linien ohne weitere Bezeichnung gesprochen wird, so sollen immer gerade Linien gemeint sein.

Die Begriffe *gerade* und *krumm* lassen sich nicht streng erklären, es sind einfache oder Grundbegriffe. Richtung und Linie sind eigentlich gleichbedeutende Begriffe. Lineal. — Prüfung des Lineals.

§. 5.

Auch die Flächen werden eingetheilt in *gerade Flächen* oder *Ebenen* und in *krumme Flächen*. In der Ebene kann man nach allen Richtungen hin gerade Linien ziehen; bei der krummen Fläche ist kein Theil gerade.

Prüfung der Ebene mittelst eines genauen Lineals.

§. 6.

Jede Linie kann als die Spur angesehen werden, welche ein sich im Raume bewegender Punkt beschreibt. Verfolgt dabei der Punkt immer *dieselbe Richtung*, so entsteht eine *gerade Linie*; ändert er seine Richtung fortwährend, so durchläuft er eine *krumme Linie* oder *Curve*. Diese Curve heißt *einfach gekrümmt*, wenn sich alle ihre Punkte in derselben Ebene befinden, sonst *doppelt gekrümmt*.

§. 7.

Die Wissenschaft von den Raumgrößen heißt *Raumgrößenlehre* oder *Geometrie*. Sie zerfällt in:

1) die *ebene Geometrie* oder *Planimetrie*,
2) die *körperliche Geometrie* oder *Stereometrie*.

Erstere beschäftigt sich mit Raumgebilden, deren Theile sämmtlich in derselben Ebene liegen; die letztere dagegen mit solchen, bei denen dies nicht der Fall ist.

Erster Abschnitt.

Planimetrie.

Erstes Kapitel.

Von den geraden Linien und Winkeln.

§. 8.

Eine gerade Linie heißt

1) *begrenzt*, wenn sie von einem bestimmten Punkte bis zu einem anderen bestimmten Punkte reicht; diese Punkte werden dann ihre Endpunkte genannt,
2) *einseitig begrenzt* oder *Strahl*, wenn sie von einem Punkte ausgeht und sich nach einer Seite hin bis ins Unendliche erstreckt,
3) *unendlich*, wenn sie nach beiden Seiten hin ohne Begrenzung ist.

Bezeichnet werden gerade Linien durch zwei Buchstaben, welche man an ihre Endpunkte, oder bei der unbegrenzten Linie an zwei beliebige Punkte derselben setzt, z. B. Linie AB. Mitunter geschieht die Bezeichnung jedoch auch durch *einen* Buchstaben, z. B. Linie a.



§. 9.

Begrenzte gerade Linien heißen gleich, wenn sie sich in der Vorstellung so aufeinanderlegen lassen, daß die Endpunkte der einen die Endpunkte der anderen decken.

§. 10.

Eine begrenzte Linie messen heißt ermitteln, wie oft eine andere — der Länge nach bekannte — Linie in ihr enthalten ist. Die letztere Linie wird Maßeinheit oder Maßstab genannt; die Zahl, welche sich als Resultat des Messens ergiebt, heißt Maßzahl.

§. 11.

1) Haben zwei gerade Linien, welche in einer Ebene liegen, gleiche Richtung, so heißen sie parallele oder gleichlaufende Linien. — Parallele Linien können sich nie treffen, wenn man sie auch nach beiden Seiten hin unendlich denkt.

Das Zeichen für parallel ist: ⫲.

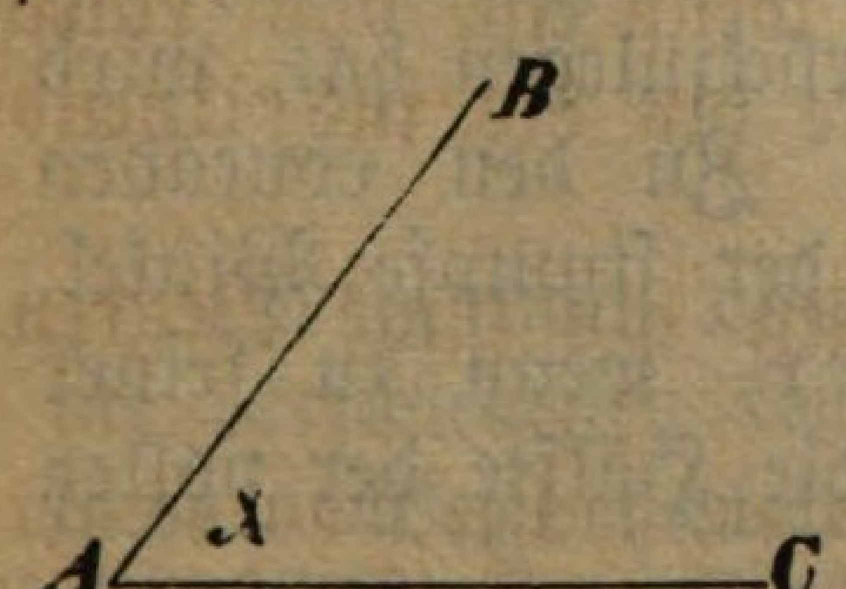
2) Sind zwei gerade Linien nicht parallel, so haben sie entweder schon einen Punkt gemeinschaftlich und man sagt dann, sie schneiden sich in diesem Punkte, oder sie würden bei genügender Verlängerung in einem Punkte zusammentreffen und sich dann schneiden. Im letzteren Falle werden diese Linien nach der einen Seite hin sich immer mehr und mehr nähern, nach der anderen immer weiter auseinandergehen. Dieses Nähern wird auch Convergiren, das Auseinandergehen Divergiren genannt.

§. 12.

Durch einen Punkt sind unzählig viele gerade Linien denkbar, jede in einer anderen Richtung; aber alle geraden Linien, welche durch dieselben zwei Punkte hindurchgehen, fallen in eine einzige zusammen. Durch zwei Punkte wird also die Richtung einer geraden Linie bestimmt.

§. 13.

Gehen zwei Linien von einem Punkte aus, so heißt der Unterschied ihrer Richtungen ein Winkel. Jede der beiden Linien, welche einen Winkel bilden, heißt ein Schenkel dieses Winkels und der Punkt, von dem beide ausgehen, die Spitze oder der Scheitelpunkt.



Die Bezeichnung eines Winkels geschieht gewöhnlich durch drei Buchstaben, von welchen an jeden Schenkel einer und der dritte an den Scheitelpunkt gesetzt wird Beim Sprechen ist dann stets der Buchstabe am Scheitelpunkt in die Mitte zu nehmen, z. B. ∡ BAC oder ∡ CAB.

Sind jedoch Mißverständnisse nicht zu besorgen, so nennt man der Kürze halber oft nur den Buchstaben am Winkel, z. B. ∡ A, oder man setzt einen Buchstaben in die Winkelfläche nahe an die Spitze und spricht dann z. B. ∡ x.

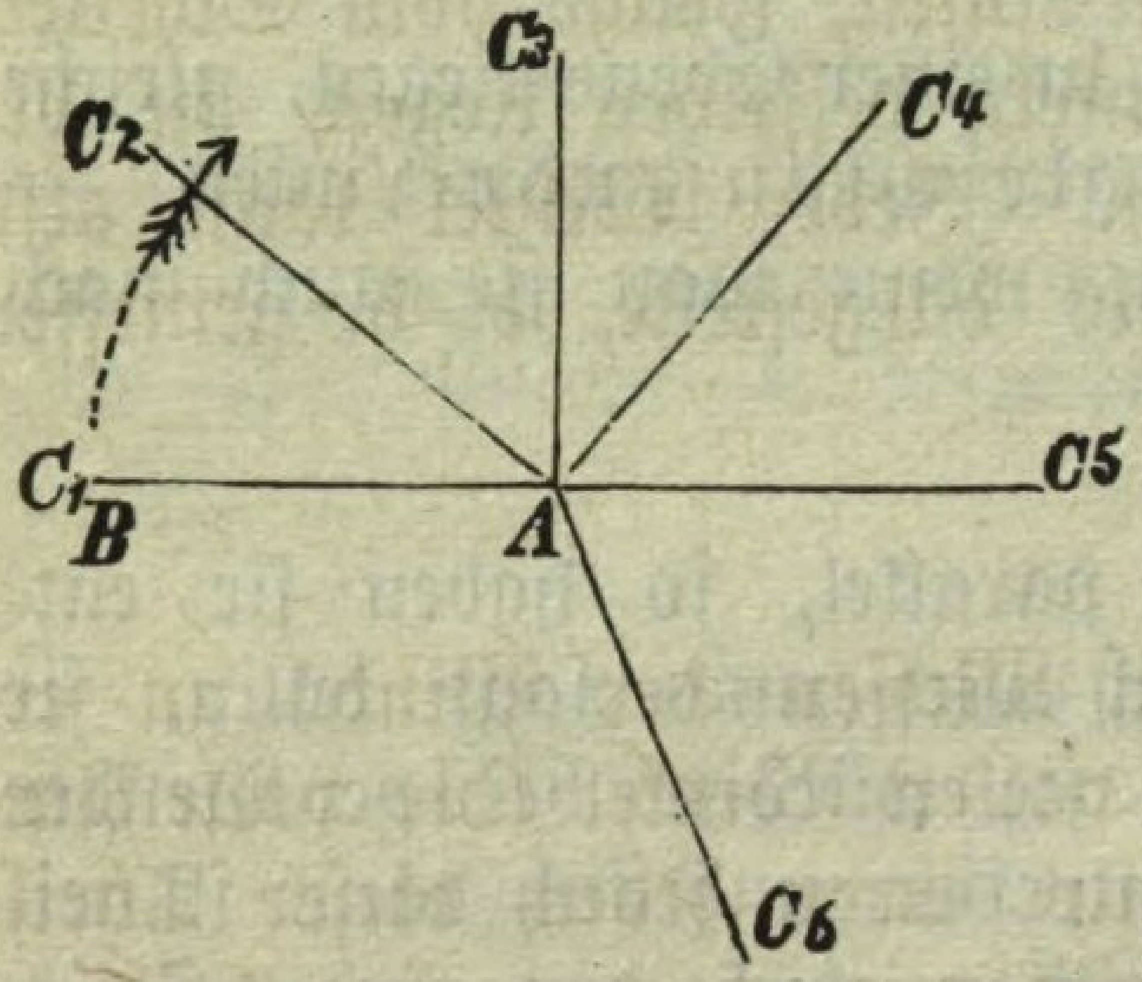
Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge seiner Schenkel ab, sondern wird bestimmt durch die Größe der Drehung, welche der eine Schenkel um den Scheitelpunkt machen muß, um in die Lage des anderen Schenkels zu kommen.

§. 14.

Winkel, welche man in der Vorstellung so aufeinanderlegen kann, daß sich Scheitelpunkte und Schenkel decken, heißen gleich.

§. 15.

Am klarsten wird der Begriff eines Winkels durch folgende Veranschaulichung:



Man denke sich zwei von A ausgehende Linien AB und AC_1 aufeinander liegend und dann eine derselben, z. B. AC_1 um den Punkt A drehend bewegt (geschwenkt). Die Linie AC_1 wird dann mit der Linie AB nach und nach alle möglichen Richtungsunterschiede, also Winkel, bilden bis sie die volle Umdrehung vollendet hat und wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt.

Jeden Winkel kann man sich durch eine solche Drehung des einen Schenkels um den Scheitelpunkt aus der Lage des anderen heraus entstanden denken. Nach der Größe dieser Drehung unterscheidet man folgende Unterabtheilungen des Winkels:

1) Jeder Winkel, zu dessen Erzeugung der sich drehende Schenkel weniger als den vierten Theil der vollen Umdrehung zurücklegen muß, heißt ein spitzer Winkel, z. B. ∡ BAC_2.

2) Ein rechter Winkel ist ein Winkel, zu dessen Erzeugung der sich drehende Schenkel genau den vierten Theil der vollen Umdrehung zurücklegen muß, z. B. ∡ BAC_3.

3) Ein stumpfer Winkel ist ein Winkel, zu dessen Erzeugung der sich drehende Schenkel mehr als den vierten Theil, aber weniger als die Hälfte der vollen Umdrehung zurücklegen muß, z. B. ∡ BAC_4.

4) Ein gestreckter Winkel ist ein Winkel, zu dessen Erzeugung der sich drehende Schenkel genau die Hälfte der vollen Umdrehung zurücklegen muß, z. B. ∡ BAC_5.

5) Jeder Winkel, zu dessen Erzeugung der sich drehende Schenkel weniger als die Hälfte der vollen Umdrehung zurückzulegen hat, wird ein hohler oder concaver Winkel genannt. Zu den concaven Winkeln gehören also der spitze, der rechte und der stumpfe Winkel.

6) Ein Winkel heißt erhaben oder convex, wenn zu seiner Erzeugung der sich drehende Schenkel mehr als die Hälfte der vollen Umdrehung machen muß, z. B. ∡ $\overset{\frown}{BAC_6}$.

Der Bogen ($\frown$) über BAC wird gemacht, um den convexen Winkel von dem gleichzeitig vorhandenen concaven Winkel BAC_6 zu unterscheiden.

7) Den Winkel, zu dessen Erzeugung der sich drehende Schenkel genau die volle Umdrehung machen muß, wollen wir einen *vollen Winkel* nennen.

Die spitzen und stumpfen Winkel führen auch den gemeinschaftlichen Namen *schiefe Winkel*.

§. 16.

Die vollen Winkel und deshalb auch alle rechten Winkel und alle gestreckten Winkel sind gleich groß; die spitzen und stumpfen Winkel dagegen können sehr verschiedene Größe haben.

§. 17.

Man kann sich jeden Winkel durch Linien, welche vom Scheitelpunkte ausgehen und zwischen den Schenkeln desselben liegen, in beliebig viele gleiche Theile getheilt denken. Jeder Winkel kann also als ein Vielfaches eines anderen Winkels dargestellt, d. h. gemessen werden.

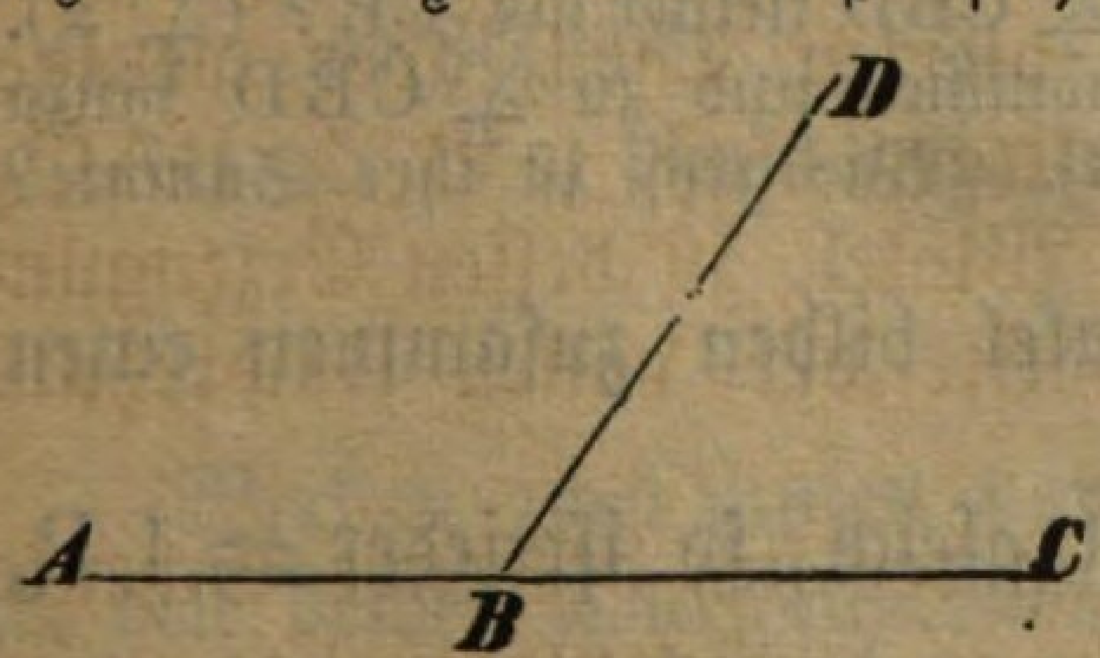
§. 18.

Um eine bequeme Maßeinheit zum Messen der Winkel zu erhalten, theilt man seit uralter Zeit den vollen Winkel (die volle Umdrehung) in 360 gleiche Theile und nennt einen jeden dieser Theile einen *Grad* (bezeichnet mit ^{0}). Der Grad wird ferner eingetheilt in 60 *Minuten* ($'$), die Minute in 60 *Secunden* ($''$). $43^0\,12'\,17''$ heißt: 43 Grad 12 Minuten 17 Sekunden.

Hiernach ist jeder rechte Winkel gleich 90^0 und jeder gestreckte Winkel gleich 180^0.

§. 19.

Wird der eine Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, so entsteht ein zweiter Winkel, welcher neben dem ersteren liegt und daher ein *Nebenwinkel* von ihm heißt. Der erstere Winkel ist dann natürlich auch wieder ein Nebenwinkel des letzteren. Hieraus läßt sich folgende Erklärung ableiten:



Nebenwinkel sind zwei Winkel, welche den Scheitelpunkt und einen Schenkel gemeinschaftlich haben und bei welchen die beiden anderen Schenkel eine gerade Linie bilden. Z. B ∡ ABD und ∡ CBD.

§. 20.

Geht man von dem Begriffe der Nebenwinkel aus, so lassen sich die verschiedenen Unterabtheilungen des Winkels auch noch auf eine andere Weise herleiten, als dies im §. 15 geschehen ist:

Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so wird jeder von ihnen ein *rechter* Winkel genannt; sind sie ungleich, so heißt der größere *stumpf*, der kleinere *spitz*.

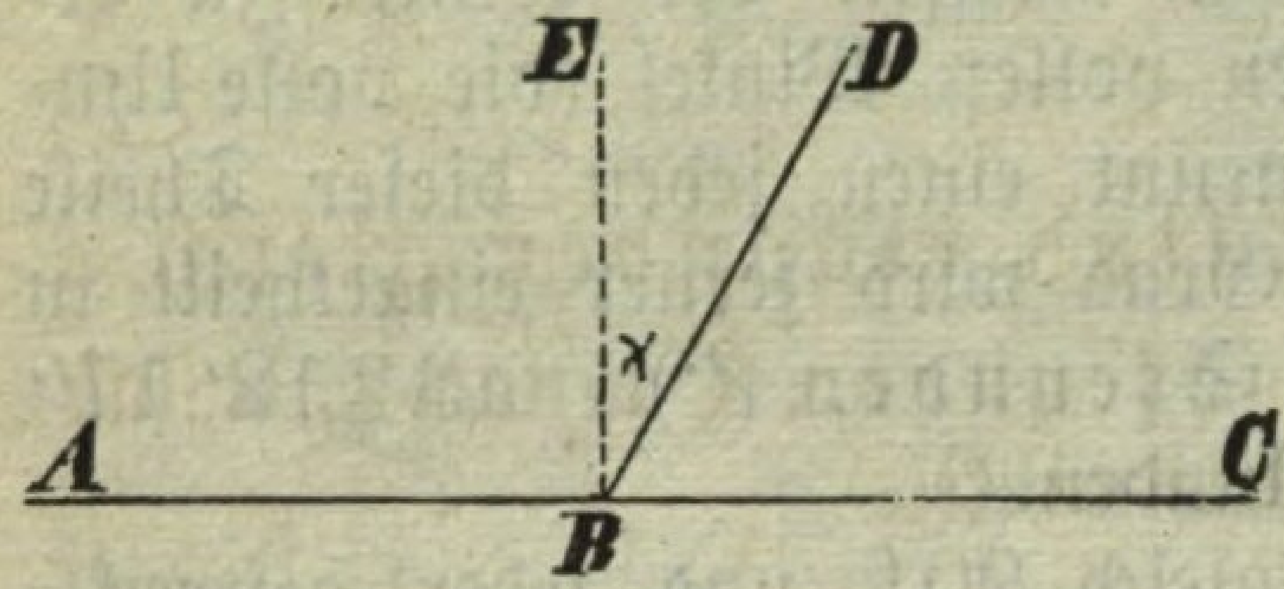
Ein rechter Winkel ist also ein Winkel, der seinem Nebenwinkel gleich ist. — Der gestreckte Winkel ist ein Winkel, dessen Schenkel eine gerade Linie bilden. Ein Winkel heißt spitz, wenn er kleiner als ein rechter, stumpf, wenn er größer als ein rechter, aber kleiner als ein gesteckter Winkel ist. Ein Winkel heißt concav, wenn er kleiner, convex, wenn er größer ist als der gestreckte Winkel.

§. 21.

Man sagt, eine Linie stehe lothrecht (rechtwinkelig, senkrecht, perpendikulär, normal) auf einer anderen, wenn sie rechte Winkel mit ihr bildet; sie selbst wird dann in Bezug auf die andere ein Loth (eine Winkelrechte, Senkrechte, ein Perpendikel, eine Normale) genannt. Steht Linie AB lothrecht auf Linie CD, so schreibt man AB ⊥ CD.

§. 22.

a. **Lehrsatz:** Je zwei Nebenwinkel sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.



Voraussetzung: ∡ ABD und ∡ CBD sind zwei beliebige Nebenwinkel.

Behauptung: ∡ ABD + ∡ CBD = 2 R*).

Anleitung zum Beweise: 1) Man denke sich AB um B gedreht, zuerst bis in die Richtung BD und dann weiter bis BC; wie groß wird diese Drehung sein? (gleich der Hälfte der vollen Umdrehung). Wie viel rechte Winkel sind das? (2 R) oder:

2) Wie groß ist jeder der beiden Winkel falls die Nebenwinkel gleich sind? (1 R). Wie groß ist also dann die Summe beider Winkel? (2 R). Falls die Nebenwinkel aber ungleich sind, wie erfährt man, um wie viel der stumpfe ∡ ABD größer und der spitze Winkel CBD kleiner ist als 1 R? (Indem man auf AC im Punkte B ein Loth errichtet.) Um welchen Winkel ist dann ∡ ABD größer als 1 R? (∡ x). Um welchen Winkel ist ∡ CBD kleiner als 1 R? (∡ x). Nun denke man sich ∡ x vom ∡ ABD fortgenommen und zu ∡ CBD hinzu gelegt, wie groß ist dann jeder von beiden? (1 R). Wie groß ist ihre Summe? (2 R).

1. Beweis: Die beiden Nebenwinkel bilden zusammen einen gestreckten Winkel und dieser ist = 2 R.

2. Beweis: Sind die Nebenwinkel gleich, so ist jeder = 1 R, also ihre Summe = 2 R.

Sind die Nebenwinkel ungleich, so denke man sich auf AC in B ein Loth errichtet. Man erkennt dann, daß:

$$\begin{array}{l} \measuredangle\ ABD = R + x \\ \measuredangle\ CBD = R - x \\ \hline \measuredangle\ ABD + CBD = 2R + x - x = 2R. \end{array}$$

*) Statt rechter Winkel schreibt man häufig kurz: R.

b. **Folgesätze:** 1) Die Summe aller Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie, an einem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte liegen, ist $= 2\,R$. Denn diese Winkel betragen zusammen soviel als zwei Nebenwinkel.

2) Die Summe aller um einen Punkt neben einander liegenden Winkel ist $= 4\,R$. Denn diese Winkel machen zusammen einen vollen Winkel aus. Oder: Verlängert man eine der Linien über den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt hinaus, so erkennt man, daß diese Winkel zusammengenommen zwei Nebenwinkelpaaren gleich sind.

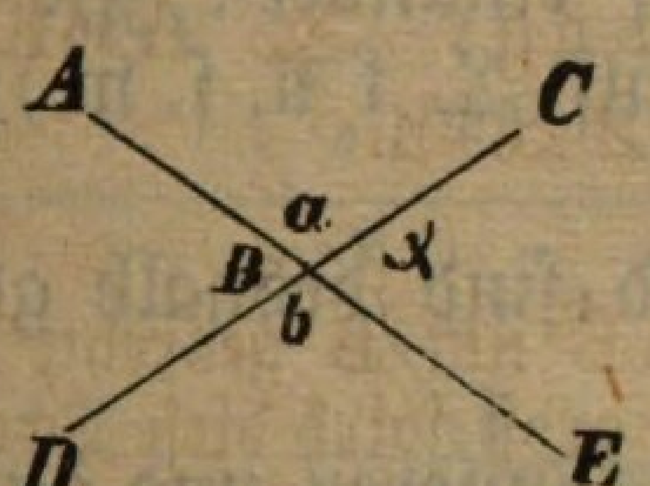
§. 23.

Werden beide Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, so schließen die Verlängerungen einen Winkel ein, welchen man den Scheitelwinkel des ersteren nennt. Der erstere Winkel ist dann natürlich auch wieder ein Scheitelwinkel des letzteren. Hieraus ergiebt sich folgende Erklärung:

Scheitelwinkel sind zwei Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben und bei denen die Schenkel eines jeden die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind.

§. 24.

Lehrsatz: Scheitelwinkel sind einander gleich.



Voraussetzung: $\sphericalangle a$ und $\sphericalangle b$ sind zwei Scheitelwinkel.

Behauptung: $\sphericalangle a = \sphericalangle b$.

Beweis: Den beiden Winkeln a und b fehlt gleich viel zu $2\,R$, nämlich $\sphericalangle x$; folglich müssen sie gleich sein. Oder, in der üblichen mathematischen Form:

$$\sphericalangle a + \sphericalangle x = 2\,R \text{ als Nebenwinkel}$$
$$\sphericalangle b + \sphericalangle x = 2\,R \quad " \quad "$$
$$\text{folglich } \sphericalangle a + \sphericalangle x = \sphericalangle b + \sphericalangle x$$
$$\text{abgezogen } \quad \sphericalangle x = \quad \sphericalangle x$$
$$\text{bleibt: } \sphericalangle a = \sphericalangle b$$

§. 25.

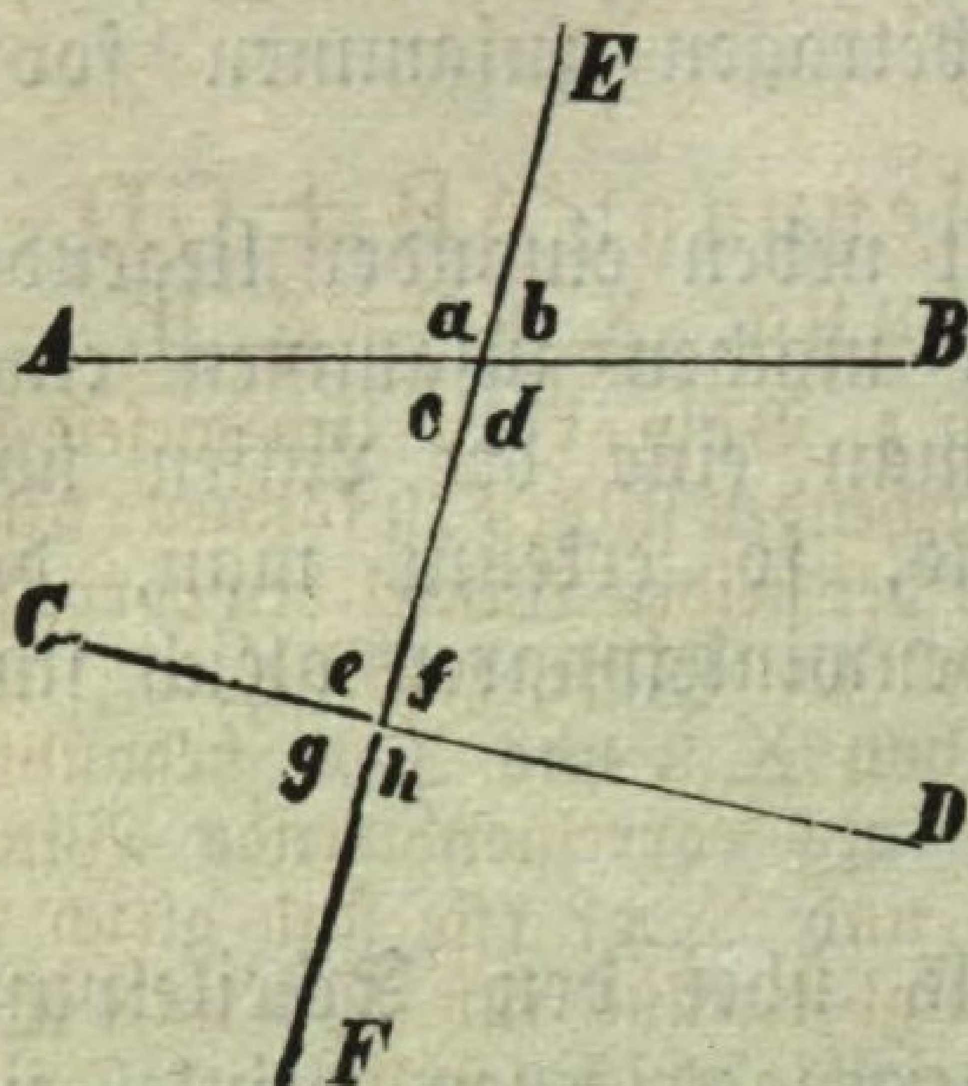
Werden zwei Linien von einer dritten durchschnitten, so entstehen an den beiden Durchschnittspunkten acht Winkel. Von diesen heißen:

a. je zwei Winkel, welche an verschiedenen Scheitelpunkten aber auf derselben Seite der durchschneidenden Linie liegen, Gegenwinkel;

b. je zwei Winkel, welche an verschiedenen Scheitelpunkten und auf verschiedenen Seiten der durchschneidenden Linie liegen, Wechselwinkel.

Gegenwinkel und Wechselwinkel nennt man nun wieder: innere, wenn beide Winkel innerhalb, äußere, wenn beide Winkel außerhalb, gemischte, wenn der eine Winkel innerhalb, der andere außerhalb der beiden durchschnittenen Linien liegen.

In nebenstehender Figur sind:



a. **Innere Gegenwinkel:** ∡ c u. ∡ e
∡ d u. ∡ f

Aeußere Gegenwinkel: ∡ a u. ∡ g
∡ b u. ∡ h

Gemischte Gegenwinkel:
∡ a u. ∡ e; ∡ b u. ∡ f
∡ c u. ∡ g; ∡ d u. ∡ h

b. **Innere Wechselwinkel:**
∡ c u. ∡ f; ∡ d u. ∡ e

Aeußere Wechselwinkel:
∡ a u. ∡ h; ∡ b u. ∡ g

Gemischte Wechselwinkel:
∡ a u. ∡ f; ∡ b u. ∡ e
∡ c u. ∡ h; ∡ d u. ∡ g

Die gemischten Gegenwinkel werden auch häufig **correspondirende** Winkel und die inneren Gegenwinkel kurzweg **Innenwinkel** genannt.

§. 26.

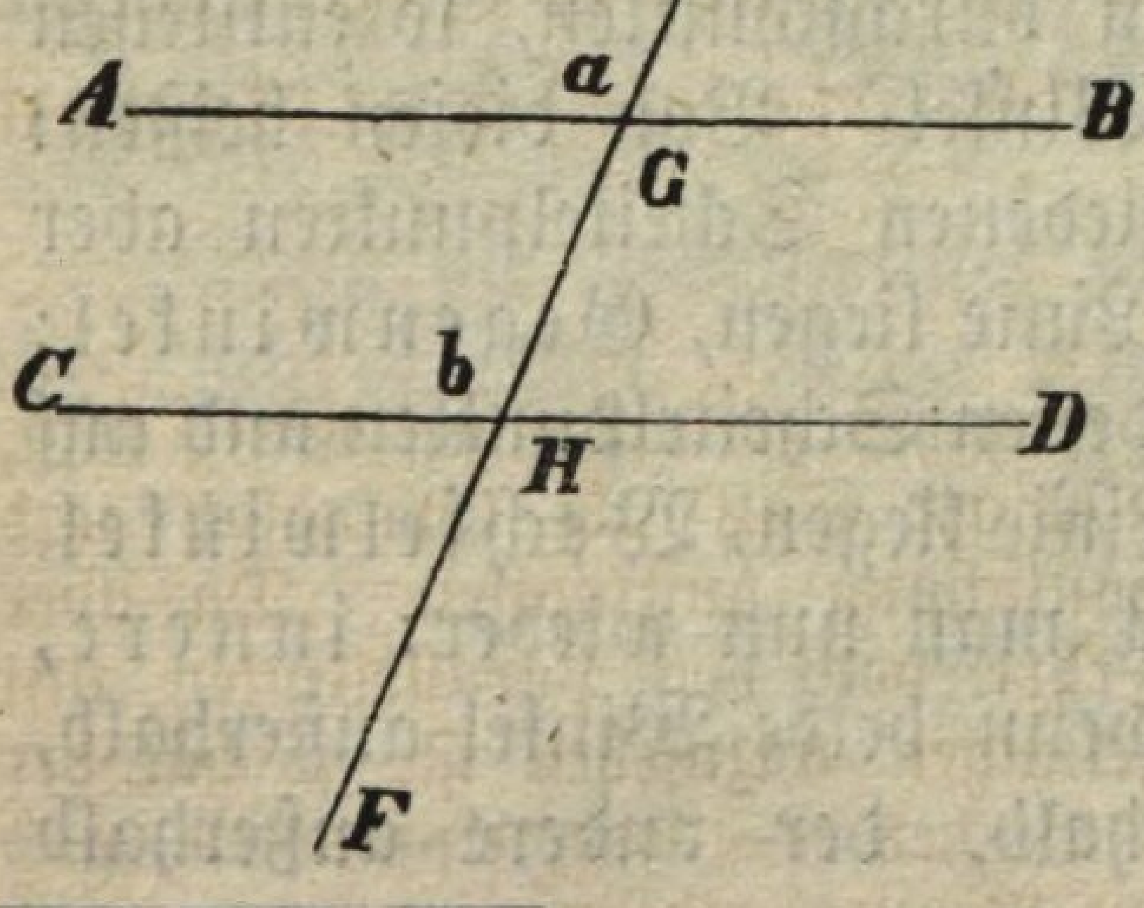
Denke Dir (Fig. §. 25.) AB parallel CD und dann AB parallel mit sich selbst (also ohne jede Drehung) nach CD hin bewegt, bis sie die Linie CD deckt.

a. Welche Winkel fallen dann deckend auf einander? (je zwei correspondirende Winkel, ∡ a auf ∡ e, ∡ b auf ∡ f u. s. w.); wie sind daher diese Winkel? (gleich),

b. welche Winkel werden Scheitelwinkel und sind deshalb gleich? (je zwei innere und äußere Wechselwinkel);

c. welche Winkel werden Nebenwinkel? (die inneren und äußeren Gegenwinkel und die gemischten Wechselwinkel), wie groß wird also die Summe von jedem dieser Winkelpaare sein? (= 2 R). — Die für den späteren Gebrauch wichtigsten dieser Gesetze wollen wir noch besonders beweisen.

Lehrsätze: 1) **Werden zwei parallele Linien von einer dritten durchschnitten, so sind je zwei correspondirende Winkel einander gleich.**



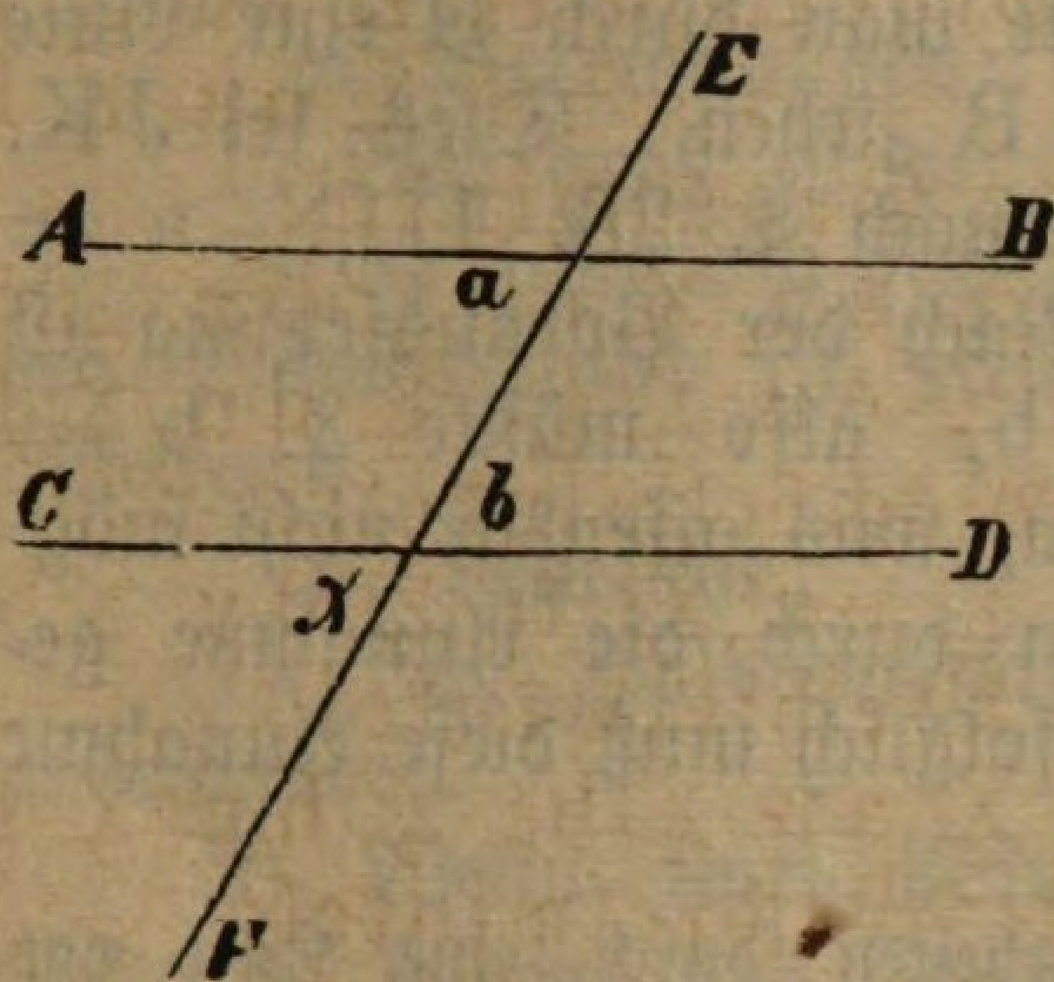
Voraussetzung: AB ⫲ CD.

Behauptung: ∡ a = ∡ b.

Beweis:*) Die Linien AB und CD haben als parallele Linien gleiche Richtung; sie müssen daher von der Richtung der Linie EF gleich stark und auf gleiche Weise abweichen und folglich muß auch AG mit GE einen eben so großen Winkel bilden als CH mit GH d. h. es muß ∡ a = ∡ b sein.

*) Daß dieser Beweis — und in Folge dessen die ganze nachfolgende Dar-

2) Werden zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten, so sind je zwei innere Wechselwinkel einander gleich.



Voraussetzung: $AB \parallel CD$.
Behauptung: $\measuredangle\, a = \measuredangle\, b$.

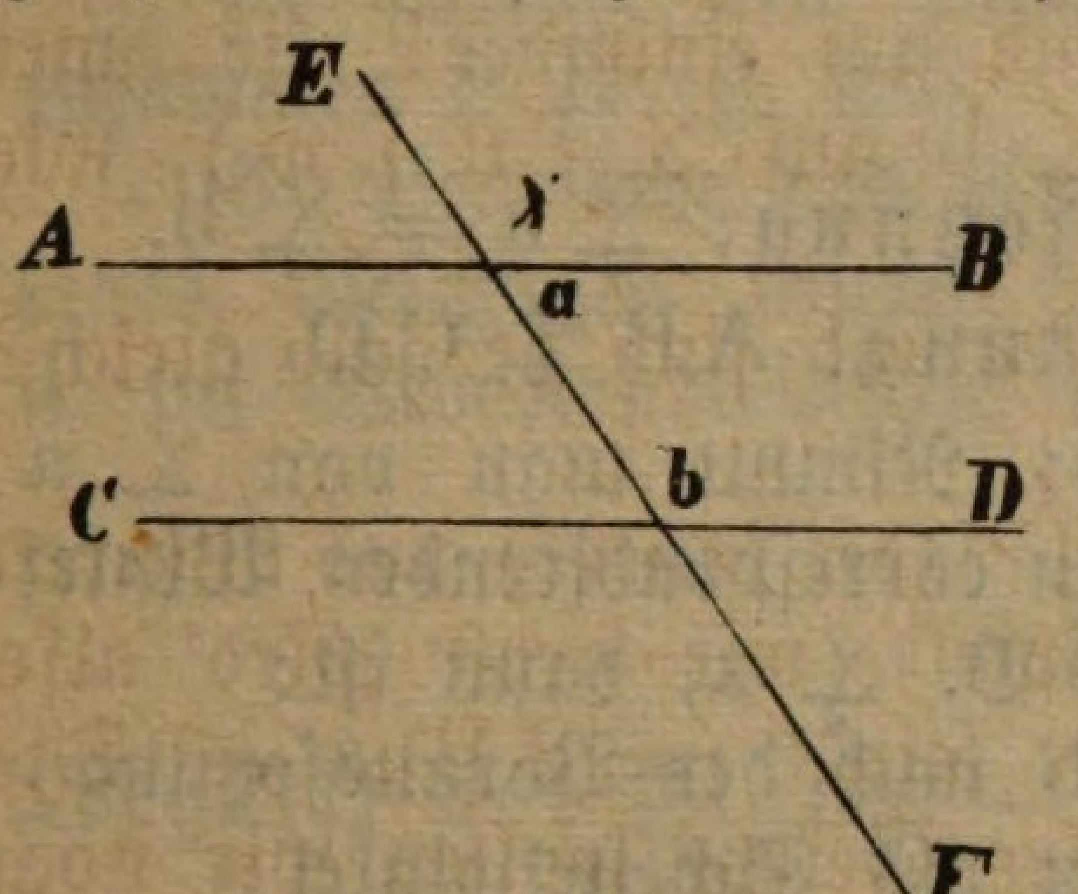
Anleitung z. Beweise. Um diesen Satz auf den vorhergehenden stützen zu können, nimmt man von einem der beiden Winkel den correspondirenden Winkel zu Hülfe, z. B. $\measuredangle\, x$. Was läßt sich dann von $\measuredangle\, a$ und $\measuredangle\, x$ behaupten? (sie sind gleich als correspondirende Winkel). Was von $\measuredangle\, b$ und $\measuredangle\, x$? (sie sind gleich nach §. 24). Was folgt daraus für $\measuredangle\, a$ und $\measuredangle\, b$? (sie müssen ebenfalls gleich sein).

Beweis: Nimmt man den correspondirenden Winkel von $\measuredangle\, a$ oder $\measuredangle\, b$ zu Hülfe, z. B. $\measuredangle\, x$, dann ist

$\measuredangle\, a = \measuredangle\, x$ als correspondirende $\measuredangle$ bei $\parallel$
$\measuredangle\, b = \measuredangle\, x$ als Scheitelwinkel

folglich $\measuredangle\, a = \measuredangle\, b$.

3) Werden zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten, so sind je zwei Innenwinkel zusammen zwei rechten Winkeln gleich.



Voraussetzung: $AB \parallel CD$.

Behauptung: $\measuredangle\, a + \measuredangle\, b = 2R$.

Beweis: Nimmt man den correspondirenden Winkel von $\measuredangle\, a$ oder von $\measuredangle\, b$ zu Hülfe, z. B. $\measuredangle\, x$, dann ist:

$\measuredangle\, a + \measuredangle\, x = 2R$ als Nebenwinkel
$\measuredangle\, b = \measuredangle\, x$ als corresp. W.

folglich $\measuredangle\, a + \measuredangle\, b = 2R$.

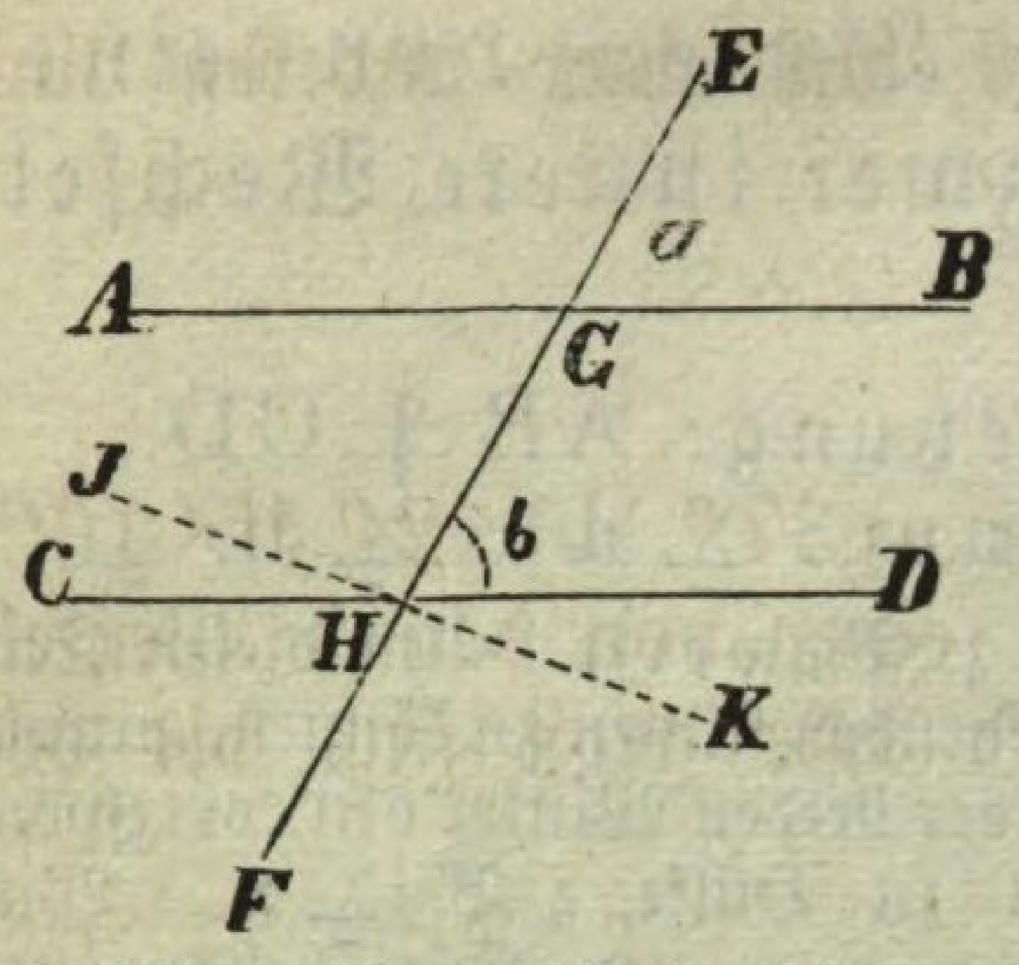
§. 27.

a. **Lehrsätze:** (Umkehrungen der drei vorhergehenden Lehrsätze.)

1) Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten und es sind ein Paar correspondirende Winkel einander gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel.

---

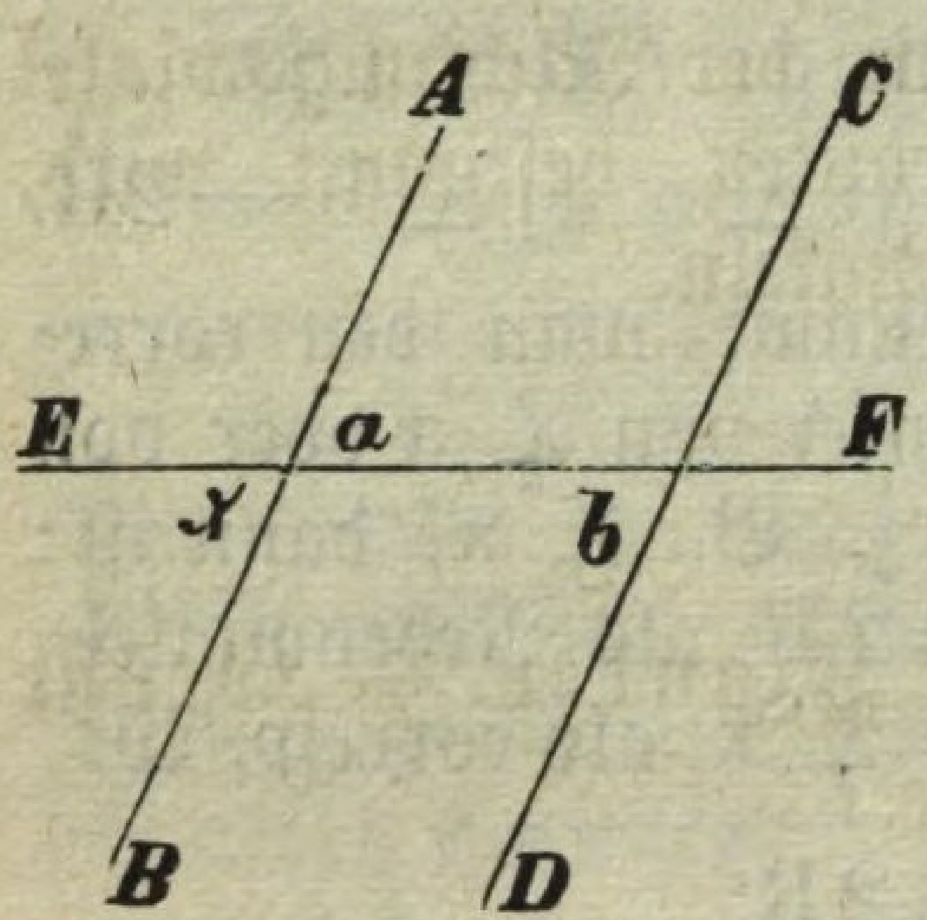
stellung der Theorie von den Parallellinien — manches zu wünschen übrig läßt, ist dem Verfasser wohl bekannt. Eigentlich ist obiger Satz als Grundsatz und der Beweis desselben als eine bloße Veranschaulichung aufzufassen. Da aber seit Euklid keiner der vielfachen Versuche, die Lehre von den Parallellinien mit vollkommener Evidenz darzustellen, als ganz gelungen anzusehen ist, so hat der Verfasser — mit Rücksicht auf den Zweck des Buches — der einfachsten und anschaulichsten Darstellung vor allen anderen den Vorzug gegeben.



Voraussetzung: $\measuredangle a = \measuredangle b$.
Behauptung: $AB \parallel CD$.
Beweis: Wäre AB nicht parallel CD, so könnte man durch H eine Linie parallel zu AB ziehen. Dies sei JK. Dann wäre (nach §. 26. 1) $\measuredangle a = \measuredangle KHG$. Nach der Voraussetzung ist $\measuredangle a = \measuredangle b$, also müßte $\measuredangle b = \measuredangle KHG$ sein, was offenbar nicht möglich ist. Auf diese Ungereimtheit ist man durch die Annahme gekommen, daß CD nicht parallel AB ist, folglich muß diese Annahme falsch und daher $CD \parallel AB$ sein.

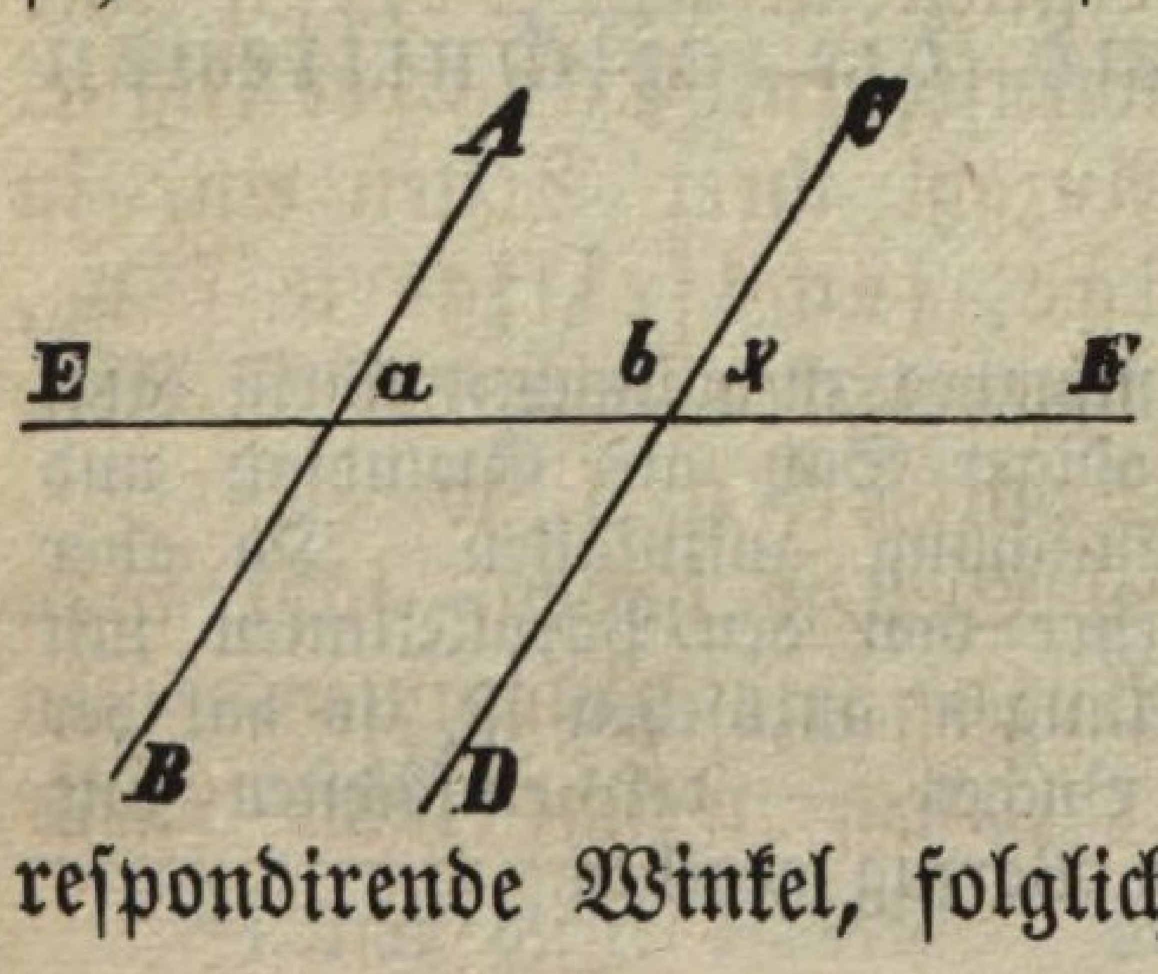
Anmerkung. Wird aus bekannten Wahrheiten durch eine Kette von Schlüssen eine neue Wahrheit hergeleitet, so sagt man, die letztere Wahrheit sei direct erwiesen worden. Zeigt man dagegen, daß eine Behauptung richtig sein müsse, weil die Annahme des Gegentheils auf eine Ungereimtheit führt, so ist diese Behauptung indirect oder apagogisch bewiesen. Der vorstehende Beweis ist das erste Beispiel eines solchen indirecten Beweises; alle früher geführten Beweise waren directe Beweise.

2) **Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten und es sind ein Paar innere Wechselwinkel einander gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel.**



Voraussetzung: $\measuredangle a = \measuredangle b$.
Behauptung: $AB \parallel CD$.
Beweis: Nimmt man von $\measuredangle a$ oder $\measuredangle b$ den correspondirenden Winkel zu Hülfe, z. B. $\measuredangle x$, dann ist:
$\measuredangle a = \measuredangle b$ nach der Voraussetzung
$\measuredangle a = \measuredangle x$ als Scheitelwinkel
folglich $\measuredangle b = \measuredangle x$. Dies sind corresp. Winkel, folglich (nach Nr. 1 dieses §.) $AB \parallel CD$.

3) **Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten und es sind zwei Innenwinkel zusammen zwei rechten Winkeln gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel.**



Voraussetzung: $\measuredangle a + \measuredangle b = 2R$.
Behauptung: $AB \parallel CD$.
Beweis:
$\measuredangle a + \measuredangle b = 2R$ nach der Voraussf.
$\measuredangle x + \measuredangle b = 2R$ als Nebenwinkel
folglich $\measuredangle a = \measuredangle x$. Dies sind correspondirende Winkel, folglich (nach Nr. 1. d. §.) $AB \parallel CD$.

b. Folgesatz: Linien, welche lothrecht auf einer anderen Linie stehen, sind parallel.

Uebungen.

a. Berechnungen:

1) Wie groß ist der Nebenwinkel von a) 37^0, b) $12^0\ 15'\ 16''$?

2) Es schneiden sich zwei Linien und einer von den 4 Winkeln am Schnittpunkte ist gleich $85^0\ 46'\ 27''$; wie groß sind die drei anderen?

b. Lehrsätze:

1) Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen lothrecht aufeinander.

2) Wenn zwei Winkel einen gemeinschaftlichen Schenkel und Scheitel haben und zusammen 2R betragen, so bilden die beiden anderen Schenkel eine gerade Linie. (Indirect.)

3) Werden zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten, so sind: a. je zwei äußere Wechselwinkel gleich,
b. es betragen je zwei äußere Gegenwinkel zusammen 2R.

4) Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, so sind die geschnittenen Linien parallel, wenn
a. ein Paar äußere Wechselwinkel gleich sind,
b. ein Paar äußere Gegenwinkel zusammen = 2R sind.

5) Winkel mit parallelen Schenkeln sind gleich oder betragen zusammen 2R (§. 26).

6) Begründe das Verfahren, nach welchem der Richtungswinkel eines Geschützes mittelst eines Libellenquadranten bestimmt wird, a. bei Elevationswinkeln, b. bei Inclinationswinkeln.

Zweites Kapitel.

Begriff der Figur. — Eintheilung der Figuren. — Größe ihrer Winkelsumme.

§. 28.

Jeder völlig begrenzte Theil einer Ebene heißt eine ebene Figur. Sie wird geradlinig genannt, wenn sie von lauter geraden Linien, krummlinig, wenn sie von lauter krummen Linien, gemischtlinig, wenn sie theils von geraden, theils von krummen Linien begrenzt wird. Die Begrenzungslinien heißen Seiten und die Punkte, in welchen die Seiten zusammenstoßen, Ecken der Figur.

Man theilt die Figuren nach der Anzahl ihrer Seiten ein, in dreiseitige, vierseitige, fünfseitige, sechsseitige u. s. w., oder benennt sie auch nach der Anzahl ihrer Ecken (= der Seitenzahl): Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck u. s. w.

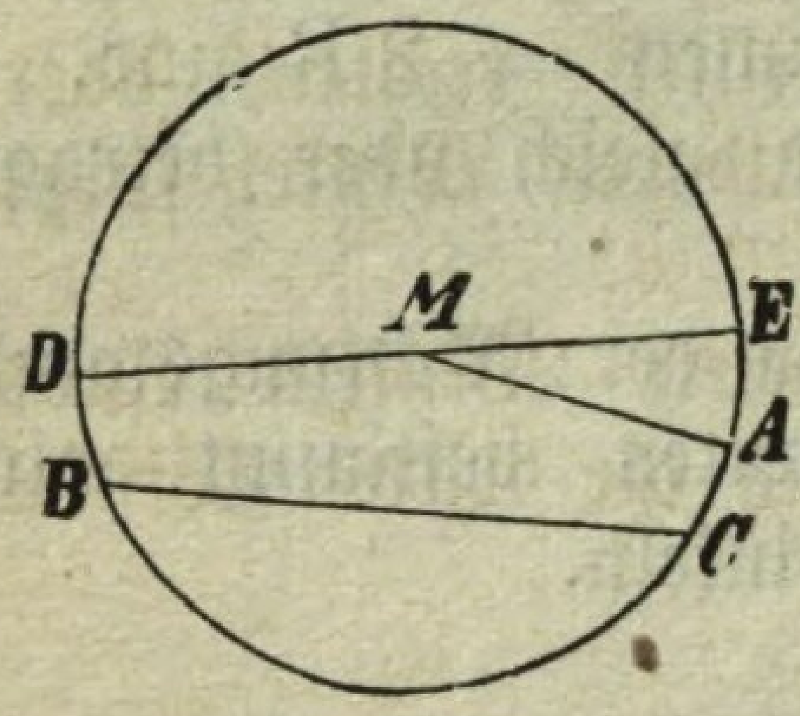
Alle Figuren, welche mehr als drei Seiten haben, faßt man unter dem Namen Vielseite oder Polygone zusammen. In diesen heißt jede Verbindungslinie zweier Ecken, welche keine Seite ist, Diagonale.

Ist an einer Ecke eines Polygons ein innerer Winkel convex, so wird diese Ecke eine einspringende Ecke genannt.

§. 29.

Dreht man eine begrenzte gerade Linie um den einen ihrer Endpunkte so lange herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so heißt die krumme Linie, welche von ihrem anderen Endpunkte beschrieben wird, Kreislinie und die von ihr eingeschlossene Figur Kreis. Ein Kreis ist daher eine ebene Figur, bei welcher alle Punkte der Begrenzung — Peripherie genannt — von einem innerhalb liegenden Punkte — dem Mittelpunkte oder Centrum — gleich weit abstehen. Jede Linie (MA) vom Centrum bis zu einem Punkte der Peripherie gezogen, heißt Halbmesser oder Radius, jeder Theil der Peripherie ($\widehat{BC}$) ein Kreisbogen, die Verbindungslinie zweier Punkte der Peripherie (BC) eine Sehne und jede Sehne (DE), welche durch den Mittelpunkt geht, Durchmesser oder Diameter des Kreises.

Aus dem Begriff des Kreises folgt: Alle Halb- und alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich.



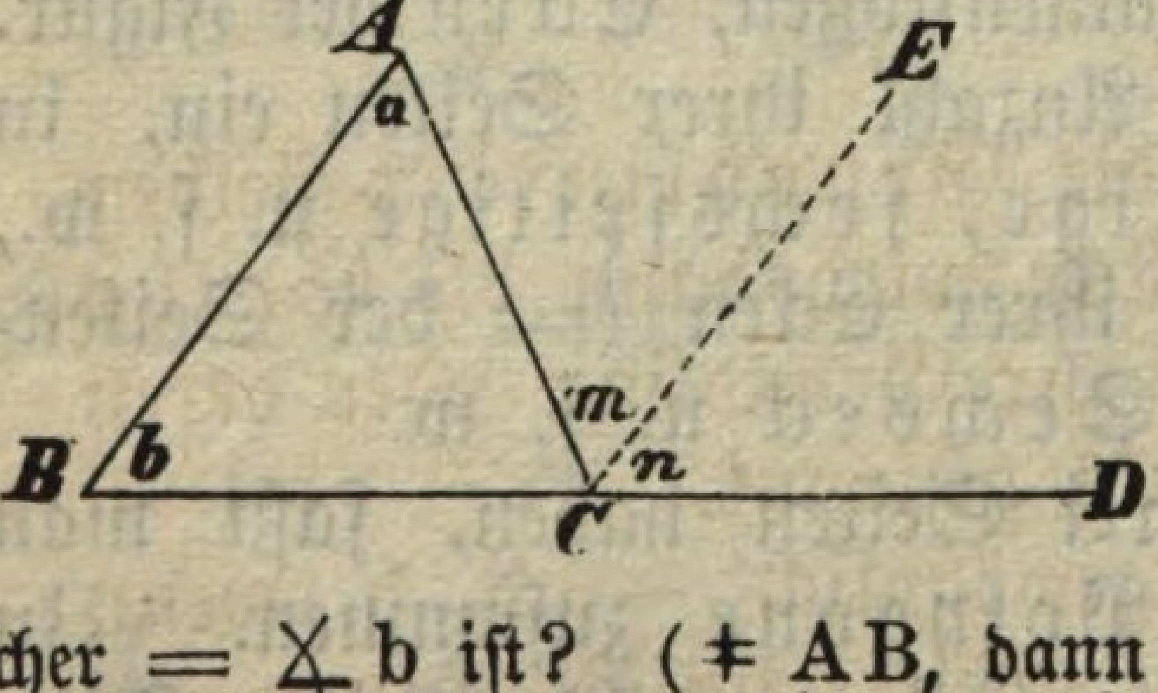
Der Kreis ist die einzige krummlinig begrenzte Figur, welche in der niederen oder Elementar-Geometrie betrachtet wird. Beschreibung und Gebrauch des Zirkels.

§. 30.

Verlängert man eine Seite eines Dreiecks, so heißt der Winkel, welcher von der Verlängerung und der anstoßenden Dreiecksseite gebildet wird, ein Außenwinkel des Dreiecks.

§. 31.

a. **Lehrsatz:** Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden inneren Winkel des Dreiecks, welche nicht Nebenwinkel von ihm sind.



Voraussetzung: ∡ ACD ist ein Außenwinkel des Δ ABC.

Behauptung: ∡ ACD = ∡ a + ∡ b.

Anleitung zum Beweise: Wie muß von C aus eine Linie gezogen werden, um dadurch von ∡ ACD einen Theil abzuschneiden, welcher = ∡ b ist? (∦ AB, dann ∡ n = ∡ b). Welchem Winkel ist dann der andere Theil gleich? (∡ m = ∡ a). Was ergiebt sich beim Summiren dieser Winkel? (∡ m + ∡ n = ∡ a + ∡ b).

Beweis: Man ziehe von C aus eine Linie $CE \parallel AB$, dann ist:

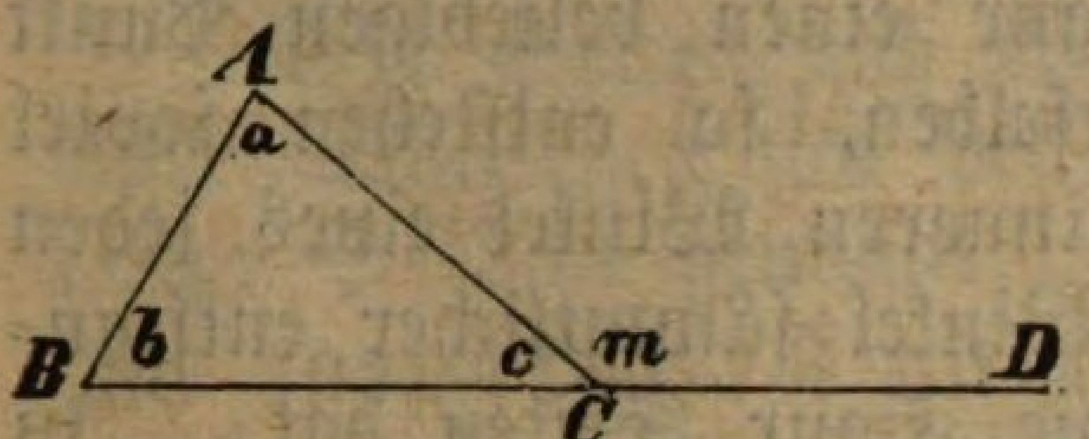
$\sphericalangle n = \sphericalangle b$ als correspondirende Winkel bei $\parallel$
$\sphericalangle m = \sphericalangle a$ als innere Wechselwinkel bei $\parallel$

$\sphericalangle n + \sphericalangle m = \sphericalangle b + \sphericalangle a$; oder $\sphericalangle ACD = \sphericalangle a + \sphericalangle b$.

b. **Folgesatz:** Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden inneren Winkel, welche nicht Nebenwinkel von ihm sind.

§. 32.

a. **Lehrsatz:** Die drei Winkel eines jeden Dreiecks sind zusammen zwei rechten Winkeln gleich.



Voraussetzung: ABC ist ein beliebiges Dreieck.

Behauptung: $\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 2 R$.

Beweis: Verlängert man eine Seite des Dreiecks, z. B. BC, so daß der Außenwinkel m entsteht, so ist:

$\sphericalangle m + \sphericalangle c = 2 R$ als Nebenwinkel
$\sphericalangle m = \sphericalangle a + \sphericalangle b$ (§. 31)

$\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 2 R$.

b. **Folgesätze:** 1) Enthält ein Dreieck einen rechten, oder einen stumpfen Winkel, so müssen die beiden anderen Winkel spitze Winkel sein.

2) Wenn zwei Winkel eines Dreiecks zweien Winkeln eines anderen Dreiecks einzeln gleich sind, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

§. 33.

a. Hat ein Dreieck einen rechten Winkel, so heißt es rechtwinkelig, hat es einen stumpfen Winkel, so heißt es stumpfwinkelig, sind alle drei Winkel spitze Winkel, so wird es spitzwinkelig genannt.

Beim rechtwinkeligen Dreiecke heißt die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse; jede der beiden anderen Seiten führt den Namen Kathete.

b. Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn seine drei Seiten gleich lang sind; es wird gleichschenklig genannt, wenn nur zwei seiner Seiten gleiche Länge haben, ungleichseitig, wenn seine drei Seiten verschieden lang sind.

§. 34.

Jede Seite eines Dreiecks kann als die Grundlinie desselben angesehen werden. Die gegenüberliegende Ecke wird dann die Spitze und das Loth, welches von der Spitze bis zur Grundlinie oder deren Verlängerung reicht, die Höhe des Dreiecks genannt.

Beim gleichschenkligen Dreiecke wird gewöhnlich — d. h. wenn es nicht bestimmt anders gesagt ist — die Seite, welche keiner der beiden anderen Seiten gleich ist, als die Grundlinie des Dreiecks

angesehen. — Die beiden gleichen Seiten führen dann auch den Namen Schenkel.

Wie viel Höhen können in jedem Dreiecke gezogen werden? Welche Lage haben dieselben in Bezug auf das Dreieck, a. beim spitzwinkeligen, b. beim stumpfwinkeligen, c. beim rechtwinkeligen Dreieck?

§. 35.

Lehrsatz: Die inneren Winkel eines jeden Vielecks betragen zusammen doppelt so viel rechte Winkel als die Figur Seiten hat weniger vier rechten Winkeln.

Beweis: Nimmt man in der Figur einen beliebigen Punkt an und verbindet ihn mit allen Ecken derselben, so entstehen soviel Dreiecke als die Figur Seiten hat. Die inneren Winkel eines jeden Dreiecks sind = 2 R, also betragen die Winkel sämmtlicher entstandenen Dreiecke doppelt soviel rechte als die Figur Seiten hat. In dieser Winkelsumme sind die Winkel, welche um den angenommenen Punkt herumliegen und außerdem die sämmtlichen Winkel der Figur enthalten. Zieht man die ersteren, welche (nach §. 22. b. 2) vier rechte Winkel betragen, ab, so bleiben für die Winkel der Figur übrig: doppelt soviel rechte als die Figur Seiten hat, weniger vier rechten.

Uebungen.

a. **Berechnungen.**

1) In einem Dreieck ist ein Winkel = 25° 17′ 58″, ein zweiter = 65° 18′ 16″; wie groß ist a. der dritte Winkel? b. der Nebenwinkel des dritten Winkels?

2) In einem rechtwinkeligen Dreieck ist einer der spitzen Winkel = 36° 12′; wie groß ist der andere?

3) Wie groß ist die Winkelsumme a. jedes Vierecks? b. jedes Fünfecks? c. jedes Zwölfecks, d. jedes n ecks?

b. **Fragen und Lehrsätze.**

1) Wie viel Diagonalen lassen sich in einem n eck a. von einer Winkelspitze aus, b. überhaupt ziehen?

2) In wie viel Dreiecke wird ein n eck zerlegt, wenn man von einer Winkelspitze aus sämmtliche Diagonalen zieht?

3) Beweise mit Hülfe der Antwort zu Nr. 2 den Lehrsatz §. 35.

4) Beweise Lehrsatz §. 32 mit Hülfe einer Linie, welche durch eine beliebige Ecke parallel zur Gegenseite gezogen wird.

5) Auf eine Linie läßt sich von einem außerhalb liegenden Punkte nur ein Loth ziehen (§. 32 b. 1).

6) Fällt man auf jeden Schenkel eines Winkels von einem beliebigen Punkte aus ein Loth, so schließen die beiden Lothe einen Winkel ein, welcher entweder gleich dem gegebenen Winkel oder gleich seinem Nebenwinkel ist.

7) Begründe das Verfahren, durch welches der Richtungswinkel eines Geschützes mittelst eines Pendelquadranten bestimmt wird. (§. 32. b. 2.)

Drittes Kapitel.

Begriff der Congruenz. Anwendung der Congruenz auf das Dreieck.

§. 36.

a. An jeder Figur nehmen wir eine bestimmte Größe oder Ausdehnung und eine bestimmte Form oder Gestalt wahr. Stimmen zwei Figuren in Größe und Form vollkommen überein, so heißen sie congruent. Sie können dann in der Vorstellung so aufeinander gelegt werden, daß sich ihre Grenzen genau decken.

Die Seiten und Winkel congruenter Figuren, welche bei dem Aufeinanderlegen sich decken, werden gleichliegende oder homologe Stücke genannt; solche Stücke sind natürlich einander gleich. Bei congruenten Dreiecken erkennt man die gleichliegenden Stücke am leichtesten daran, daß gleichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüberliegen.

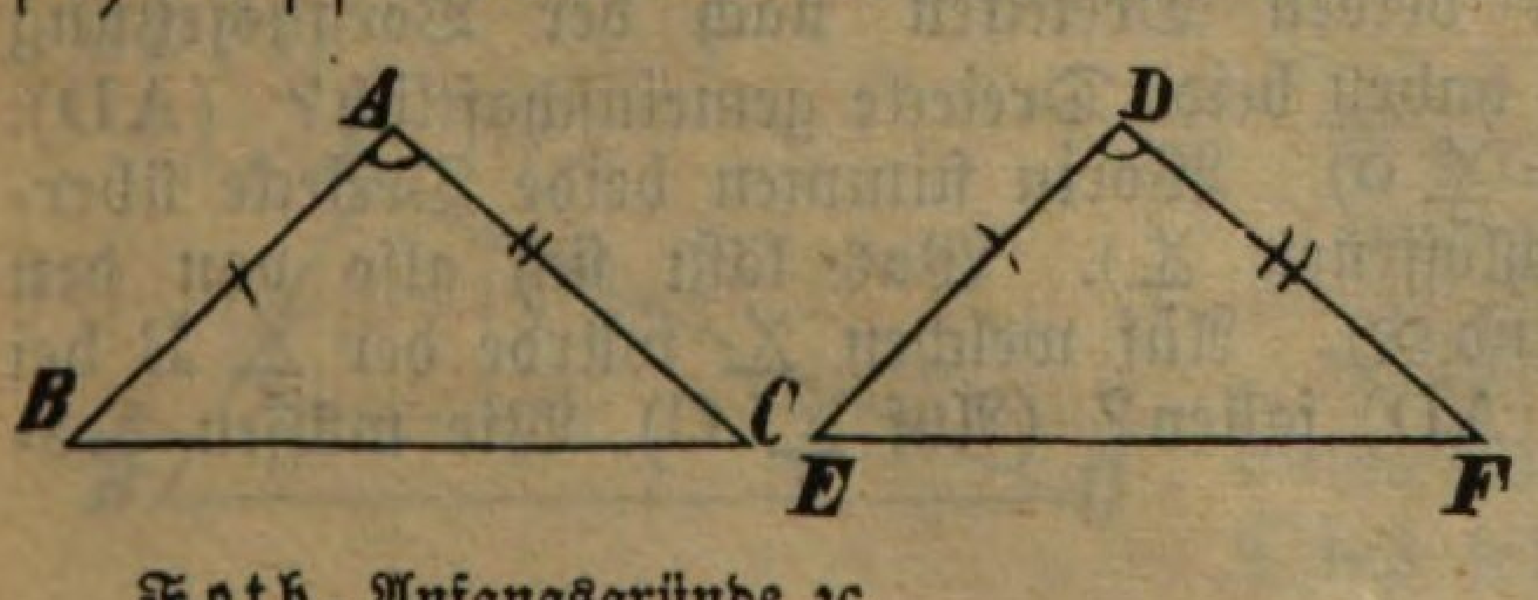
Das Zeichen für congruent ist: $\cong$.

Haben zwei Figuren gleiche Größe, aber verschiedene Form, so heißen sie gleich, haben sie gleiche Form bei verschiedener Größe, so werden sie ähnlich genannt. Die Betrachtung gleicher und ähnlicher Figuren wird in späteren Kapiteln erfolgen.

b. Zeichnet man eine Figur, so findet man bald, daß schon einige Stücke (Seiten und Winkel) die Größe und Form fest bestimmen; diese Stücke heißen Bestimmungsstücke. Schneidet man z. B. auf den Schenkeln eines Winkels beliebige Längen ab und verbindet die Abschnittspunkte durch eine gerade Linie, so entsteht ein Dreieck von ganz bestimmter Größe und Form. Es genügen also z. B. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel um ein Dreieck vollständig zu bestimmen. Die Untersuchung, durch wie viel und welche Bestimmungsstücke Größe und Form der Figuren bedingt wird oder unter welchen Bedingungen Figuren congruent sind, ist eine der wichtigsten und fruchtbarsten der gesammten Geometrie. Diese Untersuchung soll hier nur auf Dreiecke ausgedehnt werden, weil das Dreieck die einfachste geradlinige Figur ist und alle anderen Figuren sich in Dreiecke zerlegen lassen, alle Forschungen also auf das Dreieck zurückgeführt werden können.

§. 37.

Lehrsatz: Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.



Voraussetzung: AB = DE, AC = DF, ∡ A = ∡ D.

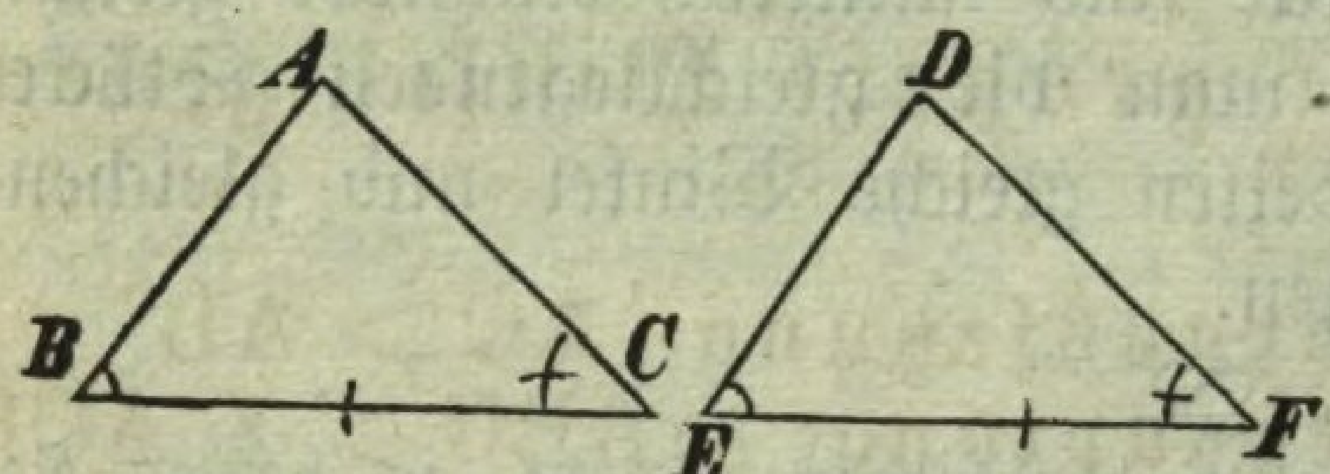
Behauptung: Δ ABC $\cong \Delta$ DEF.

Beweis: Man denke sich Δ DEF so auf Δ ABC gelegt, daß ∡ D den ∡ A deckt und dabei DE längs AB, also auch DF längs AC liegt; dann muß fallen:
1) P. E auf P. B, weil DE = AB,
2) P. F auf P. C, weil DF = AC,
3) S. EF auf S. BC, weil die Endpunkte beider Linien sich decken.
Folglich deckt dann Δ DEF das Δ ABC vollkommen.

Welche Seiten und Winkel sind als gleichliegende Stücke gleich?

§. 38.

a. **Lehrsatz:** Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.



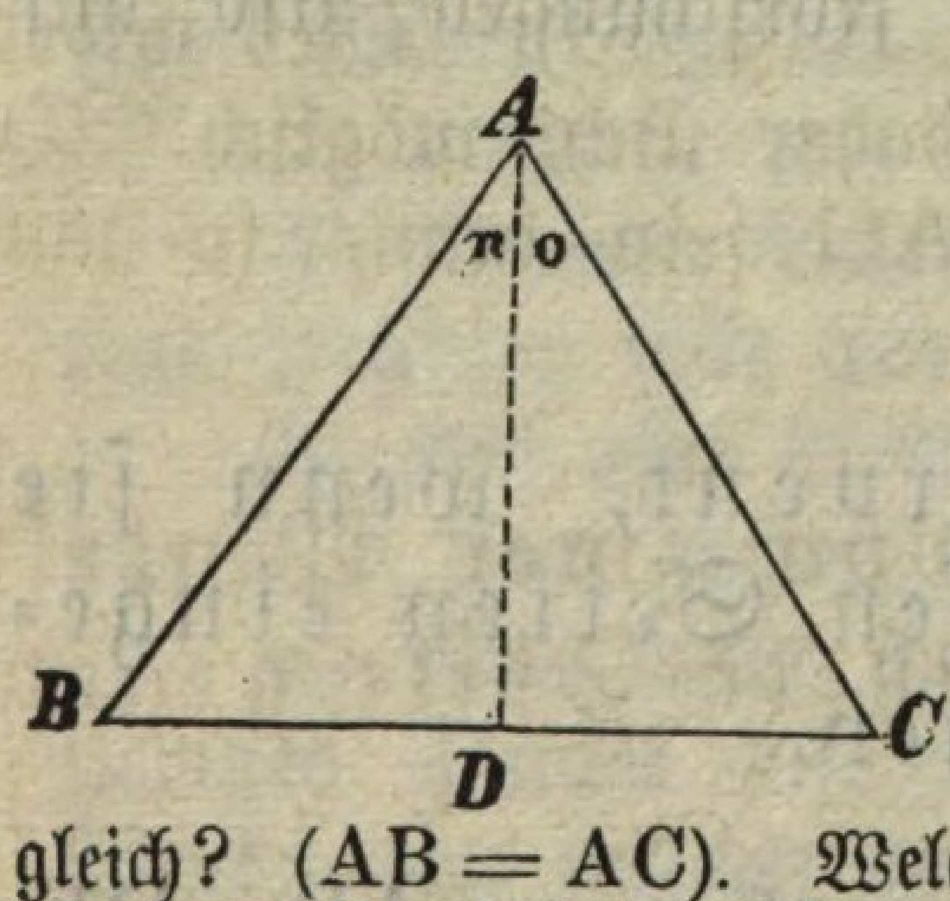
Voraussetzung: BC = EF; ∡ B = ∡ E; ∡ C = ∡ F.
Behauptung: Δ ABC ≅ Δ DEF.

Beweis: Man denke sich Δ DEF so auf Δ ABC gelegt, daß Seite EF die Seite BC deckt und dabei Punkt E auf B, also auch Punkt F auf Punkt C zu liegen kommt; dann muß fallen:
1) Seite ED in die Richtung BA, weil ∡ E = ∡ B;
2) Seite FD in die Richtung CA, weil ∡ F = ∡ C,
3) Punkt D auf Punkt A, weil Punkt D sowohl in die Richtung BA als auch in die Richtung CA, also dahin fallen muß, wo beide Richtungen sich schneiden. Folglich deckt Δ DEF das Δ ABC vollkommen.

b. **Folgesatz:** Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen (s. §. 32. b. 2).

§. 39.

a **Lehrsatz:** Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.



Voraussetzung: Seite AB = Seite AC.

Behauptung: ∡ B = ∡ C.

Anleitung z. B. Versuche Δ ABC in zwei congruente Dreiecke zu zerlegen; durch welche Hülfslinie kann dies wahrscheinlich geschehen? (Wenn man sich ∡ A halbirt denkt.) Welche Dreiecke sind entstanden? Welche Seiten sind in beiden Dreiecken nach der Voraussetzung gleich? (AB = AC). Welche Seite haben beide Dreiecke gemeinschaftlich? (AD). Welche Winkel sind gleich? (∡ n = ∡ o). Worin stimmen beide Dreiecke überein? (Zwei Seiten und dem eingeschlossenen ∡). Was läßt sich also von den beiden Dreiecken behaupten? (Sie sind ≅). Auf welchen ∡ würde der ∡ B bei der Deckung (Zusammenklappen um AD) fallen? (Auf ∡ C). Wie müssen deshalb ∡ B und ∡ C sein? (=).

Beweis: Man denke sich $\measuredangle A$ durch AD halbirt; dann ist:

$AB = AC$ nach der Voraussetzung

$AD = AD$

$\measuredangle n = \measuredangle o$ nach der Construction

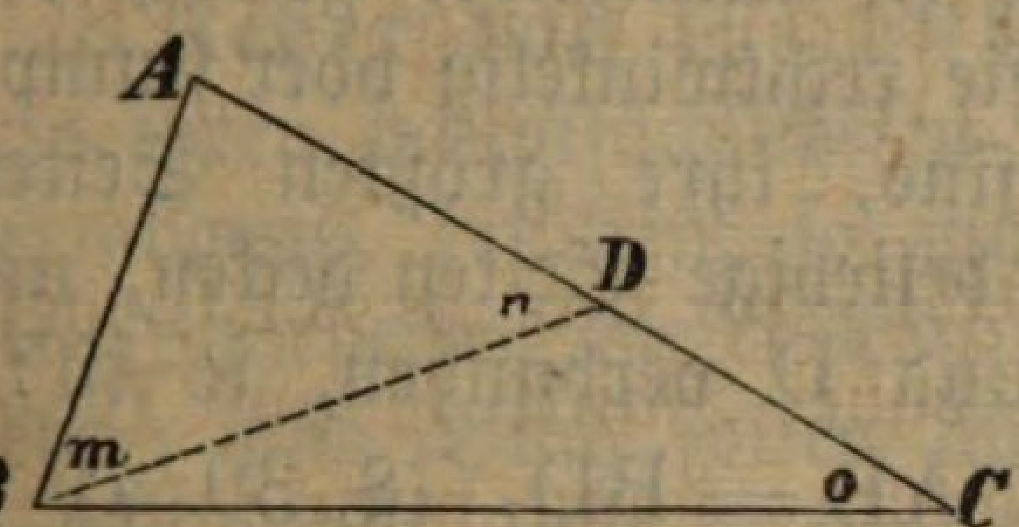
$\Delta ABD \cong \Delta ADC$ (§. 37). Daher $\measuredangle B = \measuredangle C$ als gleichliegende Stücke.

b. **Folgesatz:** 1) Im gleichschenkligen Δ liegen an der Grundlinie spitze Winkel.

2) Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich und da sie zusammen $= 2\ R$, so ist jeder $= \frac{2}{3}\ R = 60^{0}$.

§. 40.

Lehrsatz: In jedem Dreiecke liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel gegenüber.



Voraussetzung: $AC > AB$.
Behauptung: $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$.
Beweis: Man schneide $AD = AB$ ab und verbinde B mit D; dann ist:

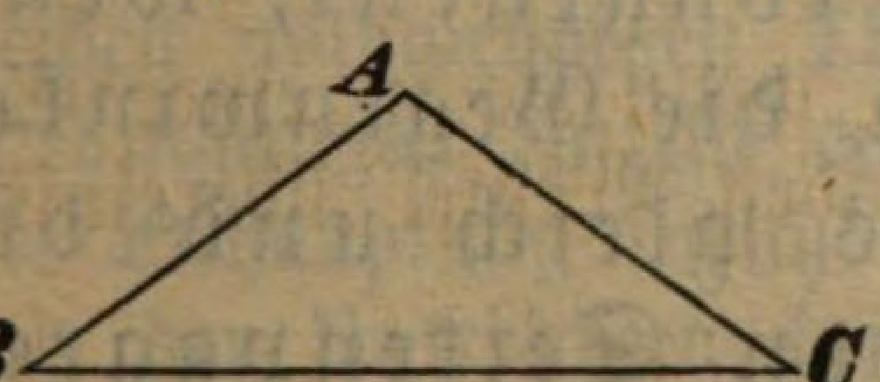
$\measuredangle m = \measuredangle n$ (§. 39);

$\measuredangle n > \measuredangle o$ (§. 31. b),

also auch $\measuredangle m > \measuredangle o$ und um so mehr $\measuredangle ABC > \measuredangle ACB$.

§. 41.

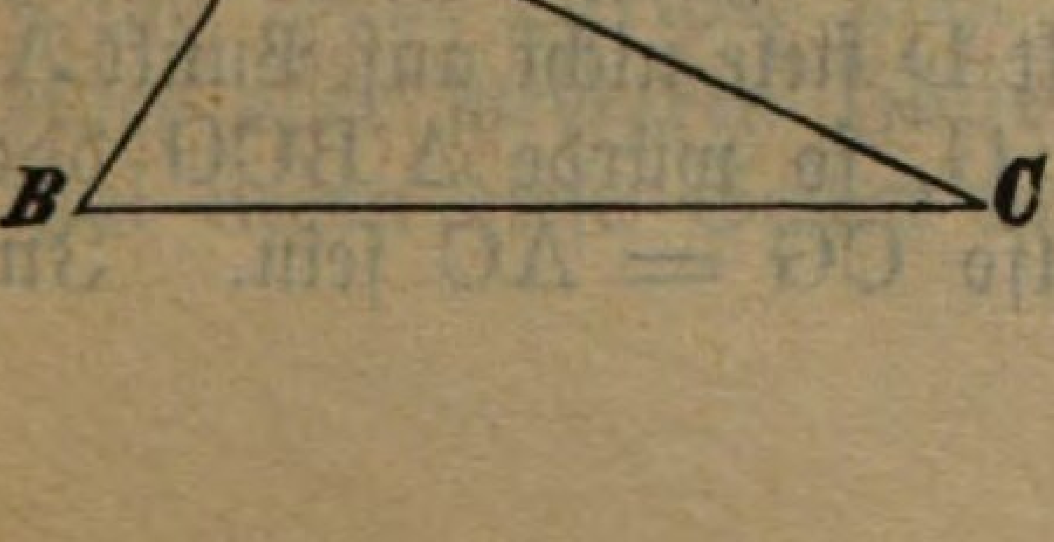
Lehrsatz: Gleichen Winkeln eines Dreiecks liegen gleiche Seiten gegenüber.



Voraussetzung: $\measuredangle B = \measuredangle C$.
Behauptung: $AB = AC$.
Beweis (indirect): Vergleicht man AB mit AC, so sind nur drei Fälle denkbar: AB kann größer, oder kleiner, oder gleich AC sein. Wäre $AB > AC$, so müßte auch sein (nach §. 40) $\measuredangle C > \measuredangle B$. Dies widerspricht der Voraussetzung und ist daher nicht möglich. Wäre $AB < AC$, so müßte auch sein: $\measuredangle C < \measuredangle B$ (§. 40). Dies widerspricht ebenfalls der Voraussetzung und ist daher nicht möglich. Da nun AB weder größer noch kleiner als AC sein kann, so muß $AB = AC$ sein.

§. 42.

a. **Lehrsatz:** Dem größeren von zwei Winkeln eines Dreiecks liegt auch die größere Seite gegenüber.



Voraussetzung: $\measuredangle B > \measuredangle C$.
Behauptung: $AC > AB$.
Beweis (indirect): Wäre $AC = AB$, dann müßte $\measuredangle B = \measuredangle C$ sein (§. 39. a). Dies widerspricht der Voraussetzung und

ist daher nicht möglich. Wäre $AC < AB$, so müßte $\sphericalangle B < \sphericalangle C$ sein. Dies widerspricht ebenfalls der Voraussetzung und ist daher nicht möglich. Da nun AC nicht gleich und auch nicht kleiner als AB sein kann, so muß $AC > AB$ sein.

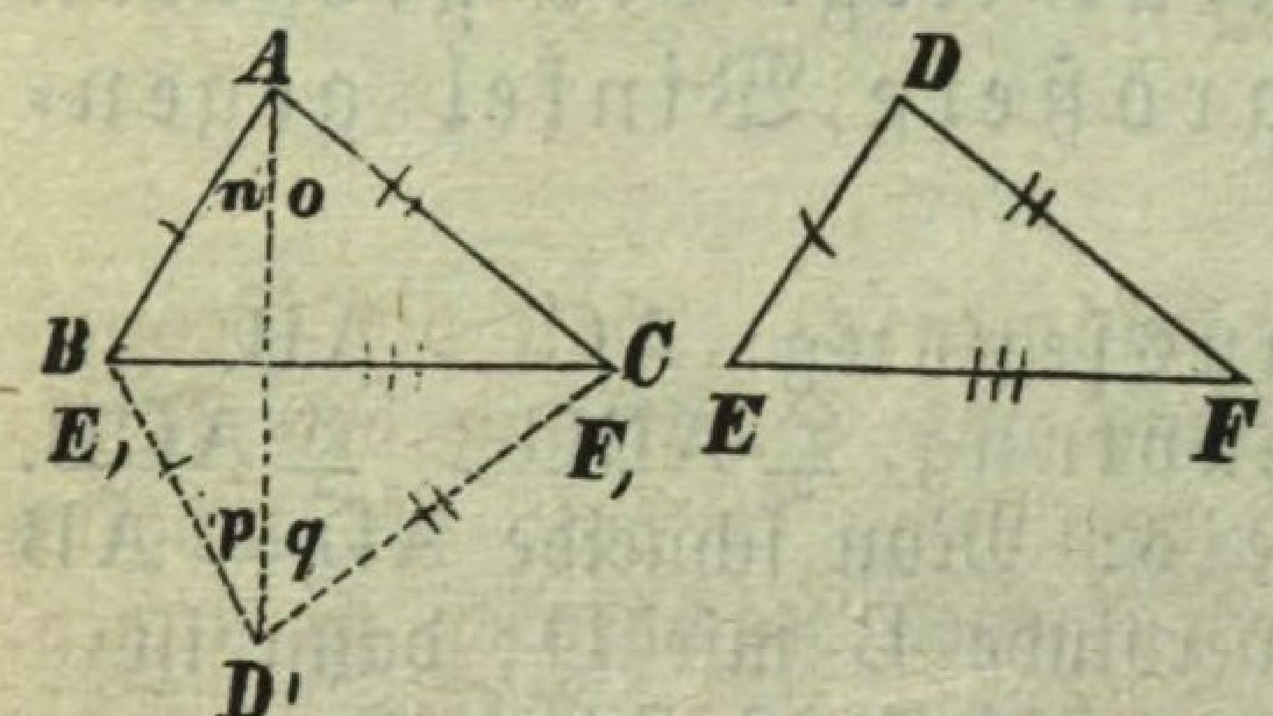
b. **Folgesatz:** Im rechtwinkeligen Δ ist die Hypotenuse, im stumpfwinkeligen Δ diejenige Seite die größeste, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt.

§. 43.

Lehrsatz Dreiecke sind congruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Voraussetzung: $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$.

Behauptung: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



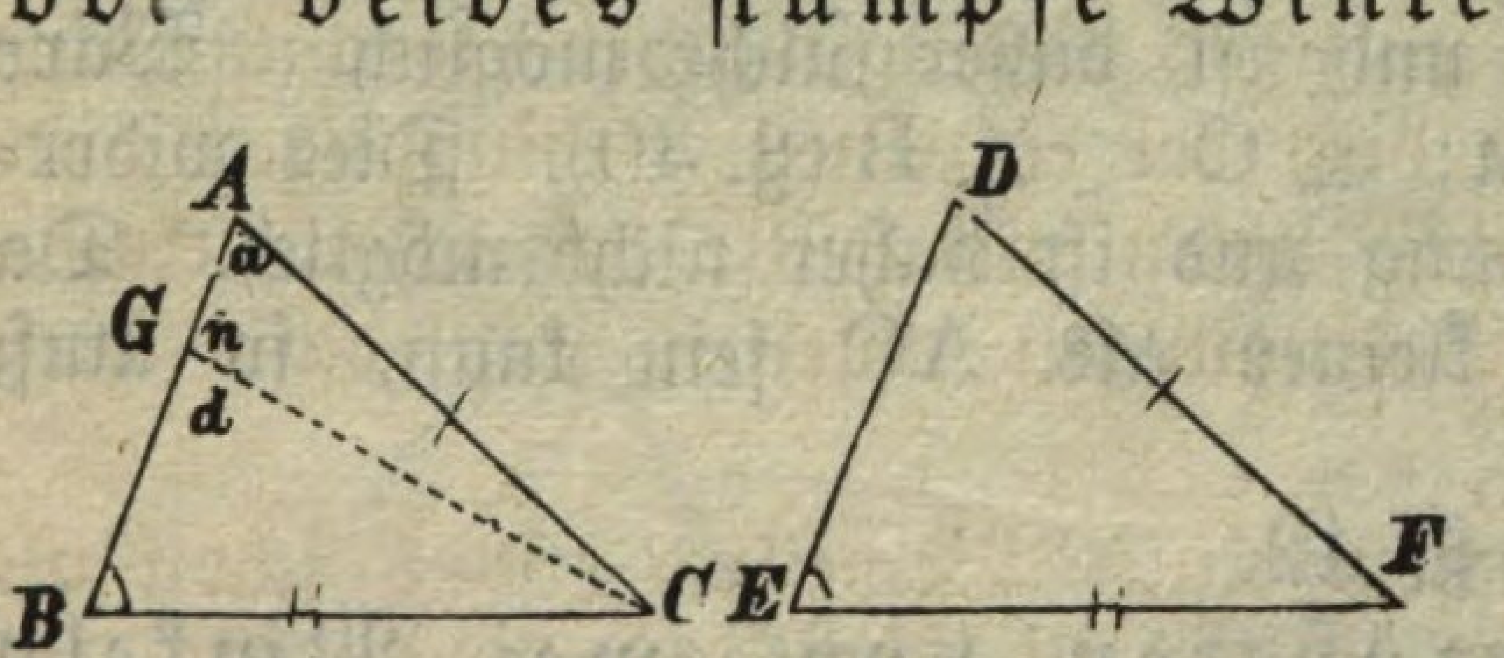
Beweis: Denkt man sich die beiden Dreiecke (wie nebenstehende Figur zeigt), so aneinander gelegt, daß sich, falls sie rechtwinkelig oder stumpfwinkelig sind, ihre größten Seiten, sonst zwei beliebige Seiten decken, und dann A und D verbunden, so ist:

$\sphericalangle n = \sphericalangle p$, weil im ΔABD_1 $AB = BD_1$ (§. 39. a)
$\sphericalangle o = \sphericalangle q$, „ „ ΔACD_1 $AC = CD_1$ „

$\sphericalangle n + \sphericalangle o = \sphericalangle p + \sphericalangle q$, oder $\sphericalangle A = \sphericalangle D$,
folglich nach §. 37. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

§. 44.

a. **Lehrsatz:** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, die Gegenwinkel des einen gleichen Seitenpaares gleich und die Gegenwinkel des anderen gleichen Seitenpaares gleichartig (d. h. beides spitze, oder beides rechte, oder beides stumpfe Winkel) sind.



Voraussetzung: $AC = DF$; $BC = EF$; $\sphericalangle B = \sphericalangle E$: $\sphericalangle A$ mit $\sphericalangle D$ gleichartig.

Behauptung: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Beweis: Man denke sich ΔDEF so auf ΔABC gelegt, daß Seite EF die Seite BC deckt und dabei Punkt E auf B, also auch Punkt F auf Punkt C zu liegen kommt. Dann muß ED in die Richtung von BA fallen, weil $\sphericalangle E = \sphericalangle B$ ist. Ob aber auch Punkt D auf Punkt A fallen wird, ist noch fraglich, weil es nicht bekannt ist, ob $ED = AB$. Gesetzt Punkt D fiele nicht auf Punkt A, sondern vielleicht zwischen B und A nach G, so würde ΔBCG das auf ΔABC gelegte ΔDEF vorstellen, also $CG = AC$ sein. Im

Δ ACG wäre dann CA = CG, also ∡ a und ∡ n spitz (§. 39. b. 1). Jeder spitze Winkel hat einen stumpfen Nebenwinkel, daher müßte ∡ d, also auch ∡ D stumpf sein. Dies ist ein Widerspruch mit der Voraussetzung, welche den Fall, daß ∡ A spitz und ∡ D stumpf ist, bestimmt ausschließt, folglich kann Punkt D nicht zwischen B und A fallen.

Ebenso läßt sich zeigen, daß Punkt D nicht in die Verlängerung von BA fallen kann.

Es muß also Punkt D auf Punkt A zu liegen kommen und folglich Δ DEF das Δ ABC vollkommen decken.

b. **Folgesatz:** Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren von beiden übereinstimmen.

Denn der Gegenwinkel der kleineren von beiden Seiten muß in beiden Dreiecken ein spitzer Winkel sein.

§. 45.

Ueber das Selbstfinden der Beweise. Soll die Geometrie ihren hauptsächlichsten Zweck: Uebung und Schärfung des Denkvermögens, erfüllen, so muß man sich bemühen, so bald als möglich die Wahrheiten dieser Wissenschaft durch eigenes Nachdenken zu finden. Lehrer und Buch sollen nur den Weg zeigen und da helfen, wo die eigene Kraft nicht ausreicht. Der erste Schritt hierzu ist das Selbstfinden der Beweise gegebener Lehrsätze. Dies kann zwar nicht nach einer für alle Fälle passenden Regel geschehen, aber dem Anfänger werden dennoch folgende Andeutungen nützlich sein:

1) Voraussetzung und Behauptung wiederholen nur den Inhalt des Lehrsatzes auf eine bestimmte Figur bezogen und streng in seine beiden nothwendigen Theile gegliedert. Die Voraussetzung zählt die Bedingungen einzeln auf, aus welchen etwas gefolgert werden soll, die Behauptung spricht diese Folgerung aus. Tritt bei einem Lehrsatz der Unterschied beider Theile nicht klar hervor, so suche man den Lehrsatz so umzuformen, daß die Voraussetzung mit: „Wenn", die Behauptung mit: „so" anfängt.

2) Im Beweise muß jede einzelne Bedingung der Voraussetzung wirklich benutzt werden. Kann dies bei einzelnen Bedingungen nicht direct geschehen, so muß man aus ihnen mit Hülfe der schon bekannten Gesetze andere brauchbare Bedingungen ableiten und dann diese benutzen.

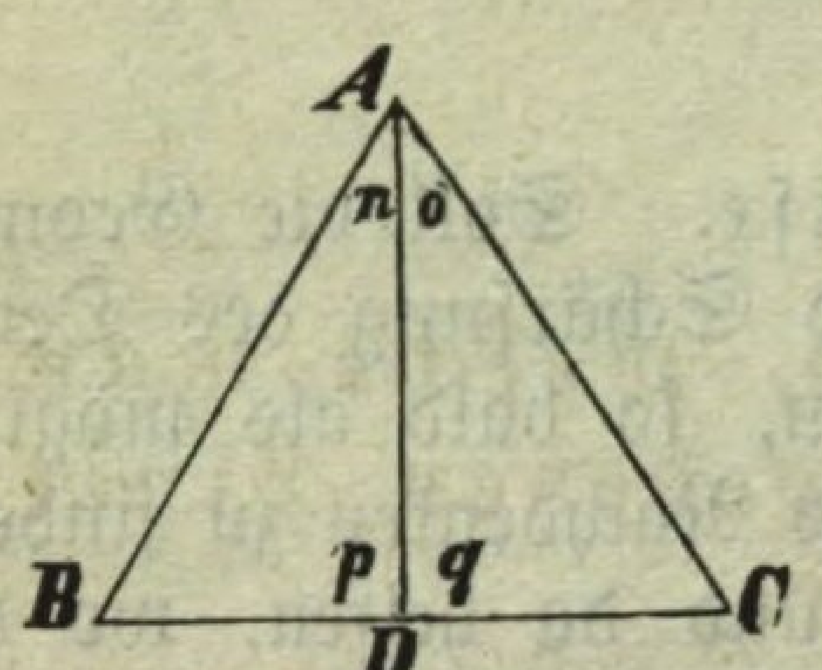
3) Nie darf beim Aufsuchen eines Beweises etwas schon als wahr angenommen werden, was in der Behauptung steht, also erst bewiesen werden soll.

4) Soll die Gleichheit von Linien oder Winkeln bewiesen werden, so untersuche man zunächst, ob dieselben nicht als gleichliegende Stücke in Dreiecken vorkommen, deren Congruenz sich darthun läßt. Sind solche Dreiecke nicht vorhanden, so suche man durch Ziehen von einer oder mehreren Hülfslinien solche Dreiecke zu erlangen. Manchmal liegen diese Seiten und Winkel auch in demselben Dreieck und

man kann dann durch §. 39 und 41 zum Ziele kommen. — Sollen Seiten und Winkel ungleich sein, so wird man den Beweis mit Hülfe von §. 40 und 42 suchen. Treten später auch noch andere Beziehungen als Gleichheit oder Ungleichheit von Seiten und Winkeln auf, so rufe man sich zunächst die Lehrsätze ins Gedächtniß zurück, welche dem zu erweisenden ähnlich sind, oder mit ihm in einem erkennbaren Zusammenhange stehen.

§. 46.

Lehrsatz: Halbirt in einem gleichschenkligen Dreiecke eine Linie den Winkel an der Spitze, so halbirt sie auch die Grundlinie und steht auf derselben lothrecht.



Voraussetzung: $AB = AC$; $\sphericalangle n = \sphericalangle o$.

Behauptung: $BD = CD$, $AD \perp BC$.

Beweis: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (§. 37). Daher als gleichliegende Stücke $BD = CD$ und $\sphericalangle p = \sphericalangle q$. Diese Winkel sind Nebenwinkel, also jeder $= 1\,R$ und daher $AD \perp BC$.

§. 47.

Lehrsatz: Verbindet in einem gleichschenkligen Dreiecke eine Linie die Spitze mit der Mitte der Grundlinie, so steht diese Linie lothrecht auf der Grundlinie und halbirt den Winkel an der Spitze. (Fig. §. 46.)

Voraussetzung: $AB = AC$, $BD = CD$.

Behauptung: $\sphericalangle n = \sphericalangle o$; $AD \perp BC$.

Beweis: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (§. 43). Mithin als gleichliegende Stücke $\sphericalangle n = \sphericalangle o$ und $\sphericalangle p = \sphericalangle q$. Letztere Winkel sind Nebenwinkel, also jeder $= 1\,R$ und daher $AD \perp BC$.

§. 48.

Lehrsatz: Zieht man in einem gleichschenkligen Dreiecke von der Spitze aus ein Loth auf die Grundlinie, so halbirt dasselbe die Grundlinie und den Winkel an der Spitze. (Fig. §. 46.)

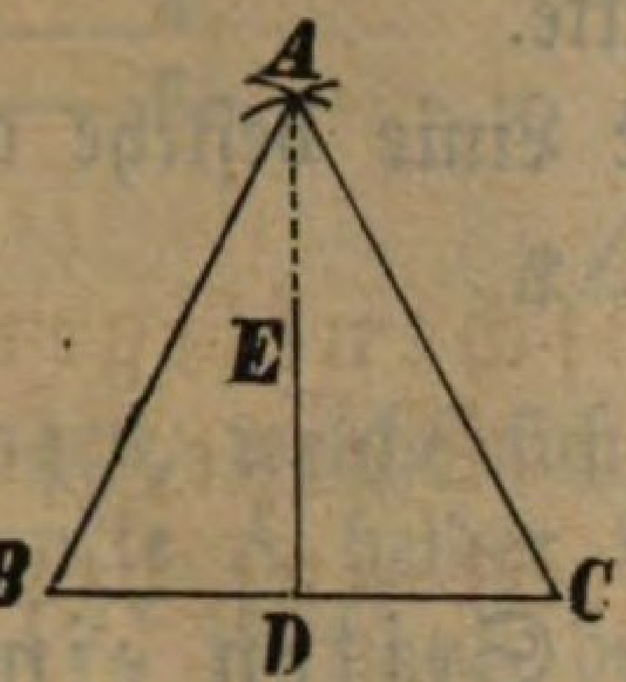
Voraussetzung: $AB = AC$, $AD \perp BC$.

Behauptung: $BD = CD$; $\sphericalangle n = \sphericalangle o$.

Beweis: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (§. 44). Mithin als gleichliegende Stücke: $BD = CD$ und $\sphericalangle n = \sphericalangle o$.

§. 49.

Lehrsatz: Wird auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks in deren Mitte ein Loth errichtet, so geht dieses, genügend verlängert, durch die Spitze des Dreiecks hindurch.



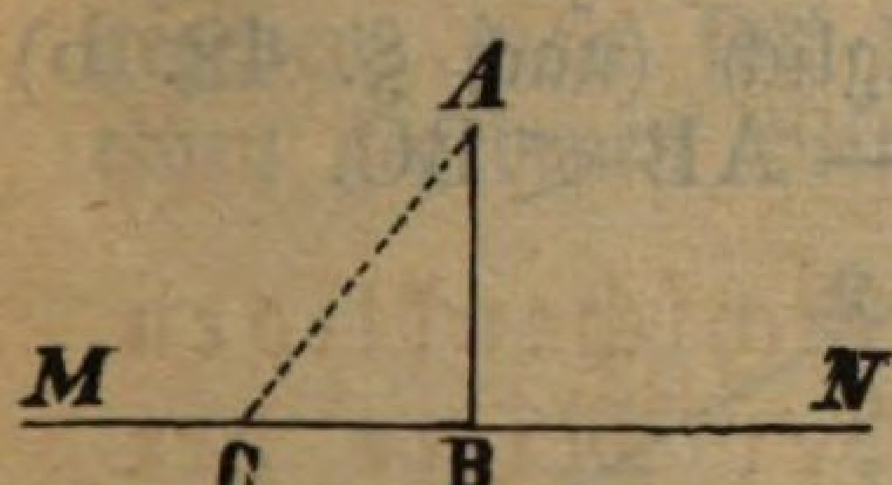
Voraussetzung: AB = AC; BD = CD; DE $\perp$ BC.

Behauptung: DE geht bei genügender Verlängerung durch Punkt A hindurch.

Beweis: Verbindet man A mit D, so ist AD $\perp$ BC (§. 47). Nun kann auf BC im Punkt D nur eine Linie lothrecht stehen, also muß DE mit der Richtung AD zusammenfallen und folglich durch A hindurchgehen.

§. 50.

a. **Lehrsatz:** Unter allen Linien, welche man von einem Punkte nach einer gegebenen Linie ziehen kann, ist das Loth die kürzeste.



Voraussetzung: AB $\perp$ MN; AC eine beliebige andere von A nach MN gezogene Linie.

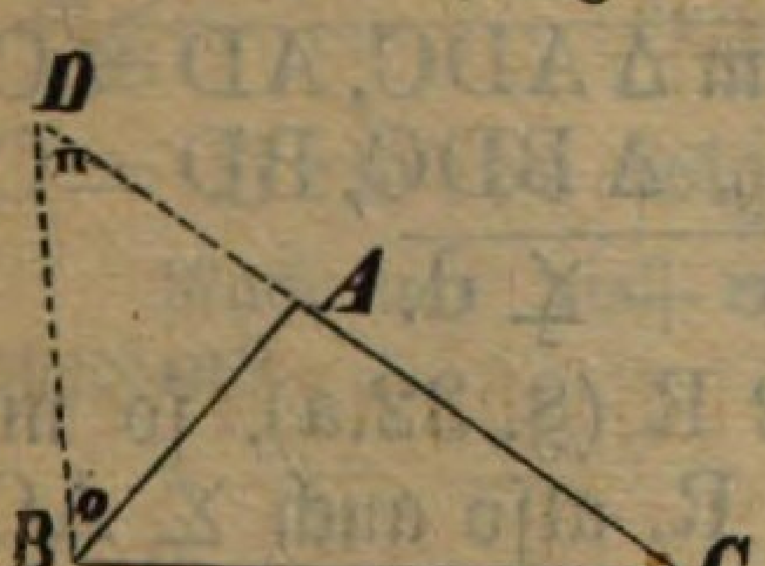
Behauptung: AB < AC.

Beweis: Δ ABC ist bei B rechtwinkelig, folglich (nach §. 42. b.) AB < AC.

b. Die kürzeste Linie (also das Loth), welche von einem Punkte nach einer Linie gezogen werden kann, heißt die Entfernung des Punktes von der Linie.

§. 51.

a. **Lehrsatz:** Die Summe je zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte.

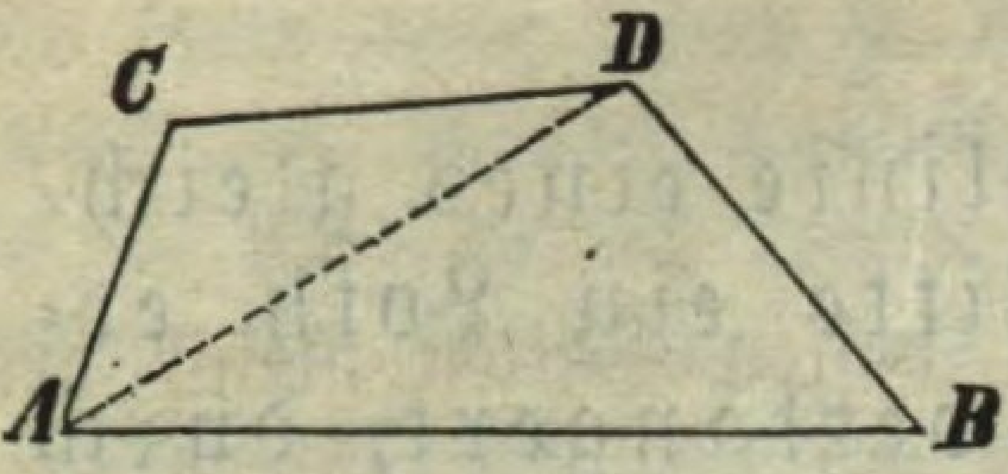


Voraussetzung: ABC ist ein beliebiges Dreieck.

Behauptung: AC + AB > BC.

Beweis: Um die Summe AC + AB als gerade Linie zu erhalten, verlängert man eine dieser Seiten um die andere, z. B. CA über A hinaus und macht AD = AB. Wird dann noch D mit B verbunden, so ist: $\angle$ n = $\angle$ o (§. 39. a), mithin $\angle$ CBD > $\angle$ n und folglich CD > BC (§. 42. a), oder AC + AB > BC.

b. **Folgesatz:** 1) Jede gebrochene Linie, welche man zwischen zwei Punkten ziehen kann, ist größer als die gerade Verbindungslinie dieser beiden Punkte.



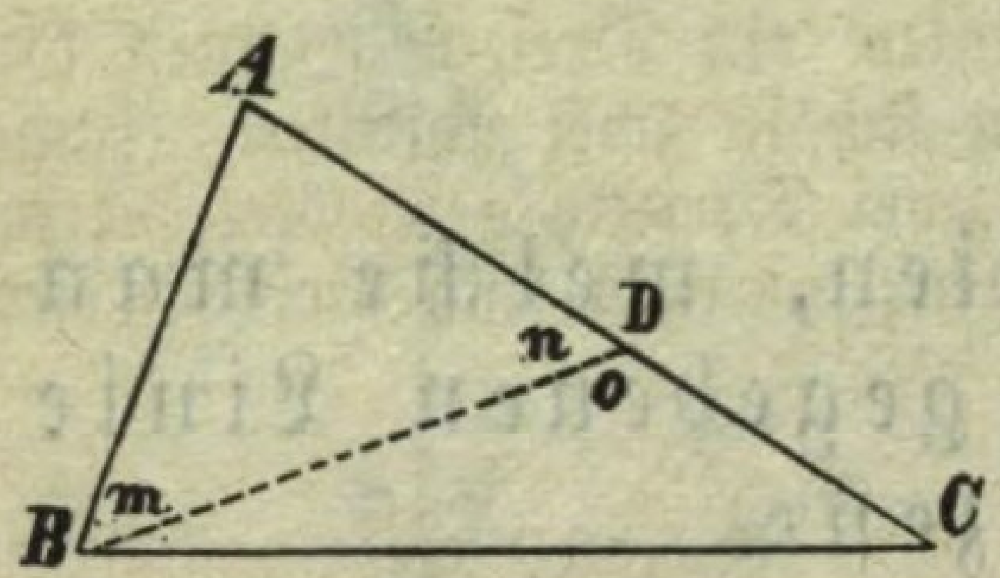
Z. B. $AC + CD + BD > AB$, denn $AD + BD > AB$, $AC + CD > AD$, also um so mehr:
$AC + CD + BD > AB$.

2) Jede zwischen zwei Punkten gezogene krumme Linie ist größer als die gerade Verbindungslinie dieser beiden Punkte.

Denn man kann sich vorstellen, die krumme Linie bestehe aus unendlich vielen kleinen geraden Linien.

§. 52.

Lehrsatz: Der Unterschied je zweier Seiten eines Dreiecks ist kleiner als die dritte Seite.



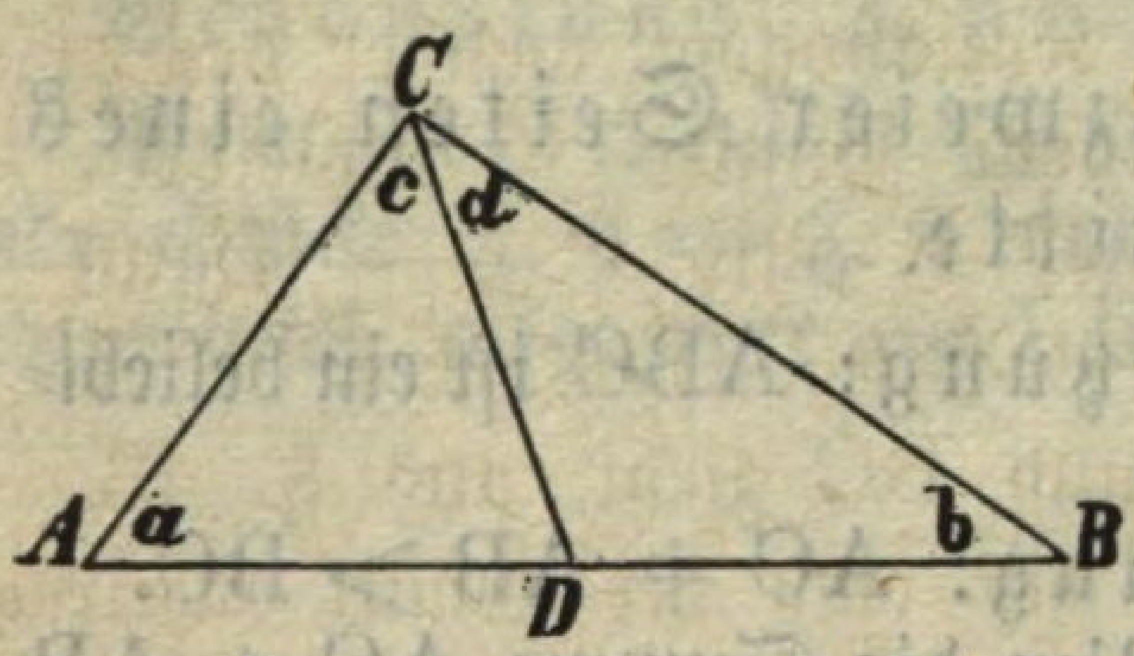
Voraussetzung: ABC ist ein beliebiges Dreieck.

Behauptung: $AC - AB < BC$.

Beweis: Schneidet man, um den Unterschied $AC - AB$ zu erhalten, $AD = AB$ ab, und verbindet B mit D, so sind (nach §. 39. b) $\measuredangle$ m und $\measuredangle$ n spitze Winkel, mithin ist $\measuredangle$ o stumpf und folglich (nach §. 42. b) $BC > CD$, oder, da $CD = AC - AB$, $AC - AB < BC$.

§. 53.

a. **Lehrsatz**: Wenn in einem Dreiecke die Verbindungslinie einer Ecke mit der Mitte der Gegenseite gleich der halben Gegenseite ist, so liegt dieser Seite ein rechter Winkel gegenüber.



Voraussetzung: $CD = AD = BD$.

Behauptung: $\measuredangle\, ACB = 1\, R$.

Beweis:

$\measuredangle\, a = \measuredangle\, c$, weil im $\Delta\, ADC$, $AD = CD$

$\measuredangle\, b = \measuredangle\, d$ „ „ $\Delta\, BDC$, $BD = CD$

$\measuredangle\, a + \measuredangle\, b = \measuredangle\, c + \measuredangle\, d$.

Da nun $\measuredangle\, a + \measuredangle\, b + \measuredangle\, c + \measuredangle\, d = 2\, R$ (§. 32.a), so muß sowohl $\measuredangle\, a + \measuredangle\, b$ als auch $\measuredangle\, c + \measuredangle\, d = 1\, R$, also auch $\measuredangle\, ACB = 1\, R$ sein.

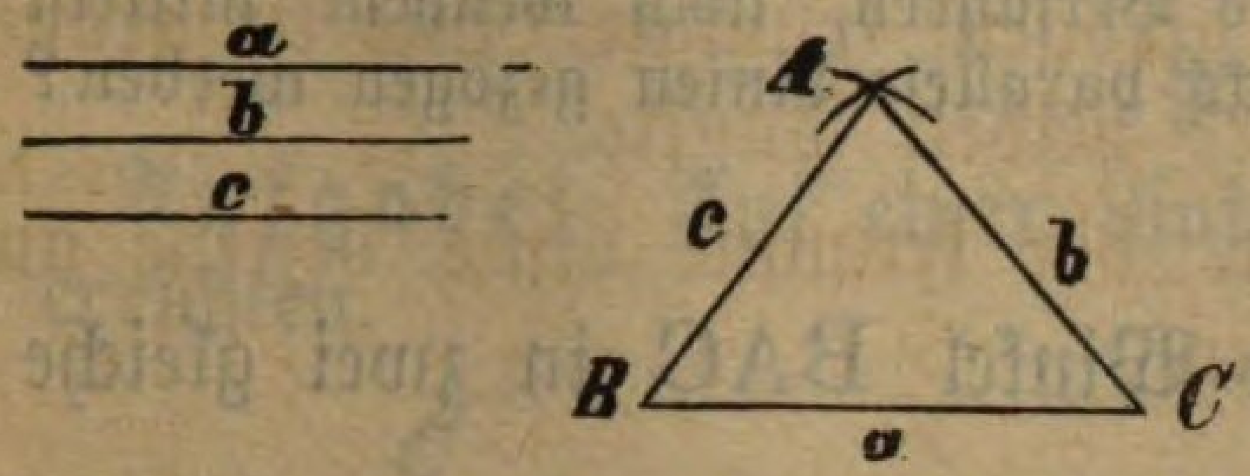
b. **Folgesatz**: Verbindet man einen beliebigen Punkt in der Peripherie eines Kreises mit den Endpunkten eines Durchmessers, so schließen diese Verbindungslinien einen rechten Winkel ein.

Anmerkung. Dieser Satz soll schon von Thales, dem ältesten uns bekannten Mathematiker der Griechen, ums Jahr 650 v. Chr. Geb. gefunden worden sein.

Aufgaben.

§. 54.

Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten gleich drei gegebenen Linien a, b, c sind.



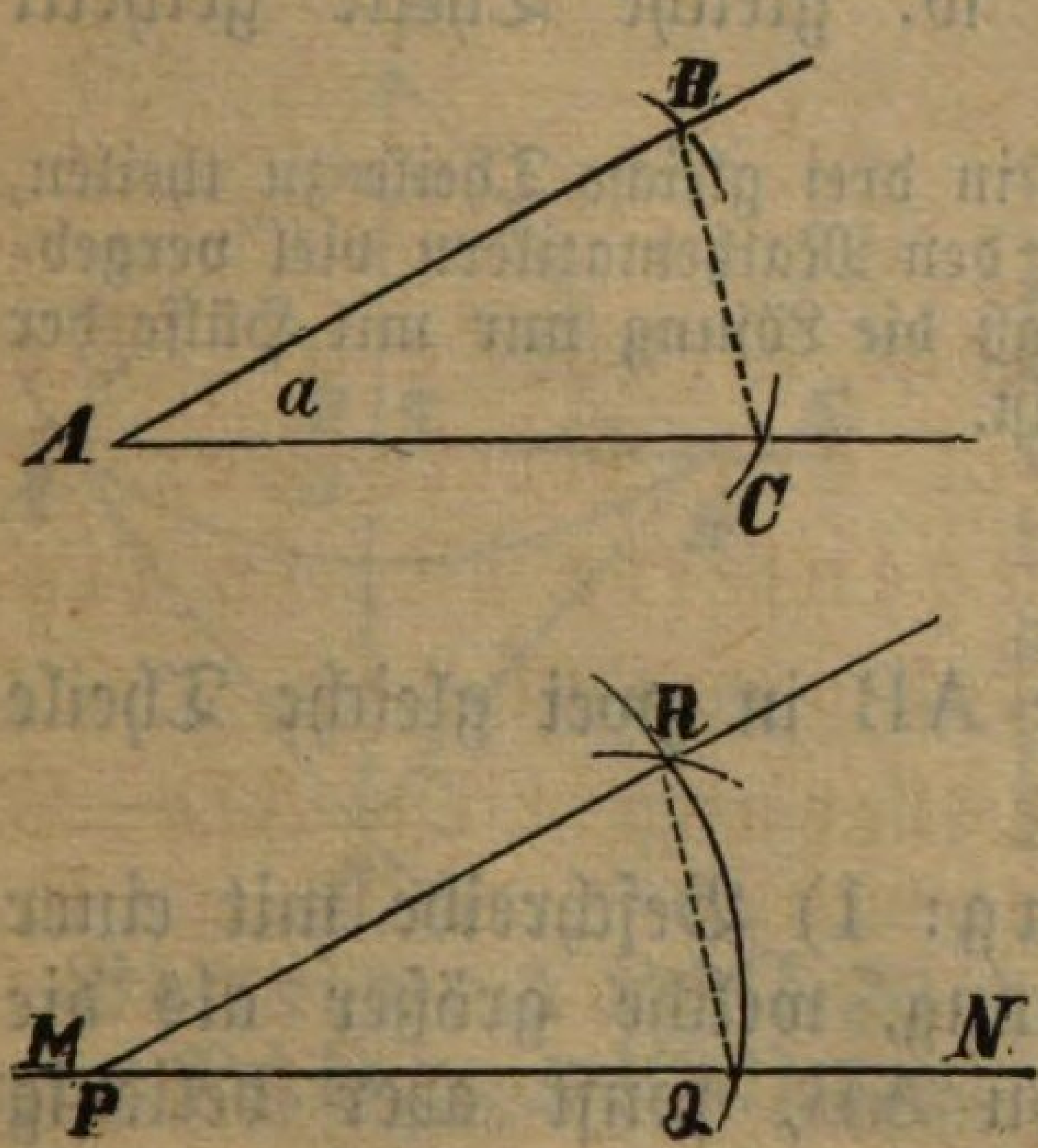
Lösung: 1) Zeichne eine beliebige Linie und schneide auf derselben BC = a ab. 2) Beschreibe von C aus mit b und 3) von B aus mit c einen Kreis (in der Praxis nur Kreisbogen, welche sich schneiden). 4) Verbinde einen der Durchschnittspunkte A beider Kreise mit B und C. — Das entstandene Dreieck ABC ist dann das verlangte.

Beweis: Nach der Construction ist: BC = a, AC = b, AB = c, folglich enthält Δ ABC die verlangten Stücke.

Wird man aus drei ganz beliebig langen Linien ein Dreieck zeichnen können? (§. 51. a.) — Die gezeichneten Kreise werden sich in zwei Punkten, einmal über, das anderemal unter BC schneiden, so daß zwei Dreiecke gezeichnet werden können, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen; warum sind diese Dreiecke congruent?

§. 55.

Aufgabe: Es ist eine Linie MN und in derselben Punkt P gegeben, man soll von P aus eine Linie ziehen, welche mit MN einen gegebenen Winkel a bildet (das Winkelantragen).

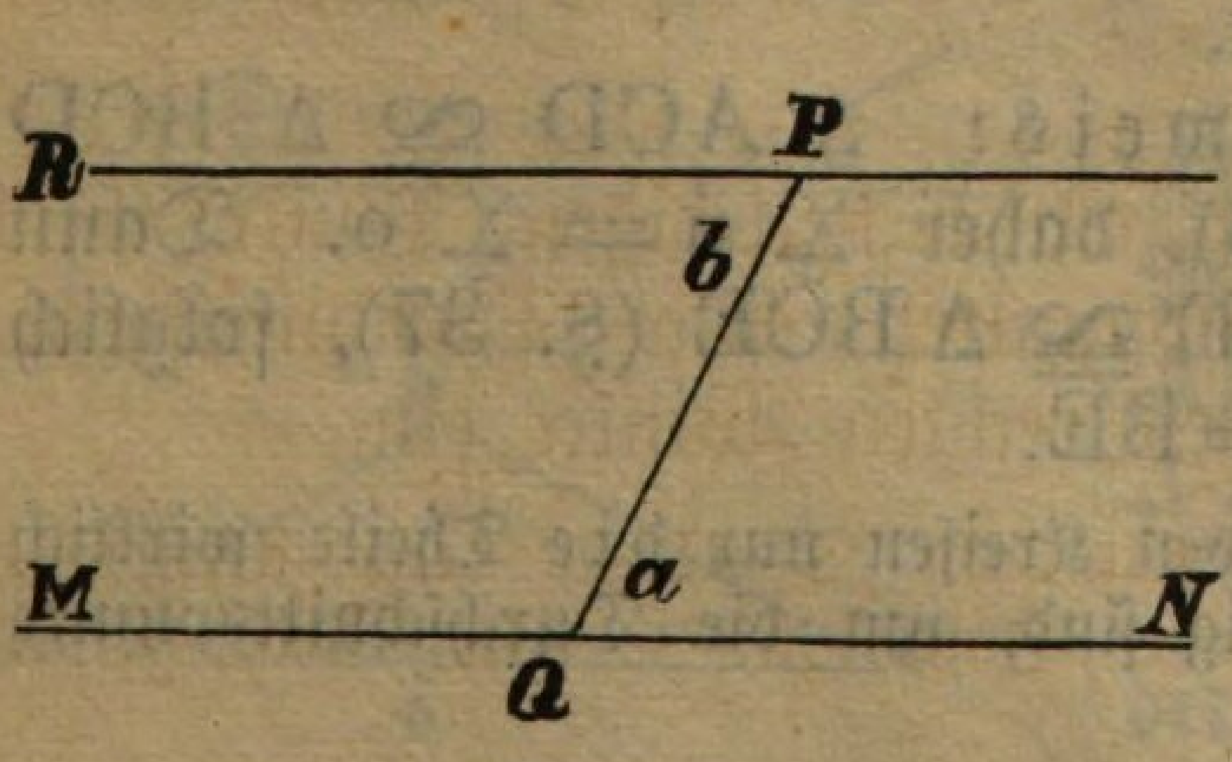


Lösung: 1) Schneide auf beiden Schenkeln des gegebenen Winkels vom Scheitelpunkt A aus gleiche Längen AB und AC ab und beschreibe mit derselben Zirkelöffnung von P aus einen Kreisbogen, welcher MN in Q trifft. — 2) Nimm BC in den Zirkel und beschreibe mit dieser Zirkelspannung von Q aus einen Kreisbogen, welcher den ersteren in einem Punkte R schneidet. — 3) Verbinde R mit P. — Dann ist $\measuredangle$ RPQ = $\measuredangle$ a.

Beweis folgt, wenn man RQ und BC zieht, aus §. 43.

Nach wie viel verschiedenen Richtungen hin kann der Winkel angetragen werden?

§. 56.



Aufgabe: Durch einen Punkt P zu einer gegebenen Linie MN eine Parallele zu ziehen.

Lösung: 1) Ziehe von P eine beliebige Linie PQ nach MN. — 2) Trage den entstandenen Winkel a an QP im Punkt P so an, daß der

neue Winkel b innerer Wechselwinkel des ersteren wird. — Dann ist PR die verlangte Parallele.

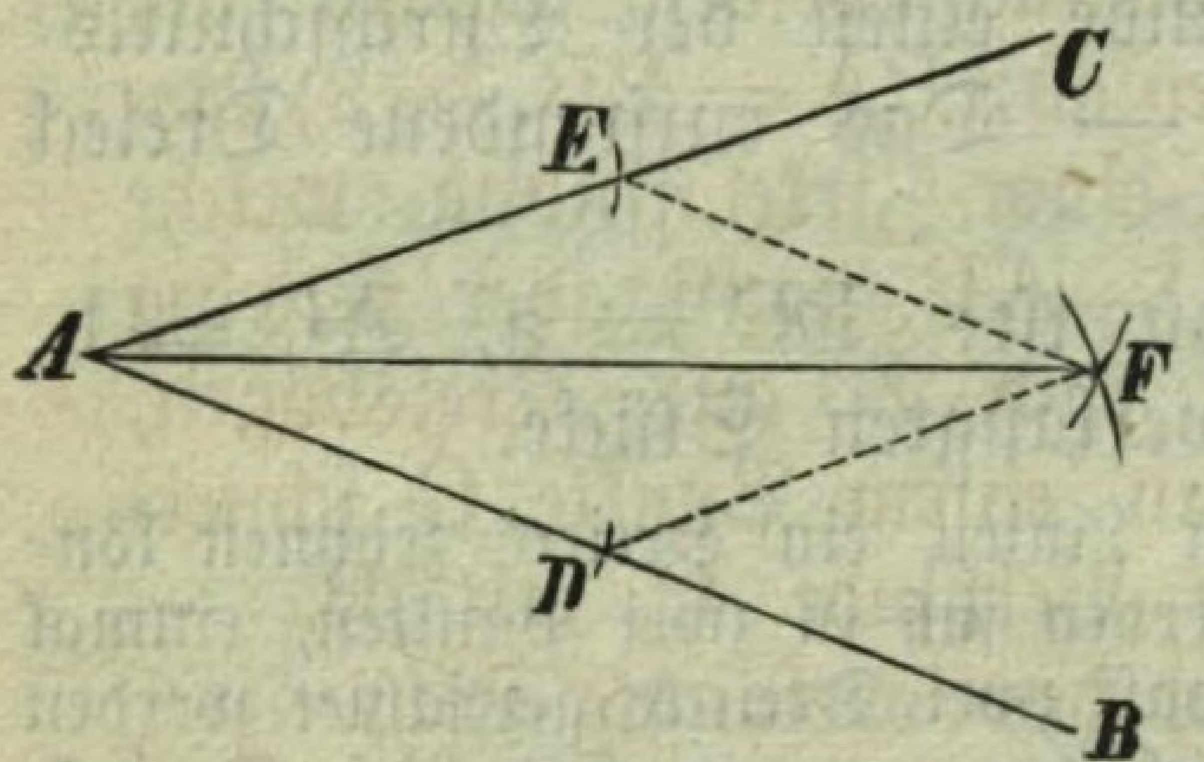
Beweis folgt aus §. 27. 2.

Anmerkung. 1) Wie würde man construiren müssen, wenn die Lösung sich auf §. 27 1 stützen sollte?

2) Auf welchen Lehrsatz gründet sich das Verfahren, nach welchem mittelst eines Lineals und eines rechtwinkeligen Dreiecks parallele Linien gezogen werden?

§. 57.

a. Aufgabe: Einen gegebenen Winkel BAC in zwei gleiche Theile zu theilen (zu halbiren).



Lösung: 1) Schneide vom Scheitelpunkt A aus auf beiden Schenkeln gleiche Längen ab, AD = AE. — 2) Beschreibe von D aus mit einer beliebigen und dann von E aus mit derselben Zirkelöffnung einen Kreisbogen, so daß letzterer den ersteren in einem Punkte F schneidet. — 3) Verbinde F mit A, dann wird der gegebene Winkel durch AF in zwei gleiche Theile getheilt.

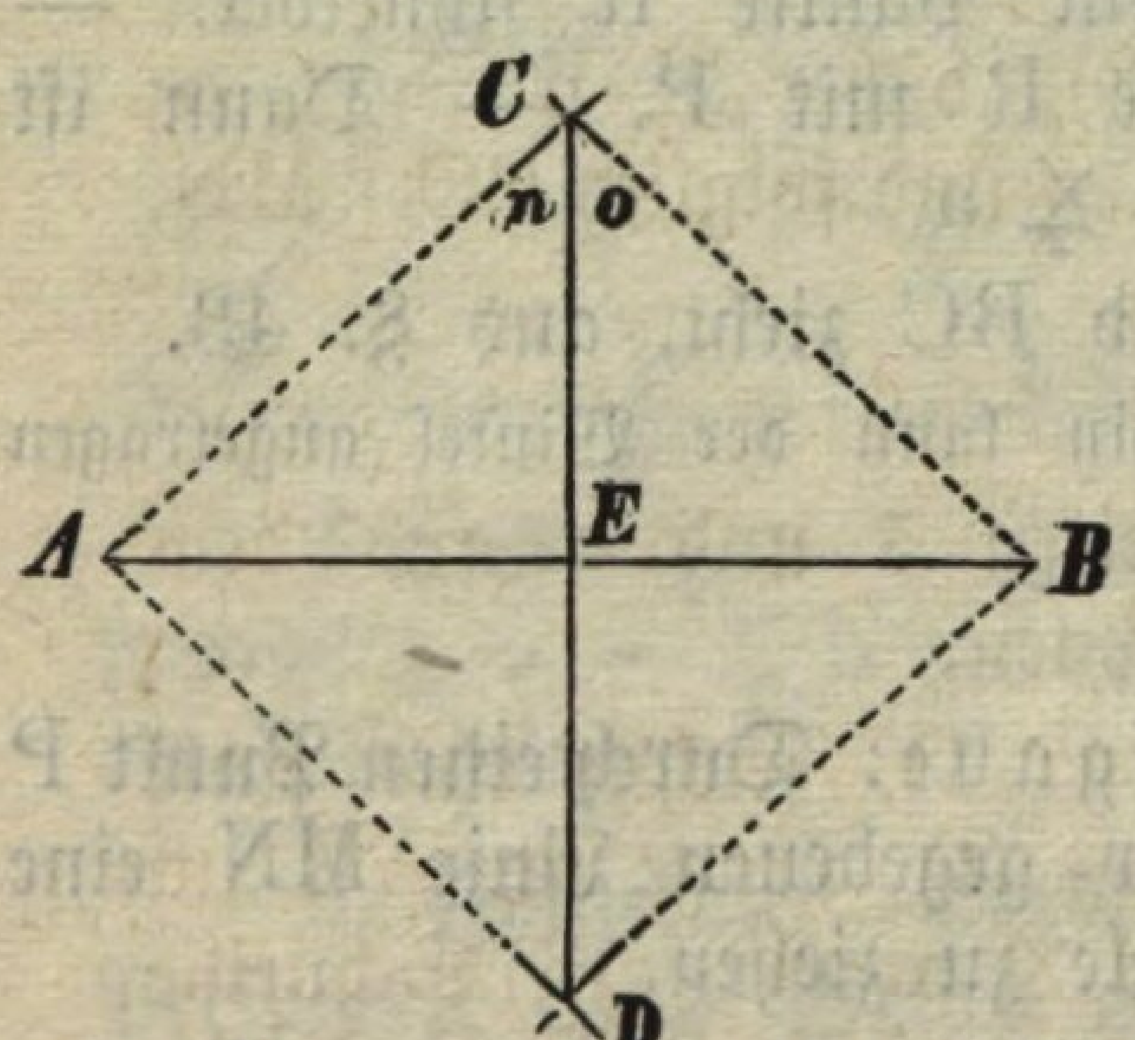
Beweis folgt aus §. 43, wenn F mit D und E verbunden wird.

b. Durch fortgesetztes Halbiren eines jeden Theiles kann der ganze Winkel auch in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile getheilt werden.

Anmerkung. Die Aufgabe: einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, gehört zu den Problemen, welche von Alters her den Mathematikern viel vergebliche Mühe gemacht haben. Jetzt ist erwiesen, daß die Lösung nur mit Hülfe der geraden Linie und des Kreises nicht ausführbar ist.

§. 58.

a. Aufgabe: Eine gegebene Linie AB in zwei gleiche Theile zu theilen.



Lösung: 1) Beschreibe mit einer Zirkelöffnung, welche größer als die Hälfte von AB, sonst aber beliebig ist, von A und dann auch von B aus einen Kreis. — 2) Verbinde die Durchschnittspunkte C und D mit einander, so wird dadurch AB in E halbirt.

Beweis: Δ ACD $\cong$ Δ BCD (§. 43), daher $\measuredangle$ n = $\measuredangle$ o. Dann Δ ACE $\cong$ Δ BCE (§. 37), folglich AE = BE.

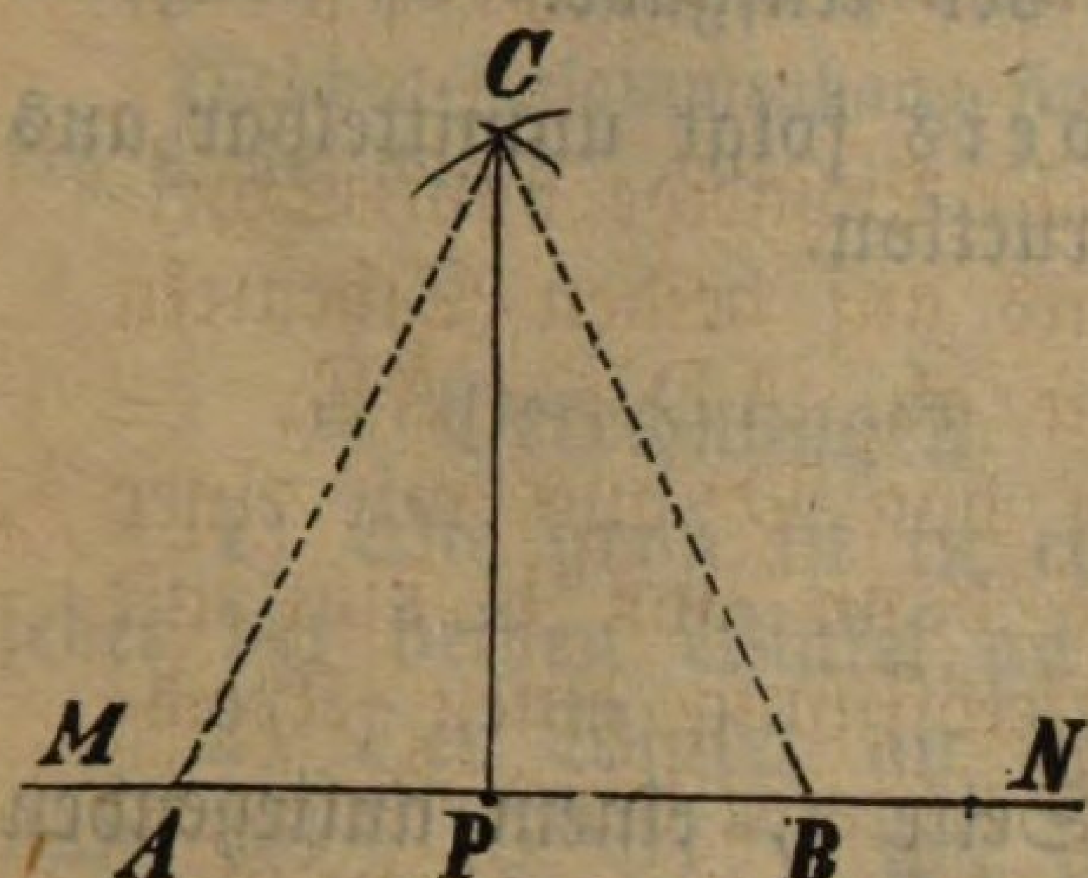
1) In der Praxis werden von den beiden Kreisen nur die Theile wirklich gezeichnet, welche dem Augenmaße nach nöthig sind, um die Durchschnittspunkte C und D zu erhalten.

2) Warum müssen die Kreise mit einem Halbmesser geschlagen werden, welcher größer ist als $\frac{1}{2}$ AB? — Müssen die oberen und unteren Kreisbögen mit derselben Zirkelöffnung beschrieben werden?

b. Durch fortgesetztes Halbiren jedes Theiles kann die ganze Linie auch in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile getheilt werden.

§. 59.

Aufgabe: Auf einer Linie MN in einem Punkte P ein Loth zu errichten.

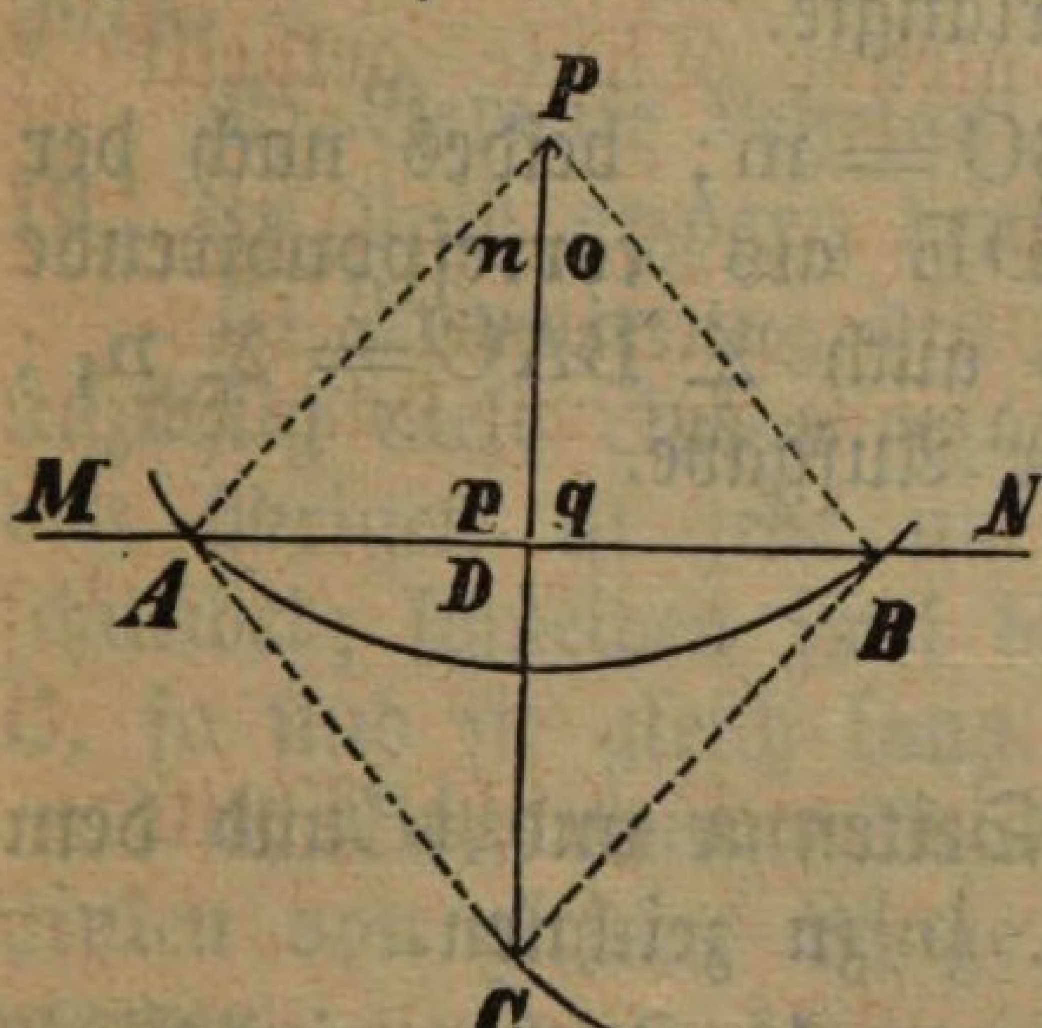


Lösung: 1) Schneide auf MN von P aus nach beiden Seiten hin gleiche Längen ab: PA = PB. — 2) Beschreibe mit einer Zirkelöffnung, welche größer als $\frac{1}{2}$ AB, sonst aber beliebig ist, von A und B aus Kreisbögen, welche sich in einem Punkte C schneiden. — 3) Verbinde C mit P. — CP ist dann das verlangte Loth.

Beweis folgt aus §. 43.

§. 60.

Aufgabe: Auf eine Linie MN von einem außerhalb derselben liegenden Punkte P aus ein Loth zu fällen.

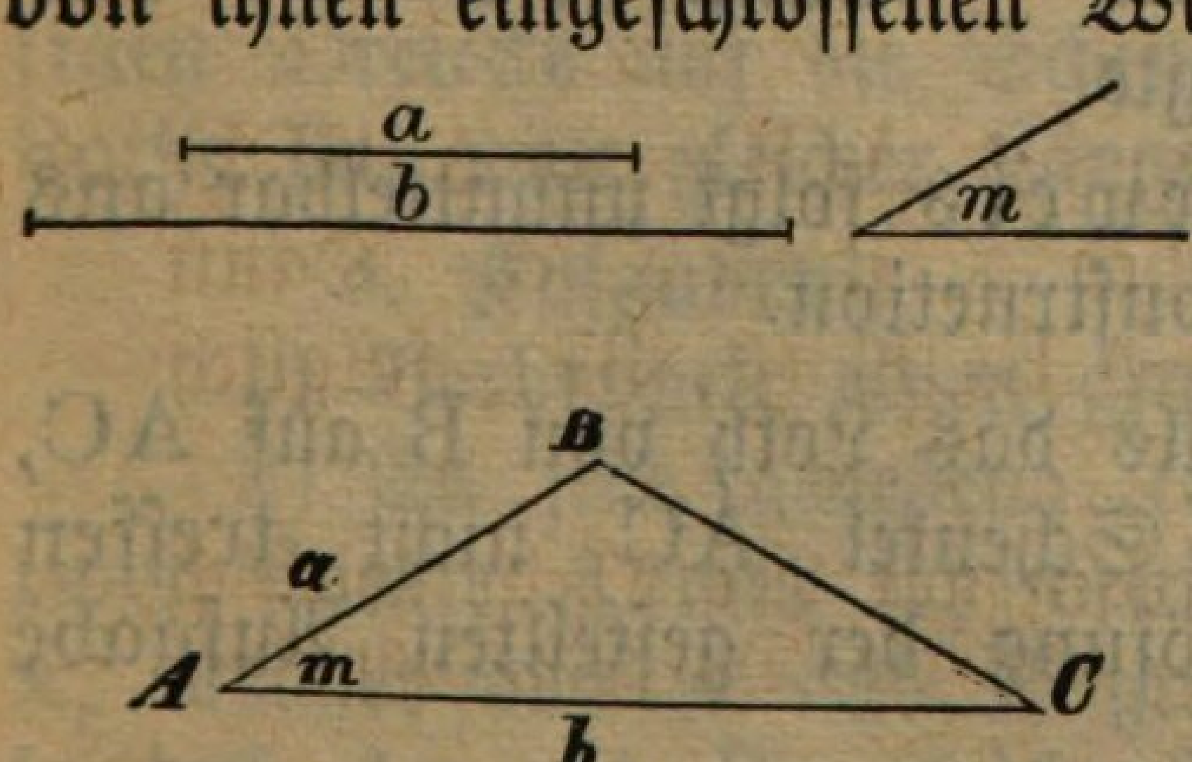


Lösung: 1) Beschreibe von P aus einen Kreisbogen, welcher MN in zwei Punkten A und B schneidet. — 2) Beschreibe mit einer Zirkelöffnung, welche größer als $\frac{1}{2}$ AB, sonst aber beliebig ist, von A und B aus Kreisbögen, die sich in einem Punkte C schneiden. — 3) Verbinde P mit C. PC ist dann das verlangte Loth.

Beweis: Δ PAC $\cong$ Δ PBC (§. 43), daher $\measuredangle$ n = $\measuredangle$ o; ferner Δ PAD $\cong$ Δ PBD, deshalb $\measuredangle$ p = $\measuredangle$ q und folglich PC $\perp$ MN.

§. 61.

Aufgabe: Ein Dreieck aus zwei Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel m zu zeichnen.

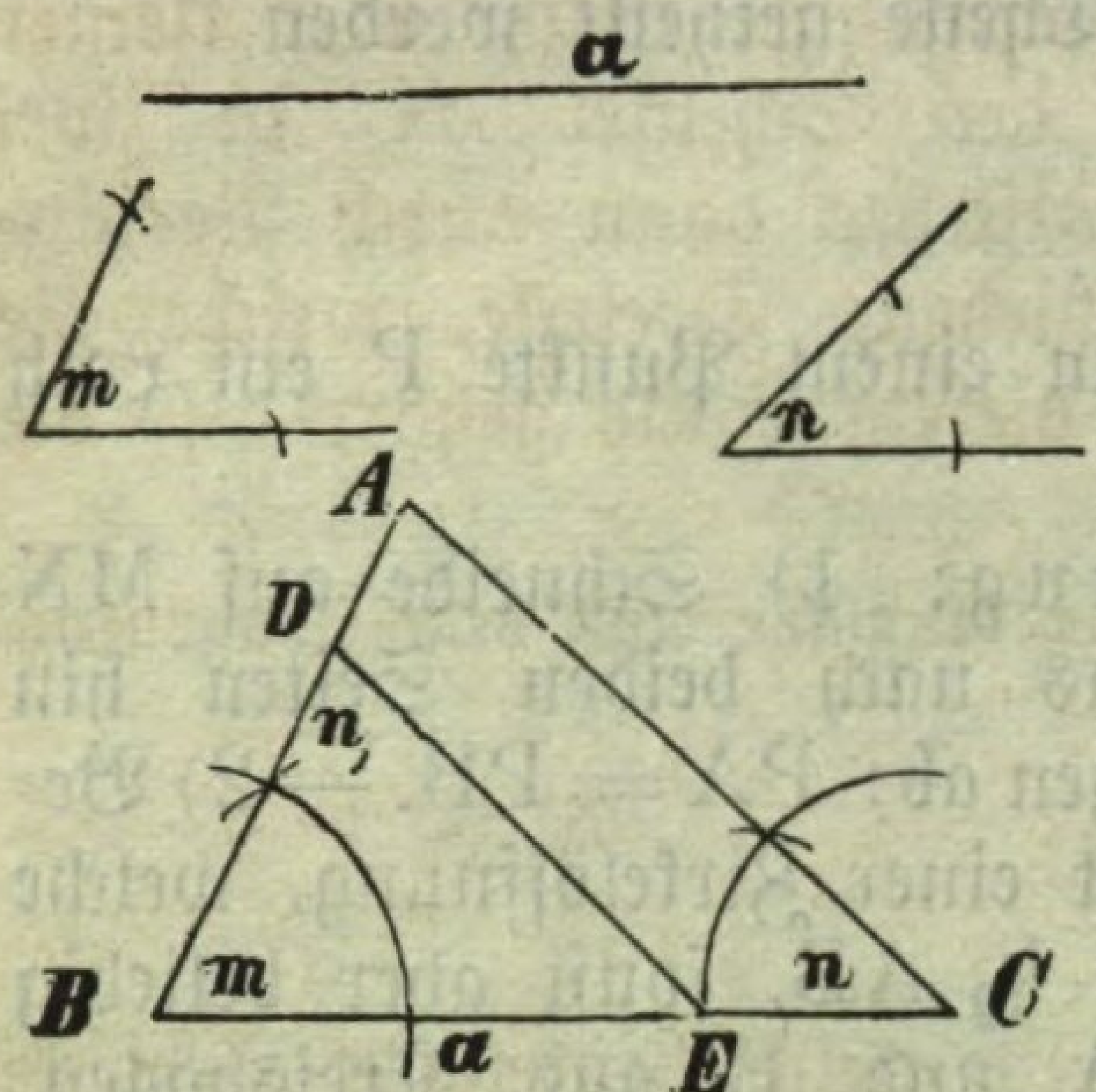


Lösung: 1) Zeichne eine Linie AC = b. — 2) Trage an AC im Punkte A den $\measuredangle$ m an. — 3) Schneide AB = a ab. — 4) Verbinde B mit C. Δ ABC ist dann das verlangte.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

§. 62.

Aufgabe: Ein Dreieck aus einer Seite a und den beiden anliegenden Winkeln m und n zu zeichnen.



Lösung: 1) Zeichne eine Linie BC = a. — 2) Trage an BC im Punkt B den ∡ m und 3) an Punkt C den ∡ n an. Das entstandene Dreieck ABC entspricht dann den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

§. 63.

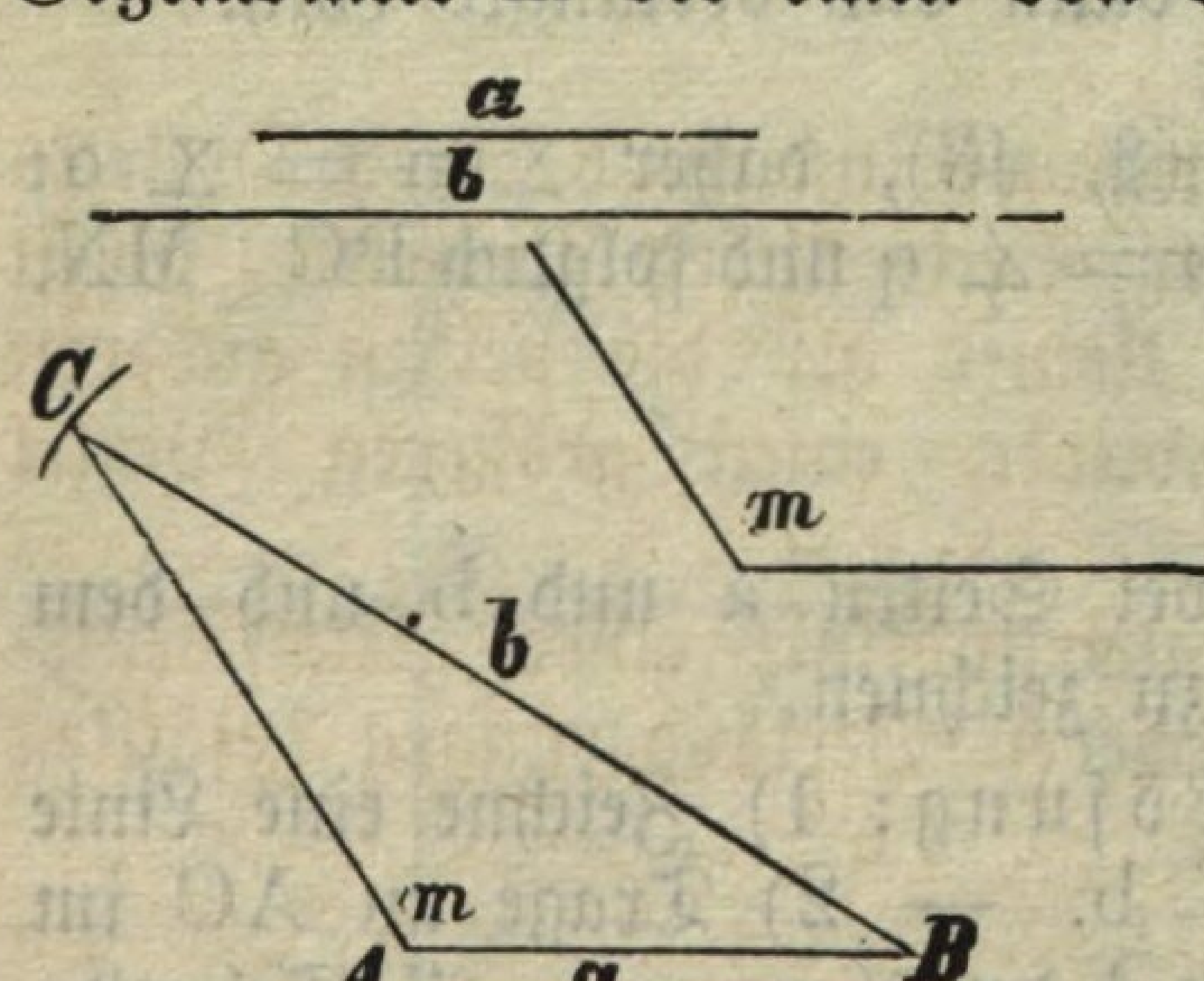
Aufgabe: Ein Dreieck aus einer Seite a, einem anliegenden Winkel m und dem gegenüberliegenden Winkel n_1 zu zeichnen.

Lösung (Fig. §. 62): 1) Zeichne eine Linie BC = a. — 2) Trage an BC im Punkte B den ∡ m an. — 3) Trage an den unbestimmt langen Schenkel in einem beliebigen Punkte D, den ∡ n_1 an = ∡ BDE. — 4) Ziehe durch C eine Parallele CA zu DE. — Dann ist Δ ABC das verlangte.

Beweis: Es ist BC = a, ∡ ABC = m; beides nach der Construction. Ferner ∡ BAC = ∡ BDE als correspondirende Winkel bei ⫲ und da ∡ BDE = n_1, so auch ∡ BAC = ∡ n_1; folglich erfüllt Δ ABC die Bedingungen der Aufgabe.

§. 64.

a. **Aufgabe:** Ein Dreieck aus zwei Seiten a und b und dem Gegenwinkel m der einen von beiden z. B. b zu zeichnen.



Lösung: 1) Zeichne eine Linie AB = a. — 2) Trage an AB im Punkte A den ∡ m an. — 3) Beschreibe mit b als Radius von B aus einen Kreis. — 4) Verbinde den entstandenen Durchschnittspunkt C mit B. — Dann ist Δ ABC das verlangte.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

b. **Bemerkung:** Ist b kleiner als das Loth von B auf AC, so wird der beschriebene Kreis den Schenkel AC nicht treffen (§. 50 a.). In diesem Falle ist die Lösung der gestellten Aufgabe also unmöglich.

Ist b gleich diesem Lothe, oder größer als dieses Loth und auch größer als a, so trifft der Kreis mit AC nur in einem Punkte zusammen, so daß ein bestimmtes Δ ABC entsteht.

Ist endlich b zwar größer als das erwähnte Loth, aber kleiner als a, so schneidet der genannte Kreis den Schenkel AC in zwei verschiedenen Punkten C und C^1. Es entstehen dann durch Verbindung von B mit C und C^1 zwei verschiedene Dreiecke, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. In diesem Falle gehört also die Aufgabe zu den unbestimmten Aufgaben.

Welcher Zusammenhang findet zwischen dieser Aufgabe und dem Congruenzsatz §. 44 statt?

Uebungen.

a. Berechnungen.

1) Wie groß ist in einem rechtwinkelig gleichschenkeligen Dreiecke jeder der beiden Winkel an der Hypotenuse?

2) Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks mißt $38^0\ 15'\ 57''$; wie groß ist jeder der beiden andern Winkel?

3) Ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks ist $= 75^0\ 18'\ 17''$; wie groß ist der Winkel an der Spitze?

b. Lehrsätze.

1) Suche für Lehrsatz §. 40 einen anderen Beweis, indem du AB über B hinaus um so viel verlängerst, daß diese Linie = AC wird.

2) Beweise Lehrsatz §. 41 direct, nachdem du dir von A auf BC ein Loth gezogen denkst.

3) Erweiterung des Lehrsatzes §. 50. Von A nach MN können unzählig viele Linien gezogen werden; das Loth ist die kürzeste, von den übrigen ist jede um so größer, je entfernter von B sie MN schneidet; schneiden zwei dieser Linien MN in gleicher Entfernung von B, so sind sie gleich lang.

4) Von einem Punkte außerhalb einer Linie können nie drei Linien von gleicher Länge nach der erstgenannten Linie hin gezogen werden.

5) Verbindet man einen Punkt, welcher innerhalb eines Dreiecks liegt, mit den beiden Endpunkten einer Seite dieses Dreiecks, so ist die Summe dieser Verbindungslinien kleiner als die beiden anderen Dreiecksseiten zusammen, aber sie bilden einen größeren Winkel als diese.

6) Die aus den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Schenkel oder deren Verlängerungen gefällten Lothe sind von gleicher Länge.

c. Aufgaben.

1) Verdoppele einen gegebenen Winkel!

2) Es sind gegeben: eine Linie MN und außerhalb derselben zwei Punkte A und B; bestimme in der Linie MN a) einen Punkt x, welcher von A und B gleich weit entfernt ist, b) einen Punkt y, so daß Ay und By gleiche Winkel mit MN bilden (Billardaufgabe).

3) Zeichne einen Winkel von a. 60°, b. 30°, c. 45°, d. 120°!
4) Theile einen rechten Winkel in drei gleiche Theile! (§. 39. b. 2.)
5) Errichte auf dem Endpunkte einer Linie, ohne dieselbe zu verlängern, ein Loth (§. 53).

Viertes Kapitel.

Von den Vierecken.

§. 65.

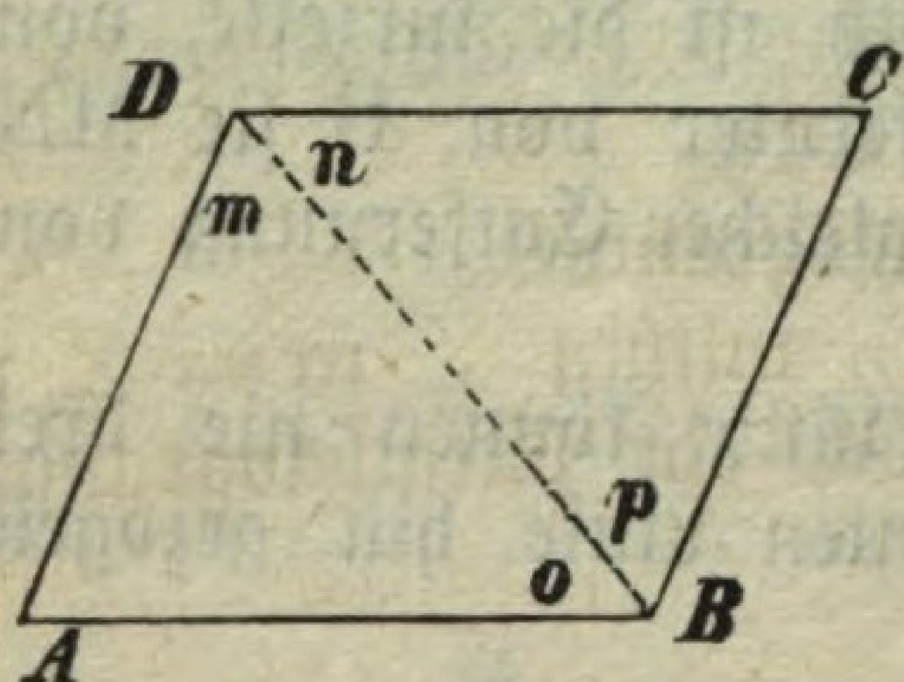
Im Vierecke trifft jede Seite mit zwei anderen in einer Ecke zusammen und liegt der vierten gegenüber. Nach der verschiedenen Lage der sich gegenüberliegenden Seiten (Gegenseiten) werden die Vierecke eingetheilt in Parallelogramme, Trapeze und Trapezoide.

Ein Viereck heißt: Parallelogramm, wenn je zwei seiner Gegenseiten parallel gehen, Paralleltrapez oder kurzweg Trapez, wenn nur zwei Gegenseiten parallel sind, Trapezoid, wenn keine Seite einer andern parallel ist.

Ein Parallelogramm wird häufig abgekürzt bezeichnet, indem man nur eine seiner Diagonalen nennt. Z. B. (Fig. 66) statt ▱ ABCD schreibt und spricht man kurz: ▱ AC oder ▱ BD.

§. 66.

a. **Lehrsatz:** In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich.



Voraussetzung: ABCD ist ein Parallelogramm.

Behauptung: $AB = CD$, $AD = BC$; $\measuredangle A = \measuredangle C$, $\measuredangle B = \measuredangle D$.

Anleitung zum Beweise. Durch welche Hülfslinie wird ▱ ABCD in zwei vermuthlich congruente Dreiecke zerlegt? (Durch eine Diagonale, z. B. BD). — Suche nun die Congruenz dieser Dreiecke nachzuweisen. 1) Welche Seite haben die Dreiecke gemeinsam? (BD). 2) Welche Winkel sind gleich, weil die Parallelen AB und CD durch BD geschnitten werden? ($\measuredangle o = \measuredangle n$). 3) Welche Winkel sind gleich, weil die Parallelen AD und BC durch BD geschnitten werden? ($\measuredangle m = \measuredangle p$). Worin stimmen also die Dreiecke überein? Was folgt hieraus? Nun suche die gleichliegenden Stücke auf. Weshalb ist endlich $\measuredangle B = \measuredangle D$? (Sie bestehen aus gleichen Stücken.)

Beweis: Zieht man eine beliebige Diagonale, z. B. BD, so ist $BD = BD$ wie sich von selbst versteht.

$\measuredangle o = \measuredangle n$ als Wechselwinkel bei $\parallel$ ($AB \parallel CD$)
$\measuredangle m = \measuredangle p$ als Wechselwinkel bei $\parallel$ ($AD \parallel BC$)

$\Delta ABD \cong \Delta BCD$ (§. 38. a). Mithin als gleichliegende Stücke: $AB = CD$, $AD = BC$, $\measuredangle A = \measuredangle C$.

Ferner: $\measuredangle o = \measuredangle n$, $\measuredangle p = \measuredangle m$, also auch: $\measuredangle o + \measuredangle p = \measuredangle n + \measuredangle m$ oder $\measuredangle B = \measuredangle D$.

b. **Folgesätze:** 1) Jede Diagonale eines Parallelogramms theilt dasselbe in zwei congruente Dreiecke.

2) Sind in einem Parallelogramm zwei anstoßende Seiten gleich, so sind alle 4 Seiten gleich lang.

3) Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind alle 4 Winkel rechte Winkel.

4) Zieht man zwischen zwei Parallelen Linien lothrecht zu einer der Parallelen, so treffen sie auch die andere Parallele unter rechten Winkeln und sind gleich lang.

Jedes dieser Lothe giebt die Entfernung der Parallelen von einander an.

§. 67.

Lehrsatz: Wenn in einem Vierecke die Gegenseiten gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (Fig. §. 66.)

Voraussetzung: $AB = CD$, $AD = BC$.

Behauptung: ABCD ist ein Parallelogramm.

Beweis: $\Delta ABD \cong \Delta BCD$ (§. 43), mithin: $\measuredangle o = \measuredangle n$, also $AB \# CD$ (§. 27. 2) und $\measuredangle m = \measuredangle p$, also $AD \# BC$; folglich ABCD ein Parallelogramm.

§. 68.

Lehrsatz: Wenn in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (Fig. §. 66.)

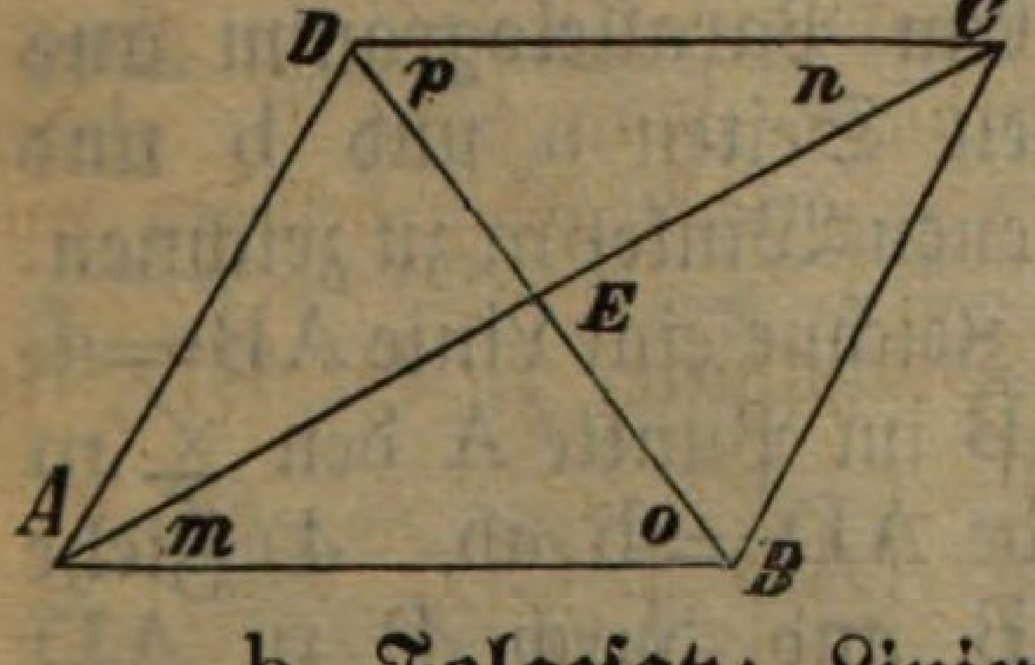
Voraussetzung: $AB = CD$, $AB \# CD$.

Behauptung: ABCD ist ein Parallelogramm.

Beweis: $\Delta ABD \cong \Delta BCD$ (§. 37), mithin $\measuredangle m = \measuredangle p$, also $AD \# BC$ (§. 27. 2) und folglich ABCD ein Parallelogramm.

§. 69.

a. **Lehrsatz:** Jede Diagonale eines Parallelogramms theilt die andere in zwei gleiche Theile.



Voraussetzung: ABCD ist ein Parallelogramm.

Behauptung: $AE = CE$, $BE = DE$.

Beweis: $\Delta ABE \cong \Delta CDE$ (§. 66. a, §. 26. 2 und §. 38. a), mithin $AE = CE$ und $BE = DE$.

b. **Folgesatz:** Linien sind parallel, wenn zwei Lothe gleich sind, welche man auf einer dieser Linien an verschiedenen Stellen errichtet und bis zur anderen Linie hin fortführt.

Mit Hülfe dieses Satzes prüft man auf dem Felde die parallele Lage von Linien, und zieht Parallelen.

§. 70.

Lehrsatz: Wenn in einem Viereck jede Diagonale die andere in zwei gleiche Theile theilt, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (Fig. §. 69.)

Voraussetzung: AE = CE, BE = DE.

Behauptung: ABCD ist ein Parallelogramm.

Beweis: Δ ABE ≌ Δ CDE (§. 37), mithin AB = CD und ∡ m = ∡ n. Diese Winkel sind innere Wechselwinkel, also AB ⋕ CD (§. 27. 2), folglich ABCD nach §. 68 ein Parallelogramm.

§. 71.

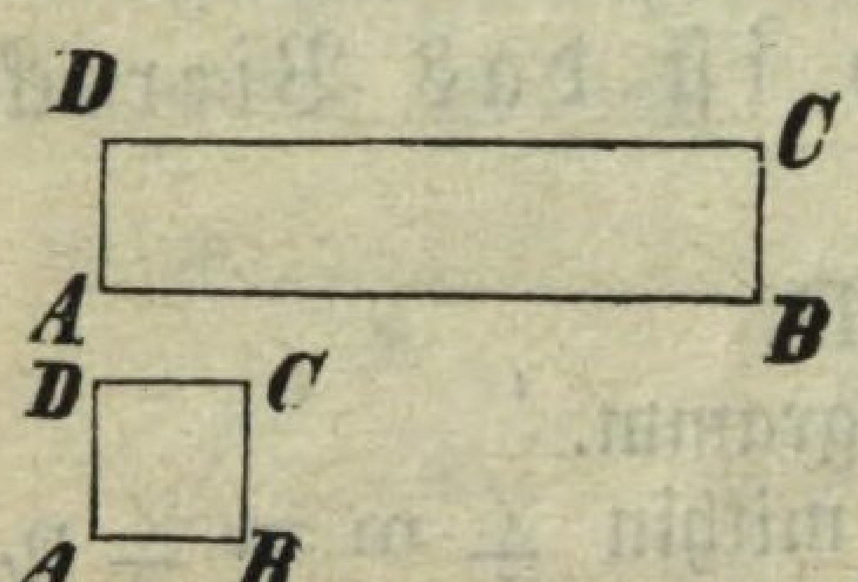
a. Die Parallelogramme werden eingetheilt:

1) nach ihren Winkeln in rechtwinkelige und schiefwinkelige, je nachdem alle 4 Winkel rechte oder schiefe Winkel sind. (§. 66 b. 3.)

2) nach ihren Seiten in gleichseitige und ungleichseitige, je nachdem alle 4 Seiten gleich lang, oder die anstoßenden Seiten von ungleicher Länge sind. (§. 66 b. 2.)

Das rechtwinkelig gleichseitige Parallelogramm heißt: Quadrat; das rechtwinkelig ungleichseitige Parallelogramm wird Rechteck oder Oblong genannt; das gleichseitig schiefwinkelige Parallelogramm führt den Namen Rhombus oder Raute; das ungleichseitig schiefwinkelige Parallelogramm heißt Rhomboid.

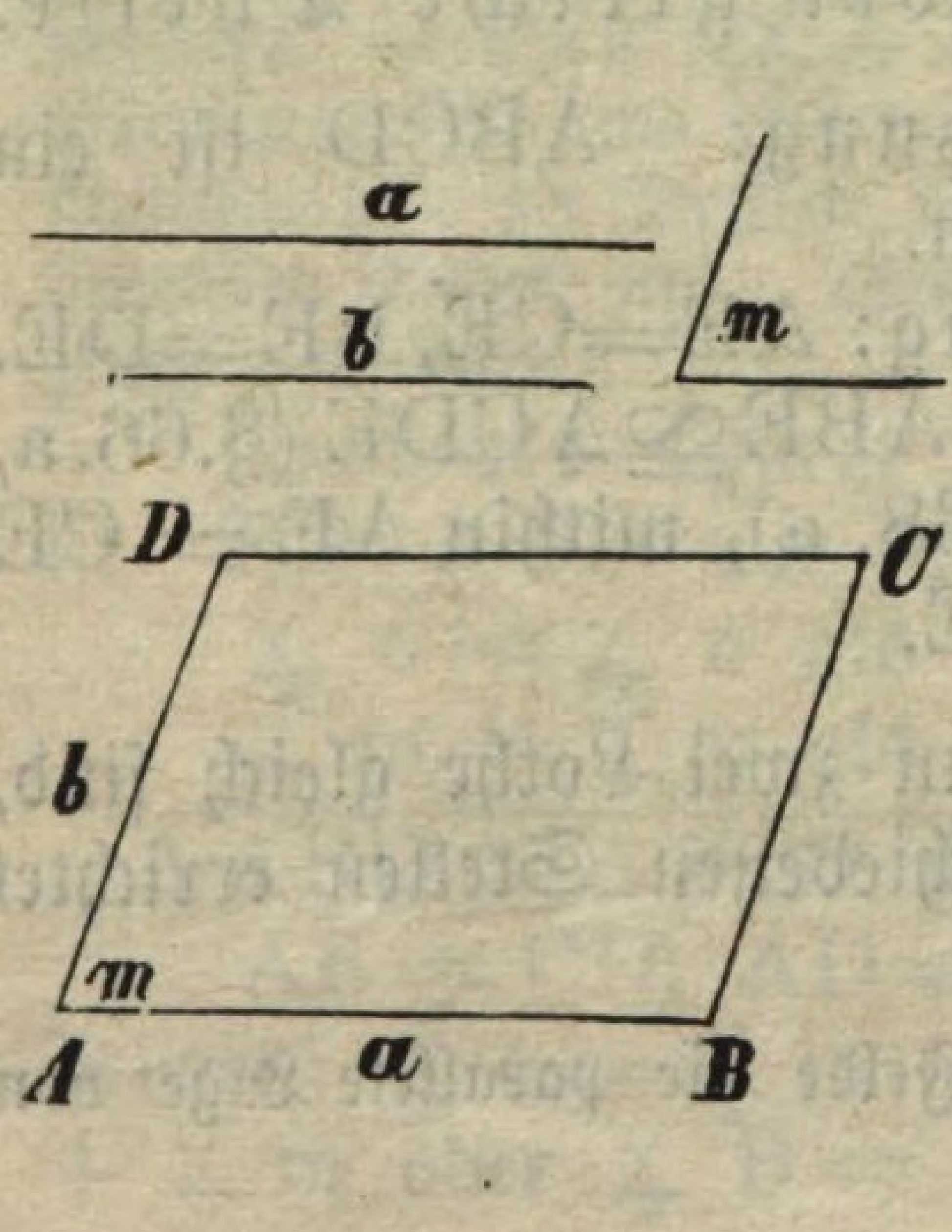
b. Jedes Rechteck ist also durch zwei seiner anstoßenden Seiten, jedes Quadrat durch eine Seite gegeben.



Sind AB und AD zwei anstoßende Seiten eines Rechtecks ABCD, so bezeichnet man dasselbe häufig durch AB × AD und ist ABCD ein Quadrat, so schreibt man gewöhnlich kurz: AB[q] oder AB^2 (ausgesprochen AB Quadrat). Wie man auf diese Bezeichnungsweise gekommen ist, geht erst aus §. 112 und 113. 1 hervor.

Aufgaben.

§. 72.



Aufgabe: Ein Parallelogramm aus zwei anstoßenden Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel m zu zeichnen.

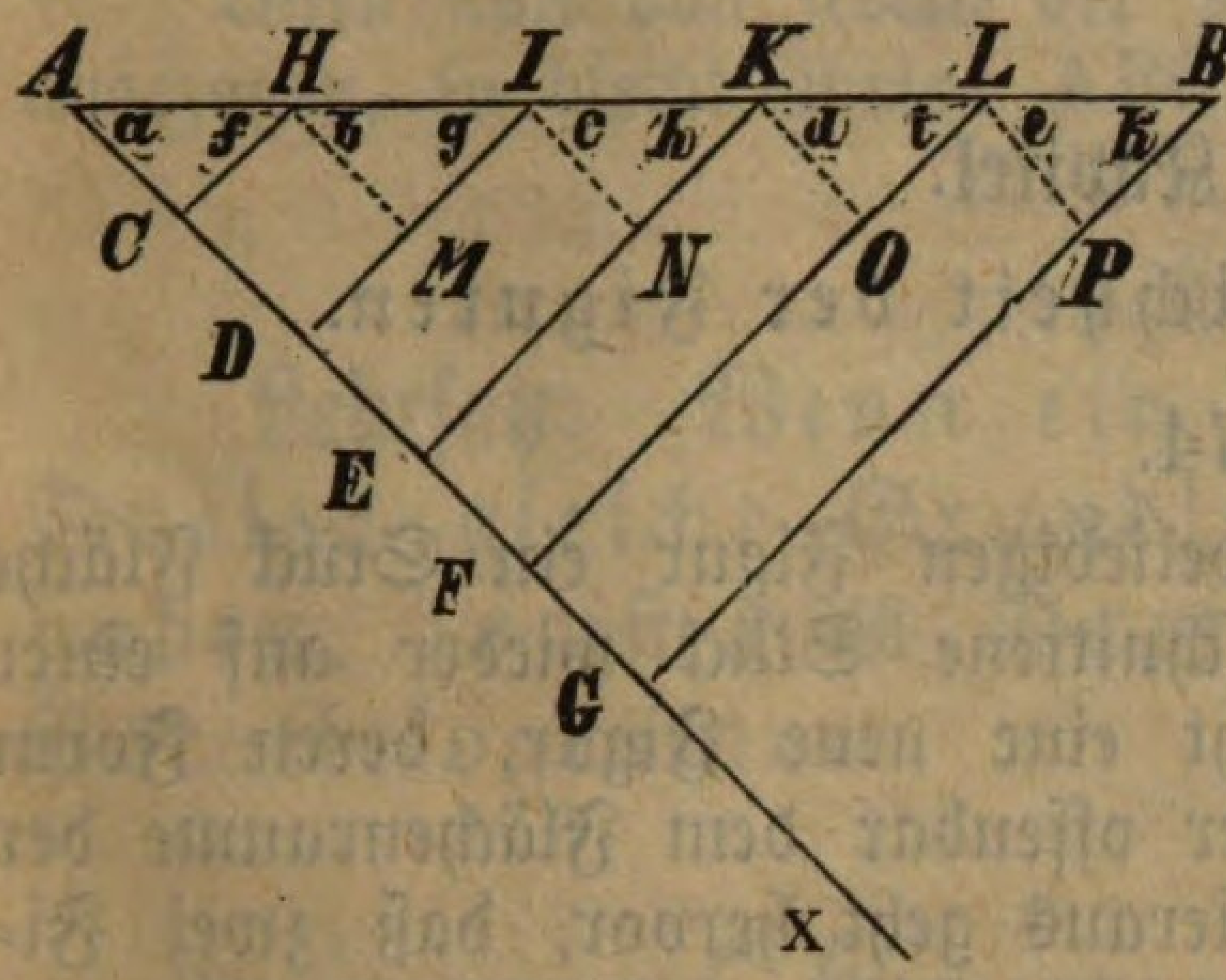
Lösung: 1) Zeichne eine Linie AB = a. 2) Trage an AB im Punkte A den ∡ m an. 3) Schneide AD = b ab. 4) Ziehe durch D zu AB und durch B zu AD Parallelen. ABCD ist dann das verlangte Parallelogramm.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

§. 73.

Aufgabe: Eine gegebene Linie AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, z. B. in 5.

Lösung: 1) Ziehe von einem der Endpunkte, z. B. A eine beliebige Linie Ax. 2) Schneide auf Ax von A aus fünf gleiche, sonst beliebige Längen ab: AC = CD u. s. w. 3) Verbinde den letzten Abschnittspunkt G mit B und ziehe dann von C, D, E u. s. w. Parallelen zu BG. Durch diese Parallelen wird AB auf die verlangte Weise getheilt.



Beweis: Zieht man von H,I,K und L Parallelen zu Ax, so ist: HM = CD, IN = DE, KO = EF, LP = FG (§. 66. a).

Da nun: AC = CD = DE = EF = FG nach der Constr. ist,
so ist auch: AC = HM = IN = KO = LP;
ferner ist: ∡ a = ∡ b = ∡ c = ∡ d = ∡ e
und ∡ f = ∡ g = ∡ h = ∡ i = ∡ k } §. 26. 1.

folgl. Δ ACH ≌ Δ HIM ≌ Δ IKN ≌ Δ KLO ≌ Δ LBP (§. 38. b.)
Mithin AH = HI = IK = KL = LB als gleichliegende Stücke.

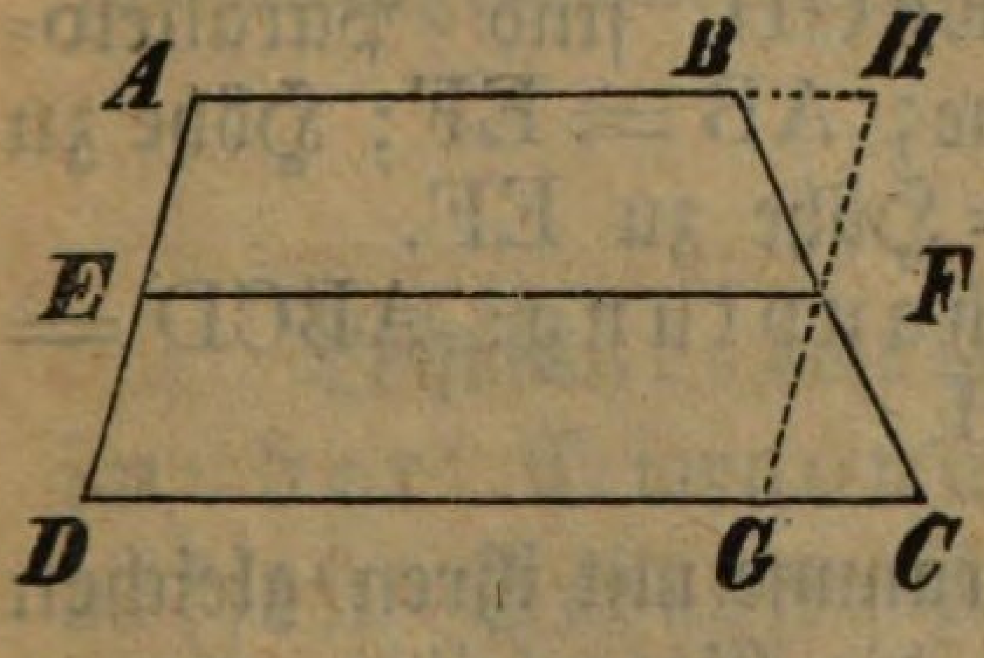
Uebungen.

a. Lehrsätze:

1) In jedem rechtwinkeligen Parallelogramm sind die Diagonalen gleich lang.

2) In jedem gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen lothrecht aufeinander und halbiren die Winkel des Parallelogramms.

3) Wenn in einem Viereck die Gegenwinkel gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.



4) Zieht man in einem Paralleltrapeze aus der Mitte einer der nicht parallelen Seiten eine Linie parallel zu den parallelen Seiten, so trifft diese Linie die Mitte der anderen nicht parallelen Seite. (Zum Beweise ziehe man GH ∦ AD.)

5) Verbindet man die Mitten der nicht parallelen Seiten eines Paralleltrapezes, so ist die Verbindungslinie parallel zu den parallelen Seiten des Trapezes. Diese Verbindungslinie heißt Mittellinie des Trapezes.

6) Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten.

b. **Aufgaben.**

1) Ueber einer gegebenen Linie ein Quadrat zu zeichnen.

2) Mit Benutzung des §. 67 durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Linie eine Parallele zu ziehen.

3) Von einem Quadrat ist die Diogonale gegeben, man soll es zeichnen.

Fünftes Kapitel.

Von der Flächengleichheit der Figuren.

§. 74.

Denkt man sich von einer beliebigen Figur ein Stück Fläche abgeschnitten und dann das abgeschnittene Stück wieder auf einer anderen Stelle angesetzt, so entsteht eine neue Figur, deren Form eine andere, deren Flächenraum aber offenbar dem Flächenraume der ursprünglichen Figur gleich ist. Hieraus geht hervor, daß zwei Figuren verschiedene Form und doch gleichen Flächeninhalt haben können. Solche Figuren heißen flächengleich, oder inhaltsgleich, oder kurzweg gleich.

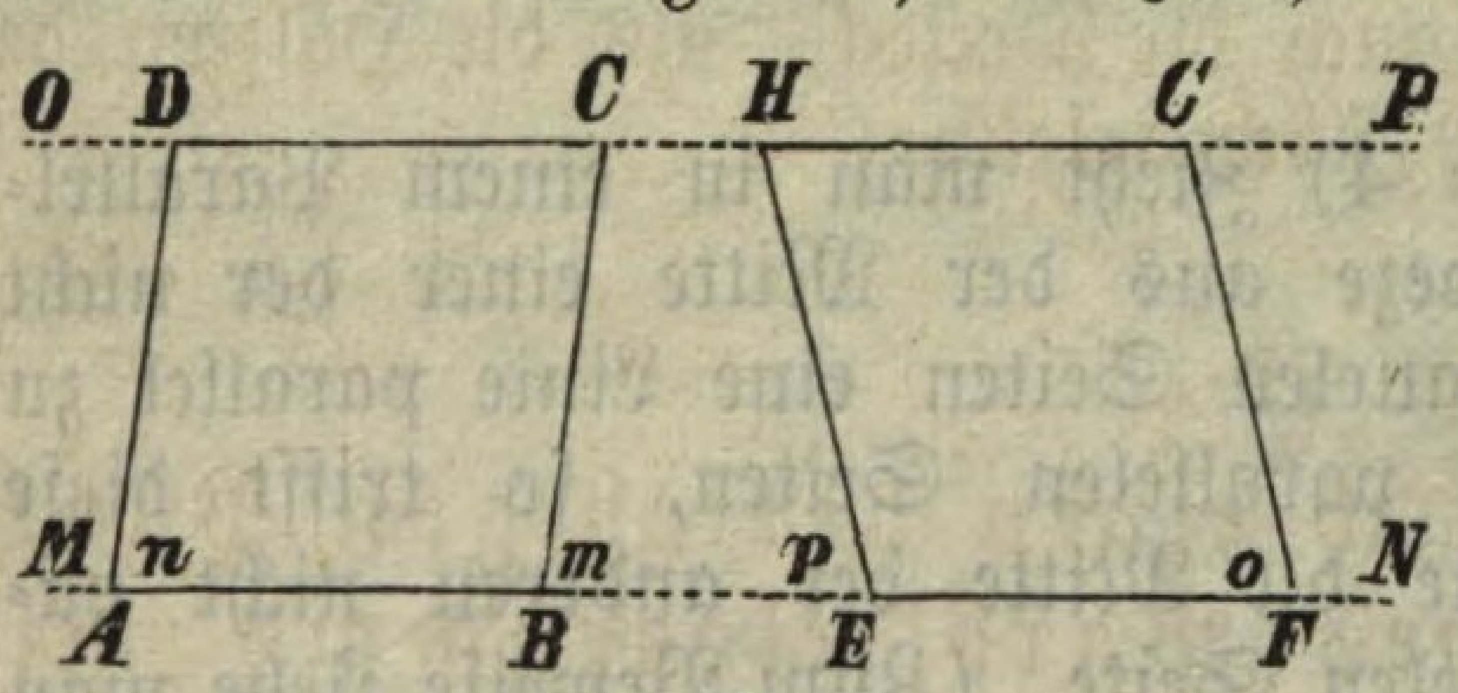
§. 75.

Wird in einem Parallelogramm eine beliebige Seite, oder im Trapez eine der beiden parallelen Seiten, als Grundlinie angesehen, so heißt das Loth aus einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seite auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gezogen, die Höhe des Parallelogramms oder Trapezes.

Die unzählig vielen Lothe, welche man als Höhen ziehen kann, sind sämmtlich gleich lang, denn je zwei derselben sind Gegenseiten eines Parallelogramms. (§. 27. a. 3. und §. 66. a.)

§. 76.

Lehrsatz: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.



Voraussetzung: ABCD und EFGH sind Parallelogramme; AB = EF; Höhe zu AB = Höhe zu EF.

Behauptung: ABCD = EFGH.

Beweis: Stellt man beide Parallelogramme mit ihren gleichen Grundlinien auf eine Linie MN, so werden die Gegenseiten, wegen der gleichen Höhen, in eine zu MN parallele Richtung OP fallen. Denkt man sich nun Trapez BCGF entlang MN so weit nach links geschoben, bis B auf A zu liegen kommt, dann muß fallen:

1) F auf E, weil BE + EF = BE + AB, oder BF = AE.

2) BC deckend auf AD, weil $\measuredangle$ m = $\measuredangle$ n als correspondirende Winkel und BC = AD (§. 66. a).

3) FG deckend auf EH, weil ∡ o = ∡ p als correspondirende Winkel und FG = EH (§. 66. a).

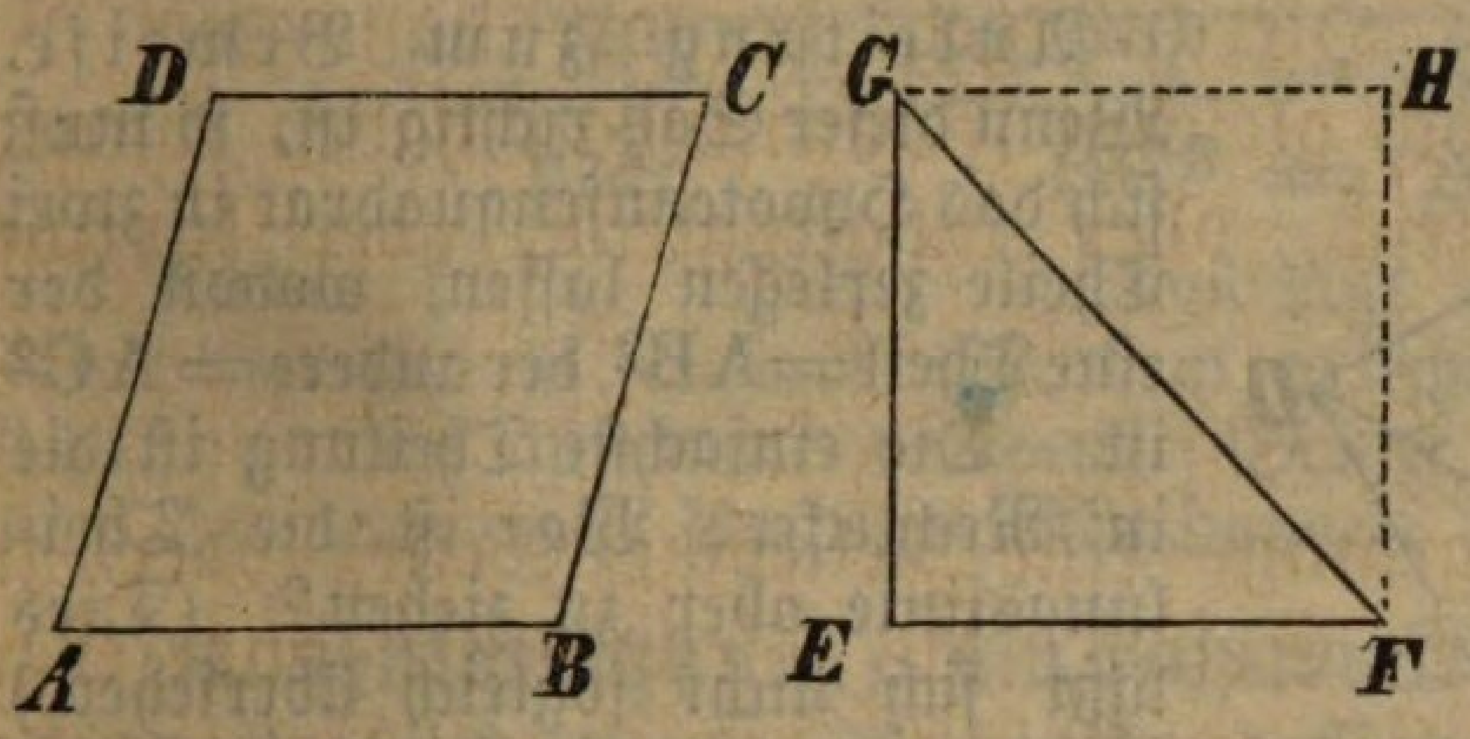
4) CG deckend auf DH, weil die Endpunkte beider Linien auf einanderfallen.

Folglich deckt Trapez BFGC das Trapez AEHD vollkommen.

Wird nun von jedem der beiden Trapeze das Trapez BEHC abgezogen, so bleibt übrig: ABCD = EFGH.

§. 77.

Lehrsatz: Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, so ist das Dreieck halb so groß als das Parallelogramm.



Voraussetzung: ABCD ist ein Parallelogramm; AB = EF; Höhe zu AB = Höhe zu EF.

Behauptung: Δ EFG = $\frac{1}{2}$ ▱ ABCD.

Beweis: Denkt man sich Δ EFG zu dem ▱ EFGH ergänzt, indem man GH ⫲ EF und FH ⫲ EG zieht, dann ist: ▱ EH = ▱ AC (§. 76) und da Δ EFG = $\frac{1}{2}$ ▱ EH (§. 66. b. 1), so muß auch Δ EFG = $\frac{1}{2}$ ▱ AC sein.

§. 78.

Lehrsatz: Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind flächengleich.

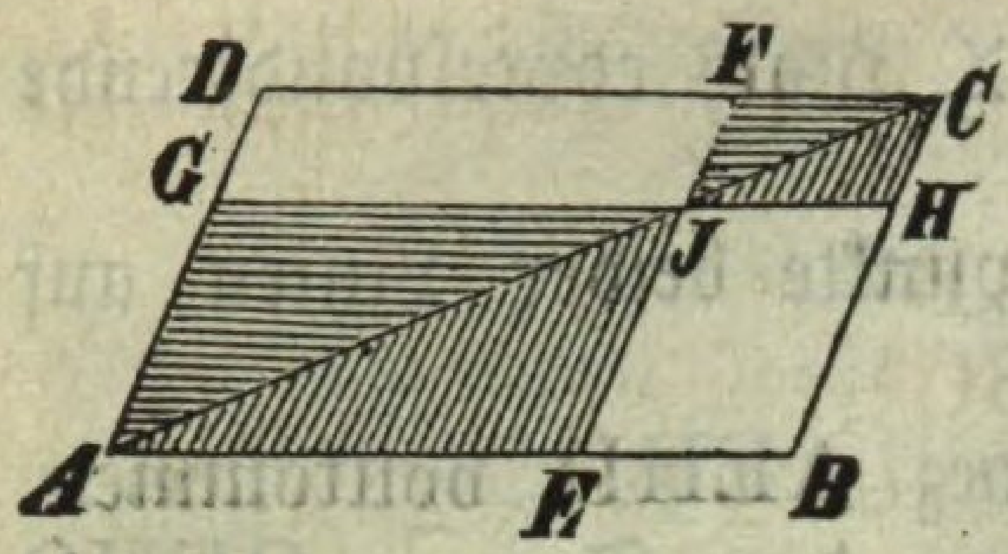
Beweis: Denkt man sich jedes der Dreiecke zu einem Parallelogramm von derselben Grundlinie und Höhe ergänzt, so sind diese Parallelogramme, (§. 76) also auch die Dreiecke, als die Hälften der Parallelogramme, (§. 66. b. 1) flächengleich.

§. 79.

Lehrsatz: Werden durch einen beliebigen Punkt in der Diagonale eines Parallelogramms mit dessen Seiten Parallelen gezogen, so entstehen vier Parallelogramme, von welchen die beiden flächengleich sind, welche nicht von der Diagonale durchschnitten werden.

Voraussetzung: ABCD ist ein Parallelogramm; EF ⫲ AD ⫲ BC, GH ⫲ AB ⫲ CD.

Behauptung: ▱ DJ = ▱ BJ.



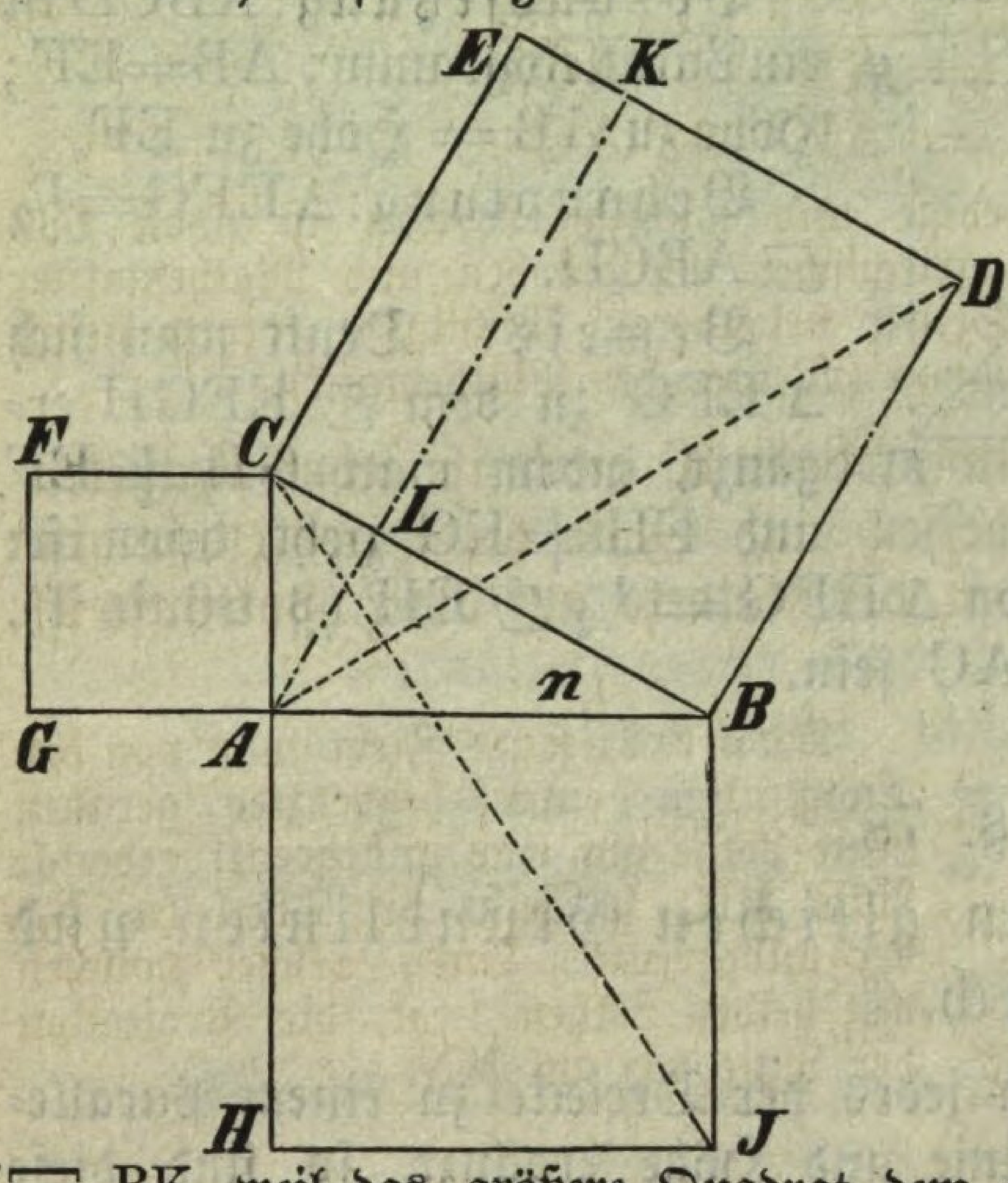
Beweis: Es ist nach §. 66. b. 1. 1) Δ ACD = Δ ABC, 2) Δ AGJ = Δ AEJ, 3) Δ CFJ = Δ CHJ; folglich Δ ACD — Δ AGJ — Δ CFJ = Δ ABC — Δ AEJ — Δ CHJ, oder ▱ DFJG = ▱ BEJH.

§. 80.

a. **Lehrsatz des Pythagoras:** Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist an Flächeninhalt gleich den beiden Quadraten über den Katheten zusammengenommmen.

Voraussetzung: ∡ BAC = 1 R; BCDE, ACFG und ABJH sind Quadrate.

Behauptung: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



Anleitung zum Beweise. Wenn dieser Satz richtig ist, so muß sich das Hypotenusenquadrat in zwei Theile zerlegen lassen, wovon der eine Theil $= AB^2$, der andere $= AC^2$ ist. Die einfachste Theilung ist die in Rechtecke. Wo ist die Theilungslinie aber zu ziehen? (Dies läßt sich nicht sogleich übersehen.) Aber wo, wenn die beiden Katheten gleich sind? (So, daß BC^2 halbirt wird.) Wie erhält man diese Theilungslinie am einfachsten? (Wenn ein ⊥ von A auf BC gezogen und dann verlängert wird). Wie wird man also wahrscheinlich auch dann die richtige Theilung erhalten, wenn die Katheten nicht gleich sind? (Durch dasselbe Loth). Welchem Rechtecke wird dann dem Augenscheine nach AB^2 gleich sein? (▭ BK, weil das größere Quadrat dem größeren Rechtecke gleich sein muß). Lassen sich beide Figuren unmittelbar vergleichen? (Nein, sie haben nicht gleiche Grundlinie und Höhe.) Durch welche Hülfslinie erhält man ein Δ, welches mit ▭ BK gleiche Grundlinie und Höhe hat und gleichzeitig mit AB^2 in Verbindung steht? (AD). Durch welche Hülfslinie erhält man ein Δ, welches mit AB^2 gleiche Grundlinie und Höhe hat? (CJ). Suche die Congruenz dieser Dreiecke nachzuweisen! Um die gleichen Stücke leichter zu erkennen, denke Dir Δ ABD um B gedreht nach Δ BCJ hin bis BD in die Richtung von BC fällt. Decken sich dann BD und BC? (Ja, sie sind = als Seiten eines Quadrats.) Auf welchen ∡ fällt ∡ ABD? (Auf ∡ CBJ). Sind diese Winkel gleich? (Ja, denn jeder = 1 R + n). Wohin fällt AB? (Deckend auf BJ. — Seiten von AB^2). Worin stimmen die Dreiecke überein? (Zwei Seiten und dem eingeschlossenen ∡). Wie sind sie also? (≅). Was findet man, wenn man Δ ABD mit ▭ BK und Δ BCJ mit AB^2 vergleicht? (Δ ABD = $\frac{1}{2}$ ▭ BK, Δ BCJ = $\frac{1}{2}$ AB^2). Wie müssen mithin ▭ BK und AB^2 sein? (gleich) u. s. w.

Beweis: Zieht man AK ⊥ BC, so wird BC^2 in die beiden Rechtecke BDKL und CEKL zerlegt. Von diesen ist ersteres $= AB^2$, letzteres $= AC^2$.

1) Um zu beweisen, daß ▭ BK = AB^2, ziehe man die Hülfslinien AD und CJ, dann ist:

AB = BJ als Seiten von AB^2
BD = BC „ „ „ BC^2
∡ ABD = ∡ CBJ, denn jeder ist = 1 R + ∡ n

Δ ABD $\cong$ ΔBCJ (§. 37).

Nun ist Δ ABD = $^1/_2$ ▭ BK, weil beide Figuren die Grundlinie BD und Höhe BL haben;
und Δ BCJ = $^1/_2$ AB^2, weil beide Figuren die Grundlinie BJ und Höhe BA haben,
folglich ▭ BDKL = AB^2.

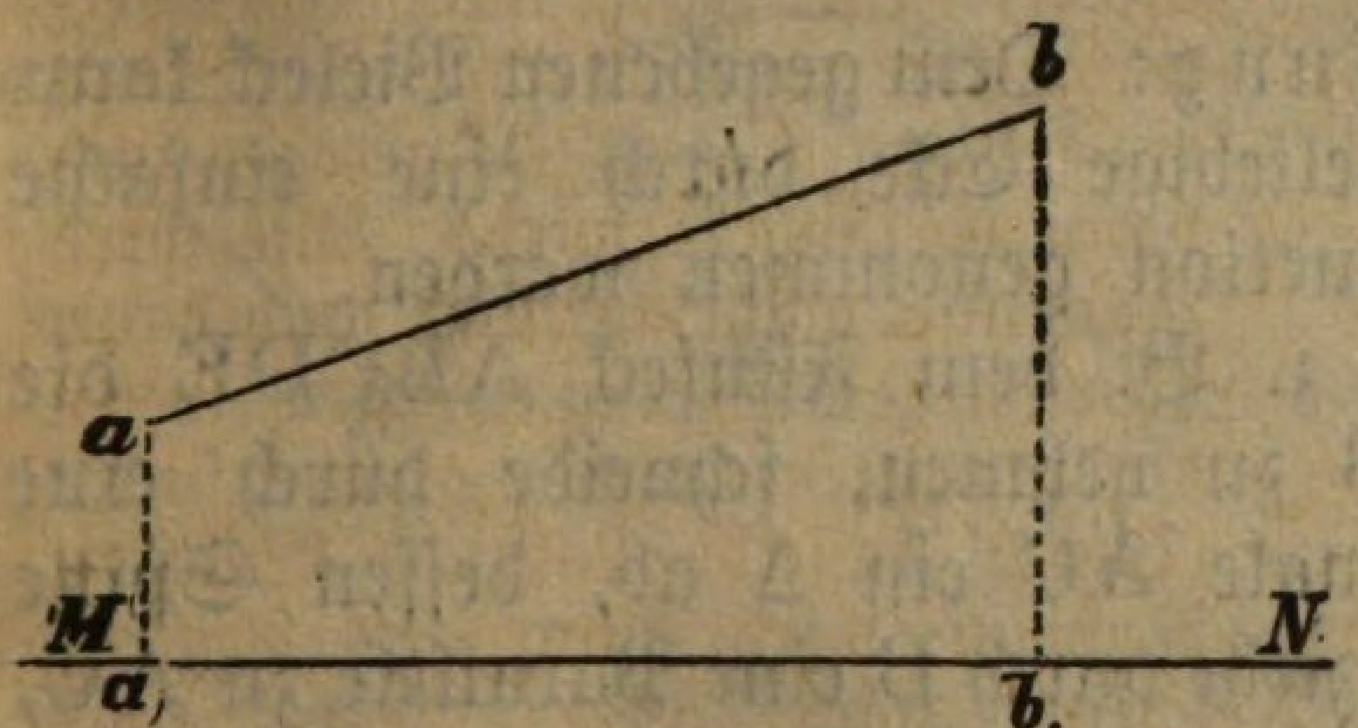
2) Verbindet man A mit E und B mit F, so läßt sich ebenso erweisen, daß ▭ CK = AC^2 ist.

3) Es ist also: ▭ BK = AB^2
▭ CK = AC^2

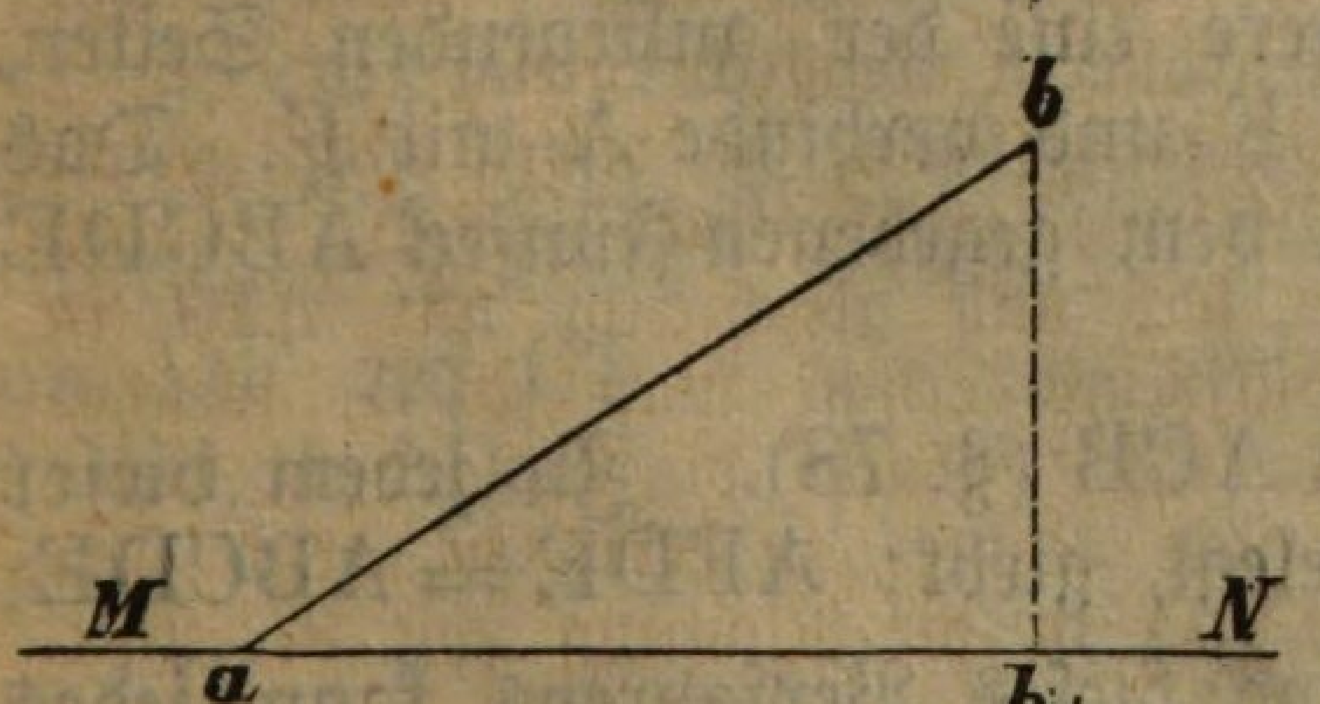
▭ BK + ▭ CK = AB^2 + AC^2
oder BC^2 = AB^2 + AC^2.

Anmerkung. Dieser merkwürdige und wichtige Lehrsatz ist schon 580 Jahre vor Christi Geburt von dem griechischen Philosophen und Mathematiker Pythagoras gefunden worden. Seiner besonderen Wichtigkeit wegen nennt man ihn auch wohl Magister Matheseos (Meister der Mathematik).

b. **Folgesätze:** 1) Im rechtwinkeligen Dreiecke ist jedes Kathetenquadrat gleich einem Rechtecke, dessen eine Seite die Hypotenuse und dessen andere Seite die Projection der Kathete auf die Hypotenuse ist.



Anmerkung. Zieht man von den Endpunkten einer begrenzten geraden Linie Lothe auf eine unbegrenzt gedachte Linie MN, so heißt der Theil (a_1 b_1) der unbegrenzten Linie, welcher zwischen den beiden Lothen liegt, die Projection der Linie ab auf MN.



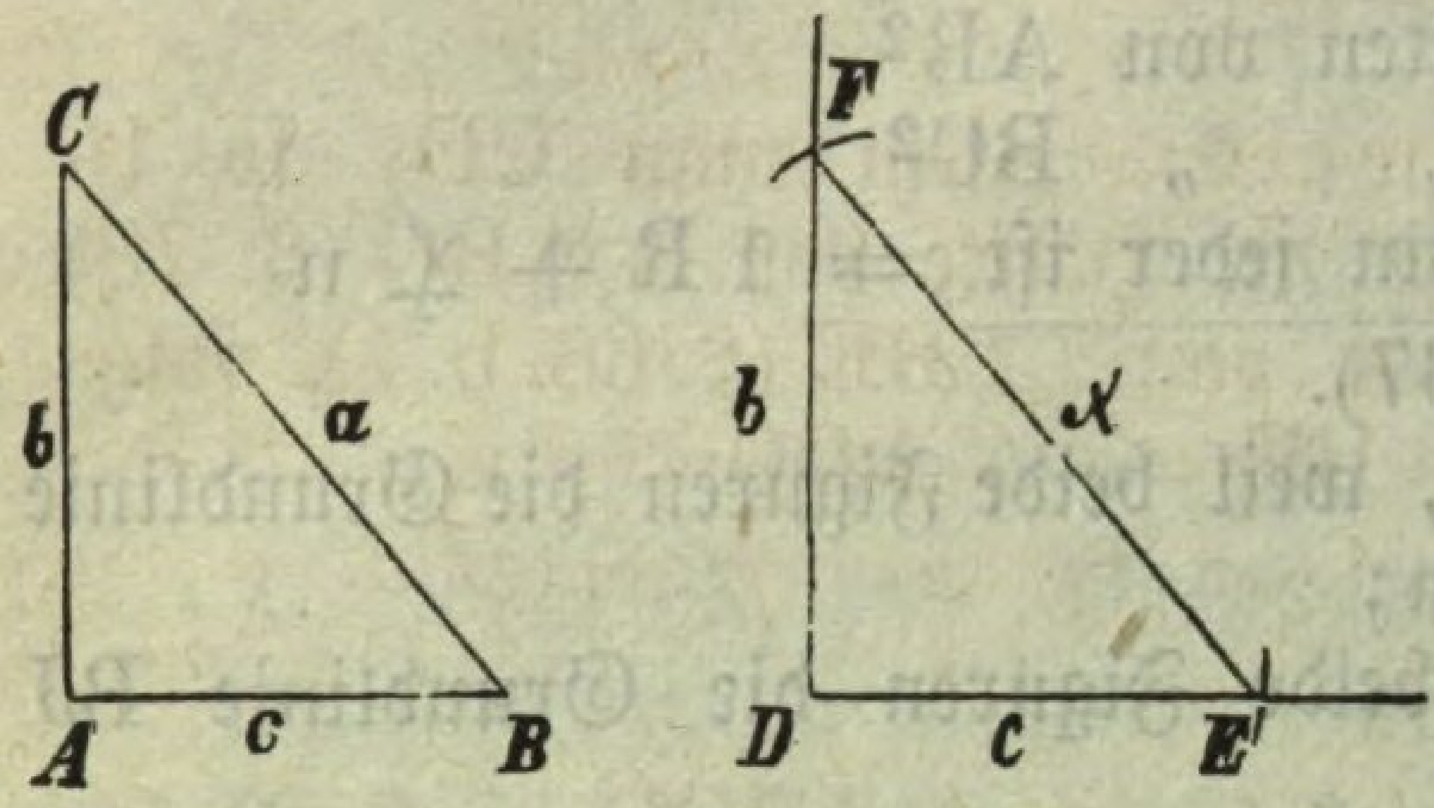
Liegt der eine Endpunkt a von ab in MN, so ist natürlich ab_1 die Projection von ab auf MN.

2) Das Quadrat jeder Kathete ist gleich dem Quadrate der Hypotenuse minus dem Quadrate der anderen Kathete.

§. 81.

Lehrsatz: Wenn in einem Dreiecke das Quadrat über einer Seite so groß ist wie die Quadrate über den beiden anderen Seiten zusammen-

genommen, so liegt der ersteren Seite ein rechter Winkel gegenüber.



Voraussetzung: $a^2 = b^2 + c^2$.
Behauptung: ∡ BAC = 1 R.

Beweis: Man zeichne einen rechten Winkel EDF, schneide auf den Schenkeln desselben DF = b und DE = c ab, und verbinde F mit E. Dann ist:

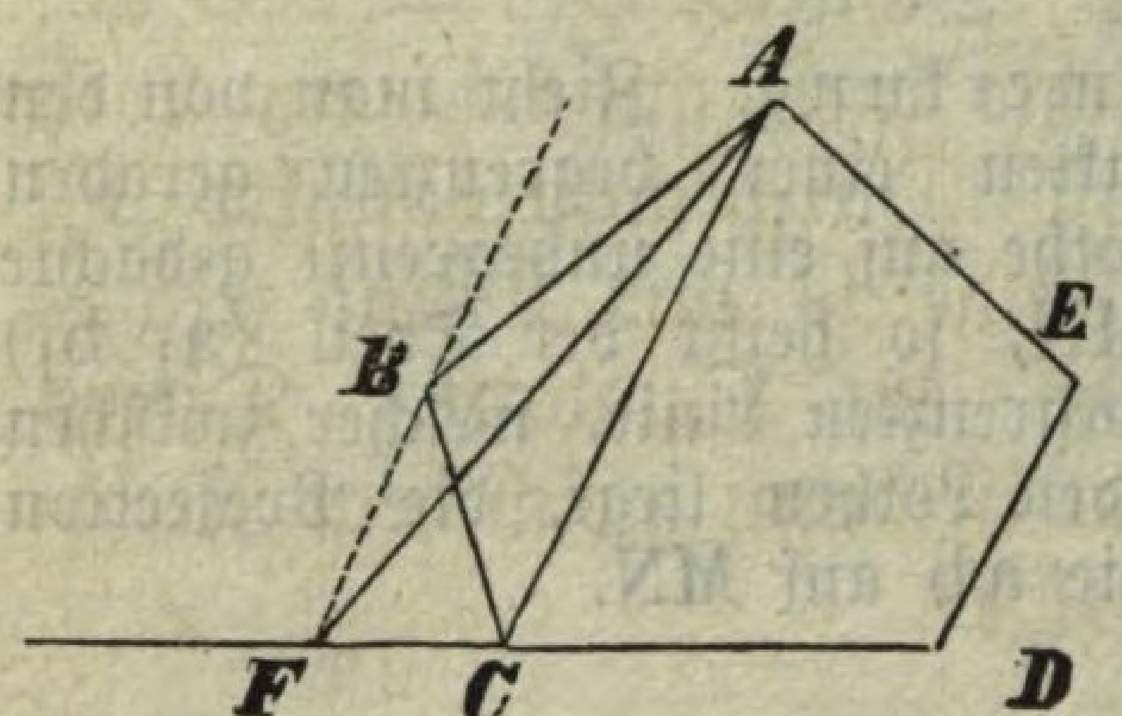
$$x^2 = b^2 + c^2 \text{ (§. 80. a)}$$
$$\text{und } a^2 = b^2 + c^2 \text{ nach der Voraussetzung}$$
$$\text{folglich } x^2 = a^2, \text{ mithin auch } x = a.$$

Die beiden Dreiecke ABC und DEF stimmen also in ihren 3 Seiten überein und sind folglich congruent. Also ist auch ∡ BAC = ∡ EDF (als gleichl. St.) und da ∡ EDF = 1 R nach der Construction, so muß auch ∡ BAC = 1 R sein.

Aufgaben.

§. 82.

a. Aufgabe: Ein gegebenes Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.



Lösung: Dem gegebenen Vieleck kann jede beliebige Ecke durch eine einfache Construction genommen werden.

Um z. B. dem Fünfeck ABCDE die Ecke B zu nehmen, schneide durch eine Diagonale AC ein Δ ab, dessen Spitze B ist, ziehe durch B eine Parallele zu AC, verlängere eine der anliegenden Seiten, z. B. DC bis zum Durchschnitt in F und verbinde A mit F. Das entstandene Viereck AFDE ist dann dem gegebenen Fünfeck ABCDE flächengleich.

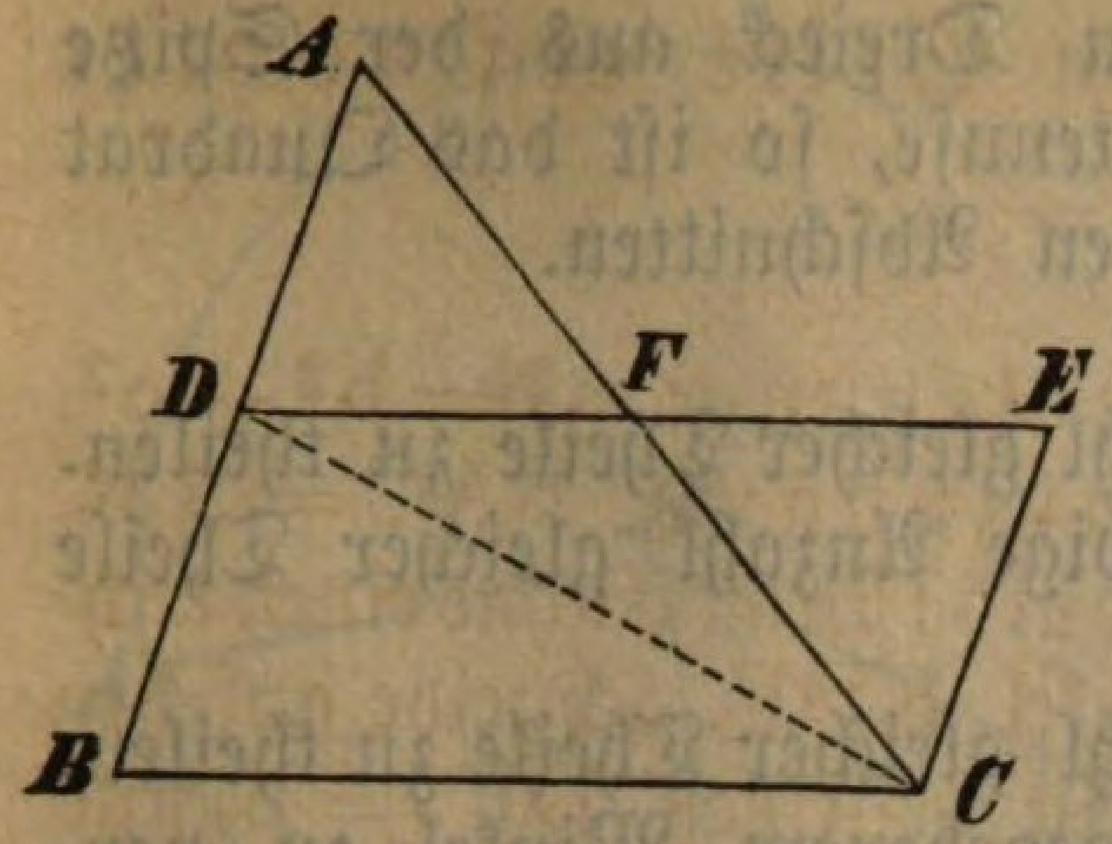
Beweis: Es ist Δ ACF = Δ ACB (§. 78). Zu jedem dieser Dreiecke das Viereck AEDC hinzugelegt, giebt: AFDE = ABCDE.

b. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann jedes Vieleck nach und nach in ein Dreieck verwandelt werden.

§. 83.

Aufgabe: Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Lösung: 1) Halbire eine Seite des Dreiecks, z. B. AB. 2) Ziehe vom Halbirungspunkte D zu BC und von C zu AB

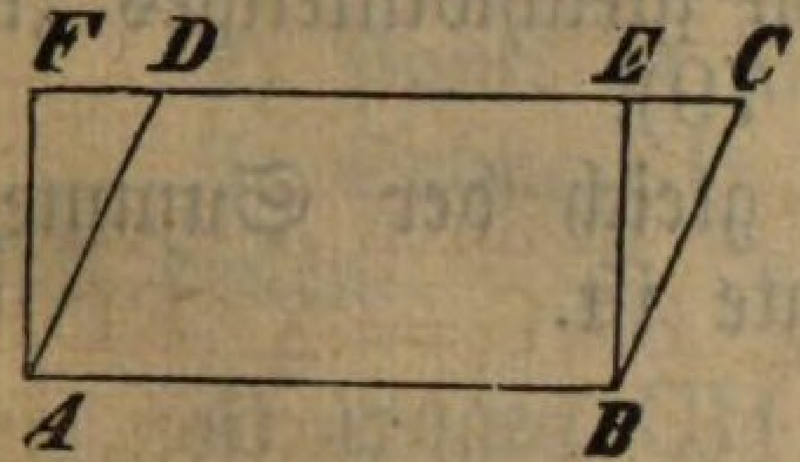


eine Parallele. Das entstandene Parallelogramm BCDE ist dann gleich Δ ABC.

Beweis: Zieht man CD, so ist Δ BCD die Hälfte von Δ ABC (§. 78) und auch von ▱ BE (§. 66. b. 1), folglich ▱ BE = Δ ABC.

§. 84.

Aufgabe: Ein gegebenes Parallelogramm ABCD in ein Rechteck zu verwandeln.

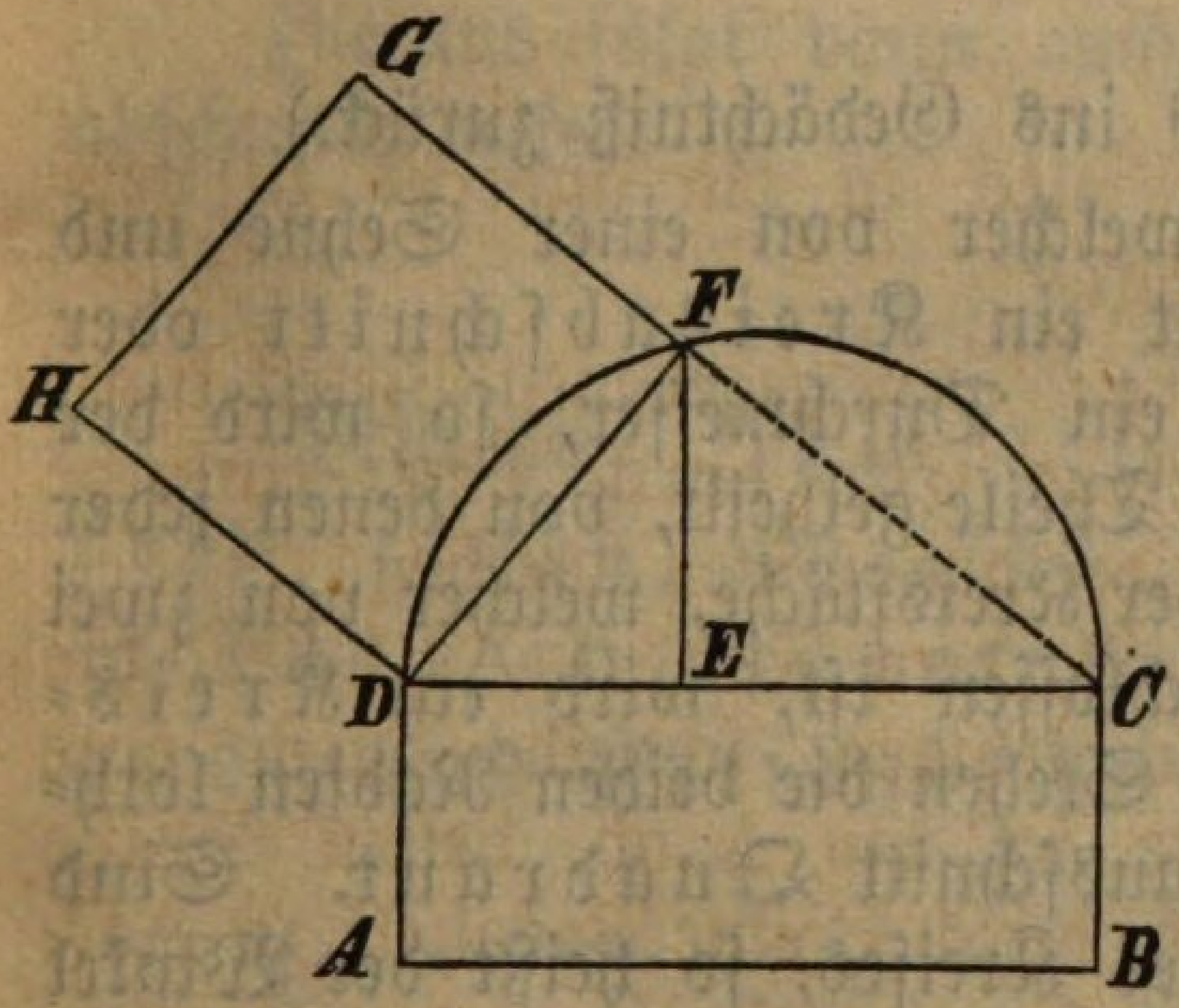


Lösung: Errichte in A und B Lothe und verlängere CD bis F. Dann ist ABEF das verlangte Rechteck.

Beweis folgt unmittelbar aus §. 76.

§. 85.

Aufgabe: Ein gegebenes Rechteck ABCD in ein Quadrat zu verwandeln.



Lösung: 1) Beschreibe über einer der größeren Seiten des Rechtecks z. B. CD einen Halbkreis. 2) Schneide DE = AD ab. 3) Errichte in E auf CD ein Loth bis zum Durchschnittspunkte F. 4) Verbinde D mit F und zeichne über DF ein Quadrat. Dieses Quadrat ist dann gleich dem Rechtecke ABCD.

Beweis: Wird C mit F verbunden, so ist: ∡ CFD = 1 R (§. 53. b.), also ist CD Hypotenuse und DF Kathete des rechtwinkeligen Δ CDF; ferner ist FE ⊥ CD, also DE die Projection von DF auf CD. Da nun AD = DE, so ist DF^2 = ABCD (§. 80. b. 1).

Uebungen.

a. Lehrsätze:

1) Beweise Lehrsatz §. 76, indem du die beiden Parallelogramme mit ihren gleichen Grundlinien aufeinander legst (3 Fälle).

2) Jedes Parallelogramm ist gleich einem Dreieck, welches dieselbe Höhe, aber doppelte Grundlinie hat.

3) Jedes Trapez ist gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Summe der beiden parallelen Seiten und dessen Höhe gleich der Höhe des Trapezes ist.

4) Zieht man in einem rechtwinkeligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat desselben gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten.

b. **Aufgaben.**

1) Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

2) Ein Parallelogramm in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

3) Ein Trapez in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

4) Ein Dreieck in ein anderes mit gegebenem Winkel zu verwandeln.

5) Ein Dreieck in ein anderes mit Beibehaltung eines Winkels, aber: a. gegebener Seite, b. gegebener Höhe zu verwandeln.

6) Ein Parallelogramm in ein anderes ihm gleichwinkeliges zu verwandeln, welches eine gegebene Seite hat (§. 79).

7) Ein Quadrat zu zeichnen, welches a. gleich der Summe, b. gleich der Differenz zweier gegebenen Quadrate ist.

Sechstes Kapitel.

Vom Kreise.

§. 86.

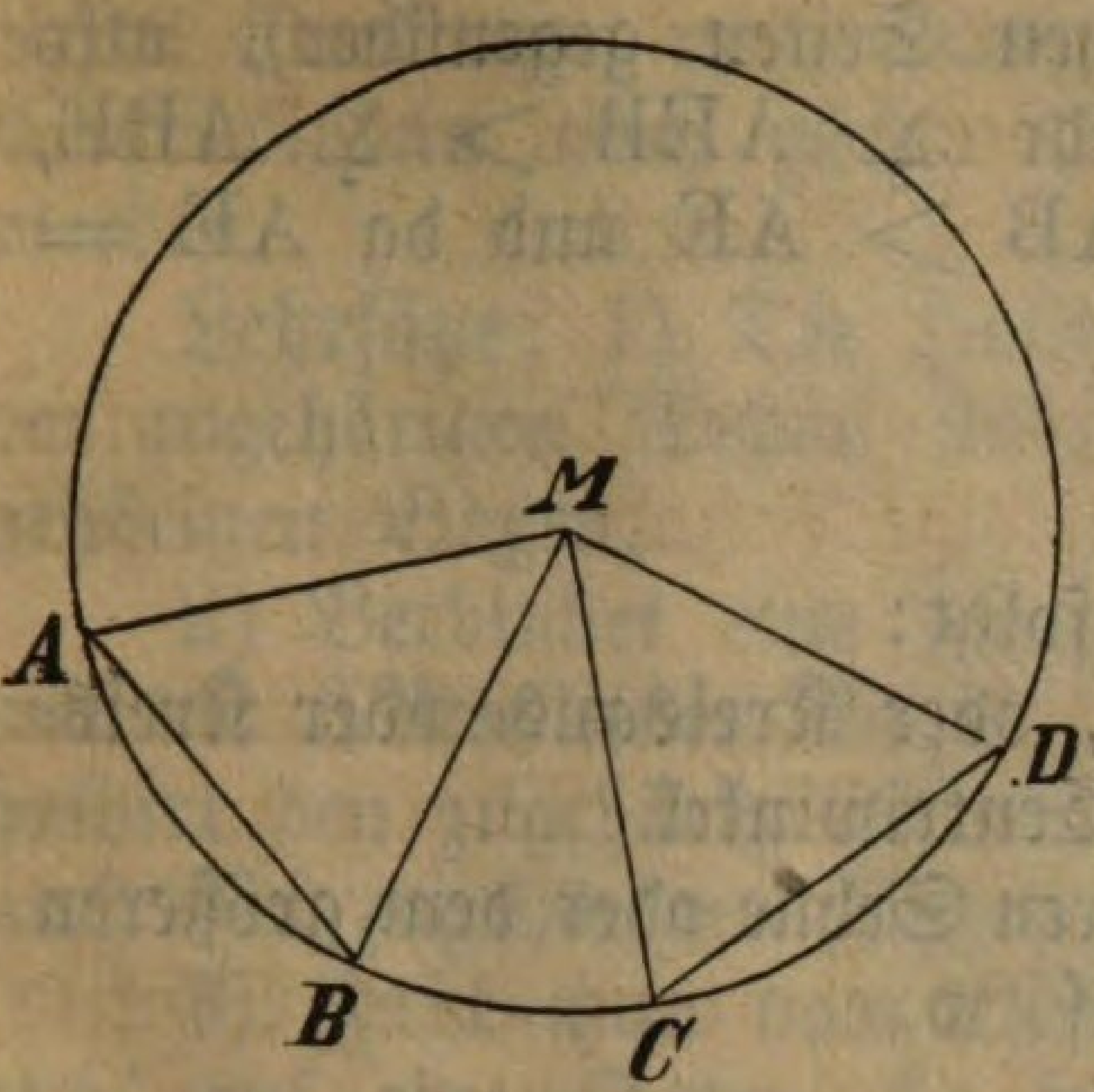
(Man rufe sich hier zuvor §. 29 ins Gedächtniß zurück.)

Jeder Theil einer Kreisfläche, welcher von einer Sehne und einem Kreisbogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment. Ist hierbei die Sehne ein Durchmesser, so wird der Kreis durch diesen in zwei congruente Theile getheilt, von denen jeder ein Halbkreis heißt. Jeder Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Radien und einem Kreisbogen eingeschlossen ist, wird ein Kreisausschnitt oder Sector genannt. Stehen die beiden Radien lothrecht auf einander, so heißt der Kreisausschnitt Quadrant. Sind die Schenkel eines Winkels Radien eines Kreises, so heißt der Winkel Centriwinkel. Liegt der Scheitel eines Winkels in der Peripherie eines Kreises und sind seine Schenkel Sehnen desselben, so wird der Winkel ein Peripheriewinkel genannt. Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen concentrisch. Haben dagegen zwei Kreise verschiedene Mittelpunkte, so werden sie excentrisch genannt und die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte heißt Centrale.

Haben zwei Kreise einen gleichen Radius, so sind sie congruent.

§. 87.

Lehrsatz: Sind in einem Kreise zwei Centriwinkel gleich, so sind die dazu gehörigen Sehnen gleich und die zugehörigen Bogen, Kreisaus- und Kreisabschnitte congruent.



Voraussetzung: M ist der Mittelpunkt des Kreises und ∡ AMB = ∡ CMD.

Behauptung: Sehne AB = Sehne CD; $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$. Sector AMB ≌ Sector CMD; Segment AB ≌ Segment CD.

Beweis: Denkt man sich Kreisausschnitt CMD so auf AMB gelegt, daß MC deckend auf MA fällt, so muß auch fallen:

1) MD in die Richtung MB, weil ∡ CMD = ∡ AMB,

2) Punkt D auf Punkt B, weil MD = MB als Radien,

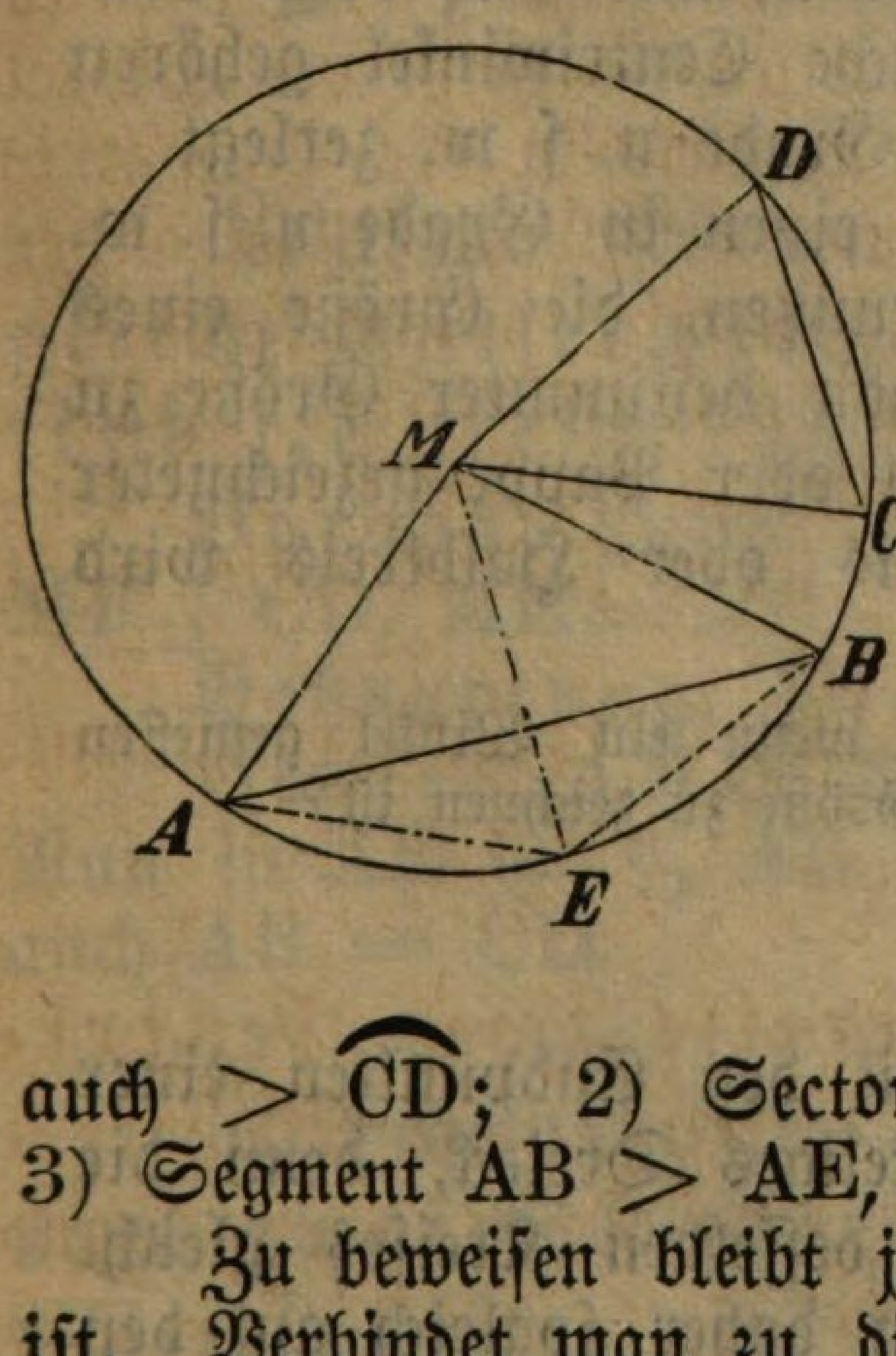
3) Sehne CD deckend auf AB, weil die Endpunkte beider Linien sich decken.

4) Bogen CD deckend auf $\overset{\frown}{AB}$; denn fiele irgend ein Punkt des Bogens CD nicht in $\overset{\frown}{AB}$, sondern außerhalb oder innerhalb des Kreises, so müßte der Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkte M größer oder kleiner als der Halbmesser des Kreises sein, was nicht möglich ist.

Hieraus folgt dann auch, daß sich die Kreisaus- und Kreisabschnitte decken.

§. 88.

Lehrsatz: Zum größeren von zwei Centriwinkeln eines Kreises gehört auch eine größere Sehne, ein größerer Bogen, ein größerer Kreisaus- und Kreisabschnitt.



Voraussetzung: M ist der Mittelpunkt des Kreises; ∡ AMB > ∡ CMD.

Behauptung: Sehne AB > CD, Bogen AB > CD, Sector AMB > CMD; Segment AB > CD.

Beweis: Denkt man sich Sector CMD so auf AMB gelegt, daß Radius MC den Radius MA deckt, dann muß Radius MD zwischen MA und MB, z. B. nach ME fallen, weil ∡ CMD kleiner als ∡ AMB ist. Hieraus ist nun sogleich klar: 1) $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AE}$, also auch $> \overset{\frown}{CD}$; 2) Sector AMB > AME, also auch > CMD; 3) Segment AB > AE, also auch > CD.

Zu beweisen bleibt jedoch noch, daß auch Sehne AB > AE ist. Verbindet man zu diesem Zwecke B mit E, so ist: ∡ MEB

$= \measuredangle$ MBE (liegen im Δ MEB gleichen Seiten gegenüber), also $\measuredangle$ MEB $>$ $\measuredangle$ ABE und um so mehr $\measuredangle$ AEB $>$ $\measuredangle$ ABE, folglich auch im Δ ABE (nach §. 42) AB $>$ AE und da AE $=$ CD, so: AB $>$ CD.

§. 89.

Aus §. 87 in Verbindung mit 88 folgt:

1) Zu gleichen Sehnen, oder Bogen, oder Kreisaus- oder Kreisabschnitten eines Kreises gehören gleiche Centriwinkel.

2) In jedem Kreise gehört zur größeren Sehne oder dem größeren Bogen auch der größere Centriwinkel u. s. w.

§. 90.

Winkelmessung durch Kreisbogen. Wird eine einseitig begrenzte gerade Linie um ihren Endpunkt drehend bewegt, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so bildet sie (wie schon früher besprochen worden) mit ihrer ersten Richtung nach und nach alle möglichen Winkel und jeder Punkt in ihr beschreibt gleichzeitig eine Kreislinie. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt dieser Kreise liegt in dem Drehpunkte. Denkt man sich nun den vollen Winkel (die volle Umdrehung) (nach §. 18) in 360 Grade, jeden Grad in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden getheilt, so wird, da zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen gehören, auch der Umfang jedes dieser Kreise in ebenso viel gleiche Theile getheilt. Diese Theile heißen, den Winkelgraden, Winkelminuten und Winkelsekunden entsprechend, Bogengrade, Bogenminuten und Bogensekunden, und offenbar werden dann zwischen den Schenkeln eines jeden der nach und nach entstandenen Winkel genau so viele Bogengrade, Minuten und Sekunden liegen, als der Winkel Grade, Minuten und Sekunden mißt. Theilt man umgekehrt eine dieser Kreislinien in 360 Grade u. s. w. und verbindet jeden Theilpunkt mit dem Centrum, so wird, da zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel gehören (§. 89. 1), auch der volle Winkel in seine Grade u. s. w. zerlegt.

Aus diesem Grunde kann man bequem einen in Grade u. s. w. eingetheilten Kreis oder Halbkreis dazu benutzen, die Größe eines Winkels zu bestimmen, oder auch Winkel von bestimmter Größe zu zeichnen. Ein zu diesem Zwecke auf Metall oder Pappe gezeichneter und in Grade u. s. w. eingetheilter Kreis oder Halbkreis wird Transporteur genannt.

Wie ist ein Transporteur zu handhaben, a. wenn ein Winkel gemessen werden soll? b. wenn ein Winkel von bestimmter Größe zu zeichnen ist?

§. 91.

Wird der Mittelpunkt eines Kreises mit den Endpunkten einer Sehne verbunden, so entsteht ein gleichschenkeliges Dreieck, denn die beiden Verbindungslinien sind als Radien desselben Kreises gleich. Die Lehrsätze §. 46, 47, 48 und 49 können daher sogleich auf den

Kreis übertragen und, wenn man noch berücksichtigt, daß zu gleichen Centriwinkeln auch gleiche Bogen gehören, wie folgt ausgesprochen werden.

Lehrsätze: 1) Die Halbirungslinie eines Centriwinkels steht auf der zugehörigen Sehne lothrecht, halbirt dieselbe und auch den zugehörigen Bogen.

2) Verbindet eine gerade Linie den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne, so steht sie lothrecht auf dieser Sehne, halbirt den zugehörigen Centriwinkel und bei genügender Verlängerung auch den zugehörigen Bogen.

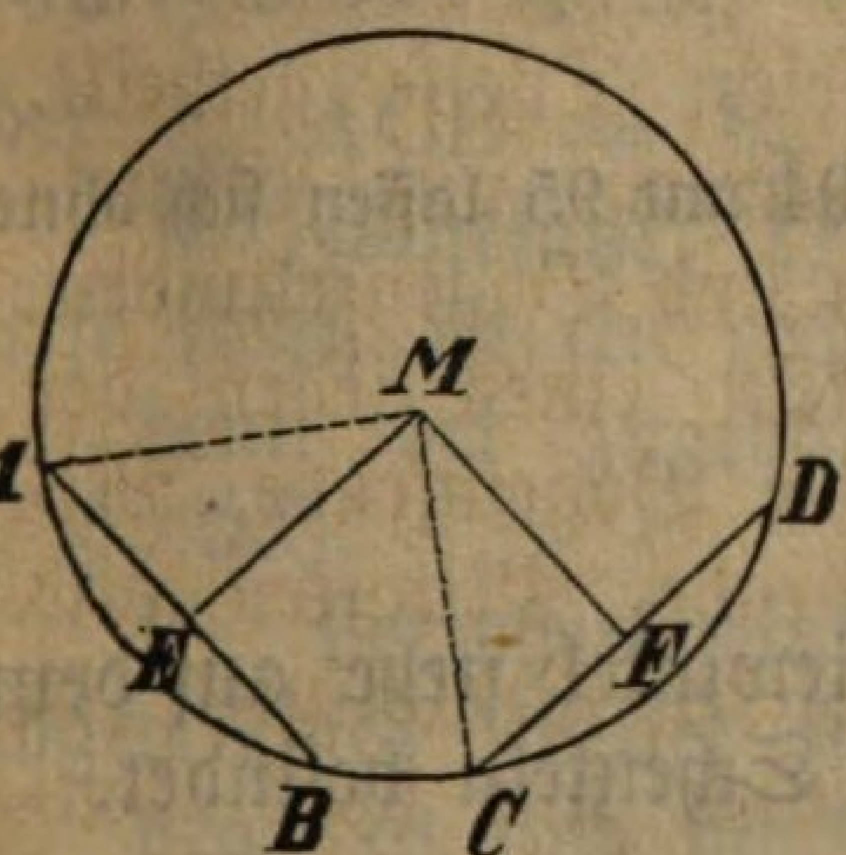
3) Zieht man vom Mittelpunkte eines Kreises eine Linie lothrecht auf eine Sehne, so halbirt sie diese Sehne, den zugehörigen Centriwinkel und bei genügender Verlängerung auch den zugehörigen Bogen.

4) Errichtet man auf einer Sehne in deren Mitte ein Loth, so geht dasselbe genügend verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises hindurch.

Anmerkung. Man versäume jedoch nicht, die Beweise dieser Lehrsätze vollständig in Bezug auf den Kreis durchzuführen.

§. 92.

Lehrsatz: Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Entfernung vom Mittelpunkte.



Voraussetzung: Sehne AB = CD; M Mittelpunkt des Kreises, ME ⊥ AB, MF ⊥ CD.

Behauptung: ME = MF.

Beweis: Δ MAE ≌ Δ MCF (§. 91. 3. und §. 44. b.) folglich ME = MF.

§. 93.

Lehrsatz: Wenn zwei Sehnen eines Kreises gleiche Entfernung vom Mittelpunkte haben, so sind sie gleich lang. (Fig. §. 92.)

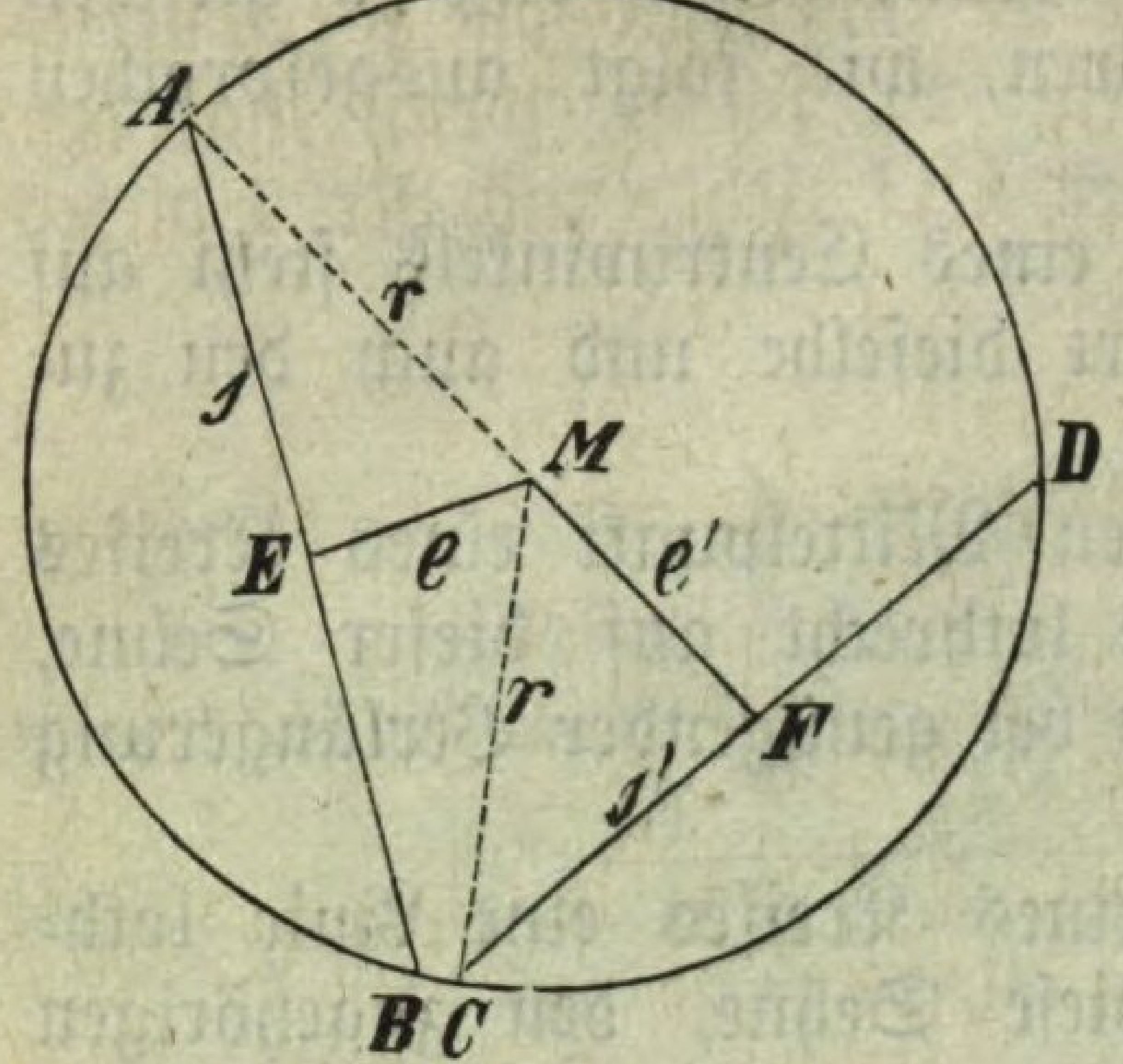
Voraussetzung: M Mittelpunkt des Kreises, ME ⊥ AB, MF ⊥ CD, ME = MF.

Behauptung: AB = CD.

Beweis: Δ MAE ≌ Δ MCF (§. 44. b.), mithin AE = CF. Nun ist AE = $1/2$ AB (§. 91. 3) und CF = $1/2$ CD, folglich auch AB = CD.

§. 94.

a. **Lehrsatz:** In jedem Kreise hat die größere von zwei Sehnen die kleinere Entfernung vom Mittelpunkte.



Voraussetzung: M Mittelpunkt des Kreises, $ME \perp AB$, $MF \perp CD$ und $AB > CD$.

Behauptung: $ME < MF$.

Beweis: Nach dem Lehrsatz des Pythagoras ist:

$$e^2 = r^2 - s^2$$
$$e'^2 = r^2 - s'^2$$

In der ersten Gleichung wird von r^2 mehr abgezogen, als in der zweiten, denn es ist s ($= \frac{1}{2}$ AB) $> s'$ ($= \frac{1}{2}$ CD). Da wo man mehr abzieht, wird weniger übrig bleiben, also ist $e^2 < e'^2$, folglich auch $e < e'$, oder $ME < MF$.

§. 95.

Lehrsatz: Haben zwei Sehnen eines Kreises ungleiche Entfernung vom Mittelpunkte, so ist diejenige die größere, welche die kleinere Entfernung vom Mittelpunkte hat.

Der Beweis kann leicht nach dem Vorbilde des vorigen Beweises geführt werden.

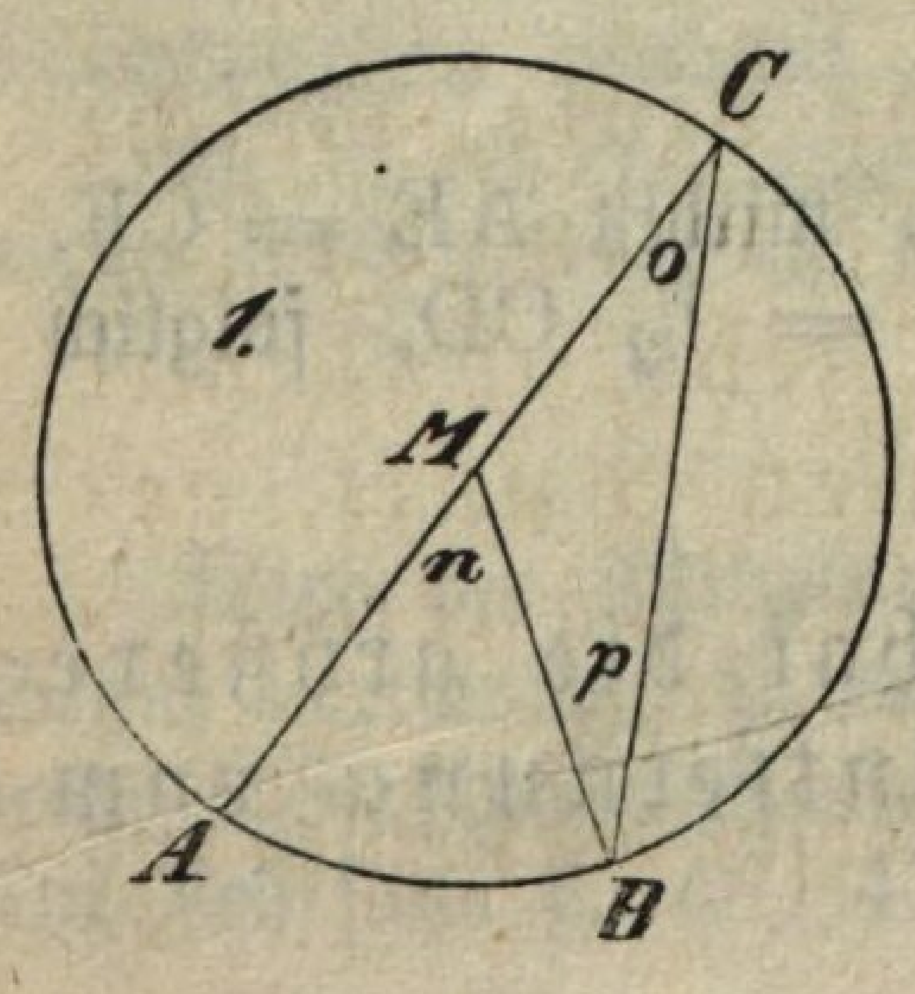
Anmerkung. Die Lehrsätze §. 87, 88, 89, 92, 93, 94 und 95 lassen sich ohne Weiteres auch auf gleiche Kreise ausdehnen.

§. 96.

Man sagt, ein Centriwinkel oder Peripheriewinkel stehe auf dem Bogen des Kreises, welcher sich zwischen seinen Schenkeln befindet.

§. 97.

a. **Lehrsatz:** Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß wie der Centriwinkel, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht.

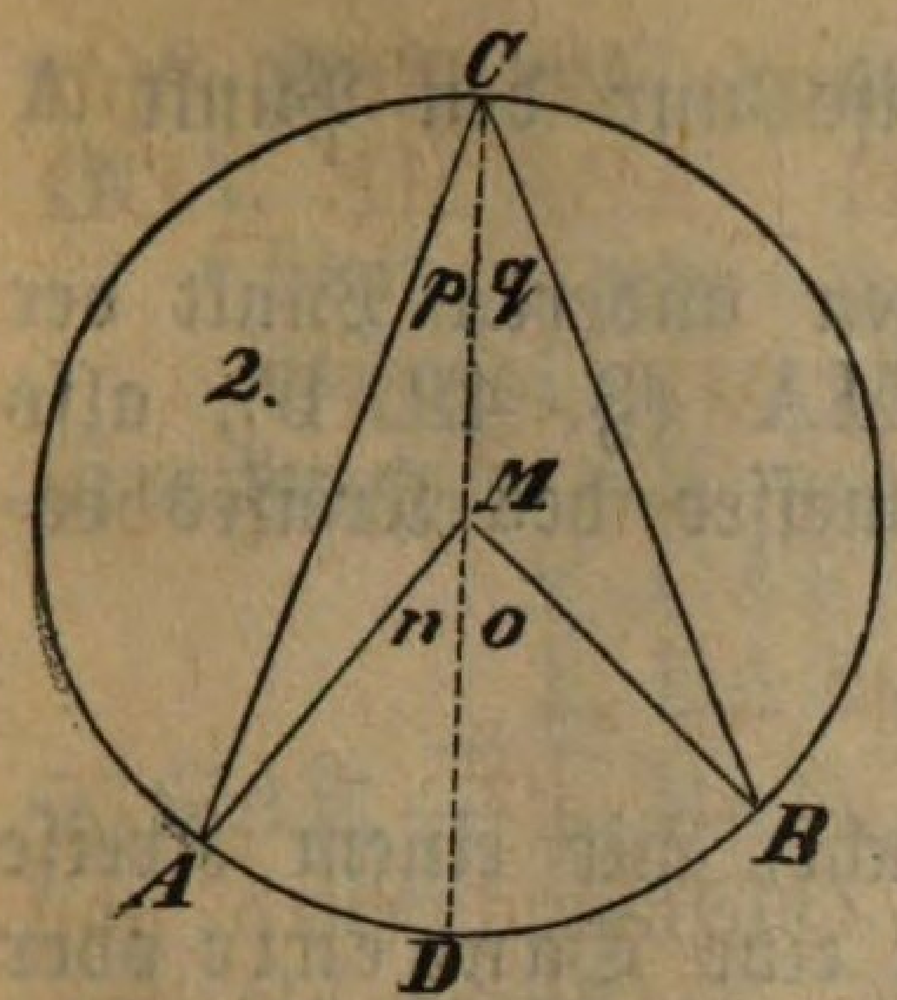


Voraussetzung: M ist der Mittelpunkt des Kreises.

Behauptung: $\measuredangle ACB = \frac{1}{2} \measuredangle AMB$.

Beweis: 1) Liegt M in einem Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 1), so ist: $\measuredangle n = \measuredangle o + \measuredangle p$ (§. 31. a.) und da $\measuredangle o = \measuredangle p$ (§. 39. a.)

so $\measuredangle n = 2 \measuredangle o$, oder: $\measuredangle o = \frac{1}{2} \measuredangle n$.



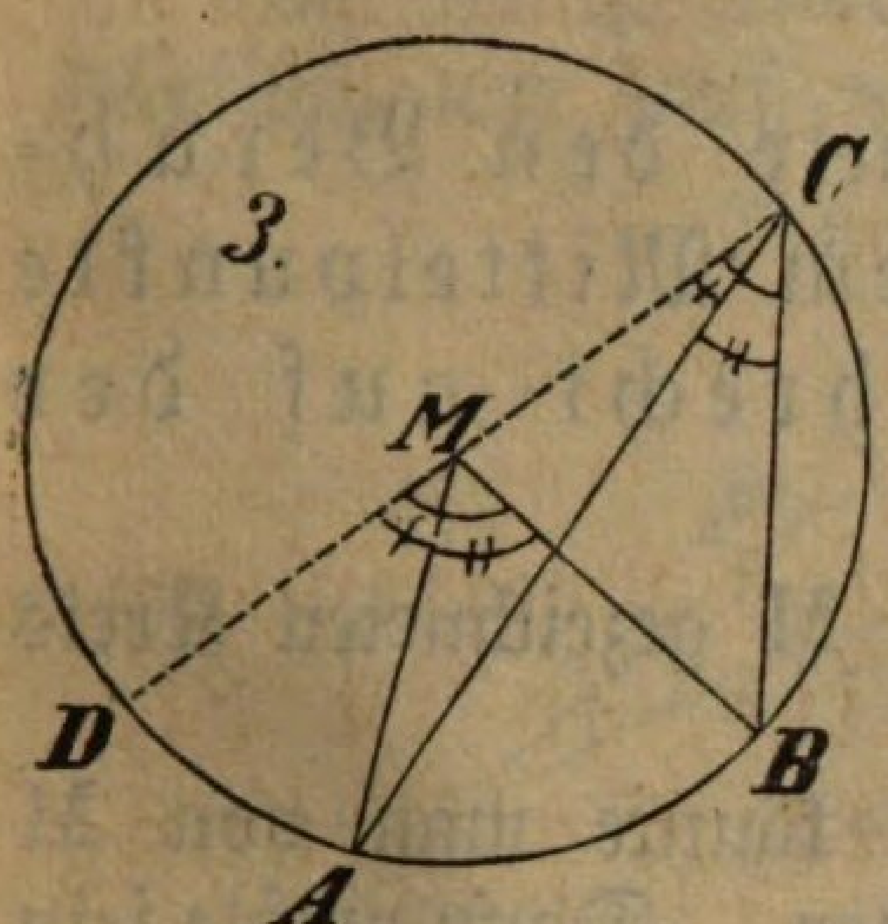
2) Liegt M innerhalb des Peripheriewinkels (Fig. 2), so ist, wenn man den Durchmesser CD zieht (nach Nr. 1 dieses Beweises):

$$\sphericalangle\, p = \sphericalangle\, \frac{n}{2}$$

$$\sphericalangle\, q = \sphericalangle\, \frac{o}{2}$$

folglich $\sphericalangle\, p + \sphericalangle\, q = \frac{\sphericalangle\, n + \sphericalangle\, o}{2}$,

oder $\sphericalangle$ ACB $= \frac{1}{2}\, \sphericalangle$ AMB.



3) Liegt M außerhalb des Peripheriewinkels (Fig. 3), so ist, wenn man den Durchmesser CD zieht (nach Nr. 1 dieses Beweises):

$$\sphericalangle\, BCD = \sphericalangle\, \frac{BMD}{2}$$

$$\sphericalangle\, ACD = \sphericalangle\, \frac{AMD}{2}$$

folglich: $\sphericalangle\, BCD - \sphericalangle\, ACD = \frac{\sphericalangle\, BMD - \sphericalangle\, AMD}{2}$

oder $\sphericalangle$ ACB $= \frac{1}{2}\, \sphericalangle$ AMB.

b. **Folgesätze:** 1) Jeder Peripheriewinkel, welcher auf einem Halbkreise steht, ist ein rechter Winkel;

denn der zugehörige Centriwinkel ist ein gestreckter = 2 R (s. §. 53).

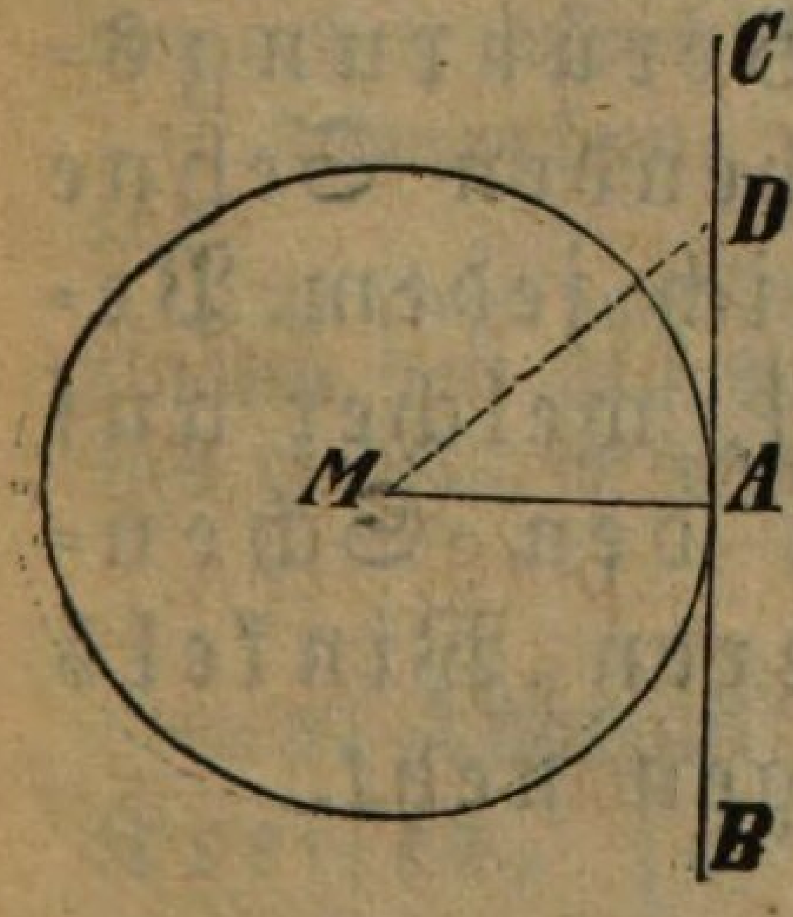
2) Peripheriewinkel, welche auf demselben oder auf gleichen Bogen eines Kreises stehen, sind gleich;

denn es sind die Hälften von demselben oder von gleichen Centriwinkeln.

3) Sind Peripheriewinkel eines Kreises gleich, so stehen sie auf gleichen Bogen;

denn die Bogen gehören zu Centriwinkeln, welche gleich sein müssen, weil ihre Hälften, die Peripheriewinkel, gleich sind.

§. 98.



Lehrsatz: Jede gerade Linie, welche auf einem Halbmesser in dessen Endpunkte lothrecht steht, hat mit dem Kreise nur einen Punkt gemeinsam; alle anderen Punkte liegen außerhalb des Kreises.

Voraussetzung: MA Radius des Kreises und BC $\perp$ MA.

Behauptung: BC hat mit dem Kreise nur den Punkt A gemeinsam.

Beweis: Verbindet man einen beliebigen anderen Punkt der Linie BC, z. B. D mit M, so ist MD > MA (§. 42. b), also liegt D von M weiter entfernt, als der Halbmesser des Kreises beträgt, folglich außerhalb des Kreises.

§. 99.

Jede gerade Linie, welche (unendlich gedacht) mit einem Kreise nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat, heißt eine Tangente oder Berührungslinie des Kreises und der genannte Punkt Berührungspunkt.

§. 100.

a. **Lehrsatz**: Verbindet eine Linie den Berührungspunkt einer Tangente mit dem Mittelpunkte eines Kreises, so steht sie lothrecht auf der Tangente. (Fig. §. 98).

Voraussetzung: BC berührt den um M gezeichneten Kreis in A. — Behauptung: MA ⊥ BC.

Beweis: Wäre MA nicht ⊥ BC, so könnte man von M auf BC eine andere Linie, etwa MD, ⊥ BC ziehen. Dann müßte sein MA > MD (§. 42. b). Dies ist aber unmöglich, weil Punkt *D* außerhalb des Kreises liegt, also MD größer als der Radius MA sein muß. Folglich ist MA ⊥ BC.

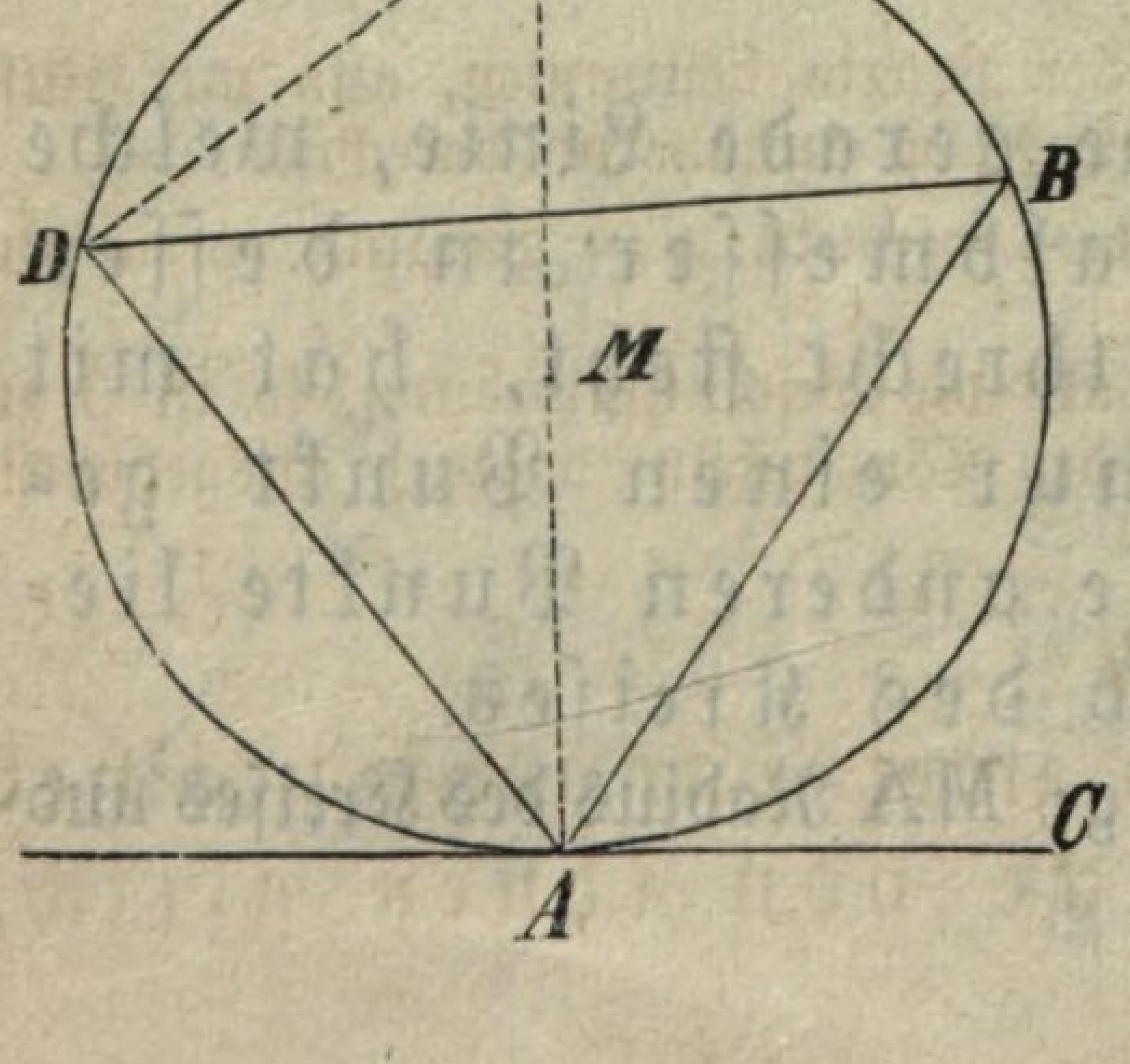
b. **Folgesätze**: 1) Zieht man vom Mittelpunkte eines Kreises ein Loth auf eine Tangente, so trifft dieses den Berührungspunkt der Tangente;

denn: Von M auf BC ist nur ein Loth möglich, also muß das oben bezeichnete Loth mit MA zusammenfallen.

2) Errichtet man auf einer Tangente in ihrem Berührungspunkte ein Loth, so geht dieses genügend verlängert durch den Mittelpunkt des Kreises hindurch;

denn: Dieses Loth muß mit MA zusammenfallen, weil man auf BC in A nur ein Loth errichten kann.

§. 101.



Lehrsatz: Der Winkel, welchen eine Tangente mit einer vom Berührungspunkte ausgehenden Sehne bildet, ist gleich jedem Peripheriewinkel, welcher auf dem zwischen den Schenkeln des ersteren Winkels liegenden Bogen steht.

Voraussetzung: AC berührt den um M gezeichneten Kreis in A.

Behauptung: ∡ BAC = ∡ ADB.

Beweis: 1) Wenn Winkel BAC spitz ist, so ziehe man den Durchmesser AE und verbinde D mit E. Dann ist:

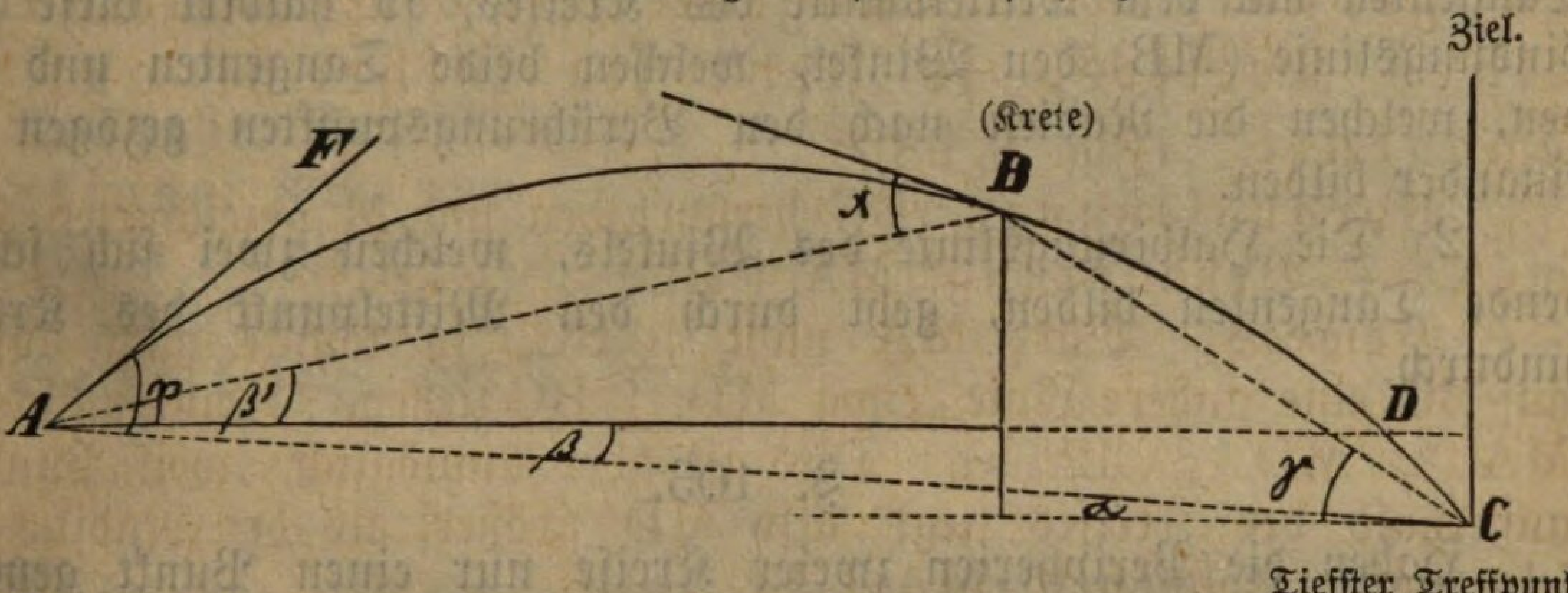
$$\measuredangle\, CAE = \measuredangle\, ADE, \text{ w. beide} = 1\,R\ (\S.\ 100 \text{ u. } \S.\ 97.\ b.\ 1.)$$
$$\measuredangle\, BAE = \measuredangle\, BDE\ (97.\ b.\ 2.)$$
$$\measuredangle\, CAE - \measuredangle\, BAE = \measuredangle\, ADE - \measuredangle\, BDE,$$

oder ∡ BAC = ∡ ADB.

2) Wenn ∡ BAC = 1 R, dann ist AB ein Durchmesser, §. 100. b. 2), also auch ∡ BDA = 1 R (§. 97. b. 1).

3) Ist ∡ BAC stumpf, so gilt der unter 1 geführte Beweis wörtlich, nur muß man addiren statt zu subtrahiren.

Eine Anwendung dieses Lehrsatzes.



Die Flugbahn der Geschosse weicht im Allgemeinen von der Kreislinie sehr ab. Bei flachen Schüssen, (z. B. auch beim indirecten Schuß) liefert aber dennoch die Annahme, die Flugbahn sei ein Kreisbogen, für die Praxis brauchbare Resultate.

A sei die Geschützmündung. Das Geschoß soll unmittelbar über den höchsten Punkt B der deckenden Brustwehr (innere Krete) fortfliegend, den Punkt C treffen; wie groß ist: 1) der Winkel x, welchen eine durch B gelegte Tangente mit AB bildet? (Einfallwinkel). 2) der Richtungswinkel φ, d. h. der Winkel, welchen die Richtung AF der Seelenaxe mit der Wagerechten AD bildet?

Lösung: Nehmen wir an, die Flugbahn ABC sei ein Kreisbogen, der AF in A berührt und daß alle in der Figur vorkommenden Linien und Punkte in der Ebene dieses Kreisbogens liegen, so ist nach dem vorstehenden Lehrsatze:

1) $\measuredangle\, x = \measuredangle\, ACB = \measuredangle\, \gamma - \measuredangle\, \alpha$, und da $\alpha = \beta$ als Wechselwinkel bei ‡, so ist auch $\measuredangle\, x = \measuredangle\, \gamma - \measuredangle\, \beta$.

2) $\measuredangle\, \varphi = \measuredangle\, BAF + \beta^1 = \measuredangle\, ACB + \measuredangle\, \beta^1 = \measuredangle\, \gamma - \measuredangle\, \alpha + \beta^1 = \measuredangle\, \gamma - \measuredangle\, \beta + \measuredangle\, \beta^1$.

Die Winkel γ, β und β^1 lassen sich in der Praxis bestimmen, also mit Hülfe der beiden entwickelten Gesetze auch ∡ x und ∡ φ annähernd berechnen.

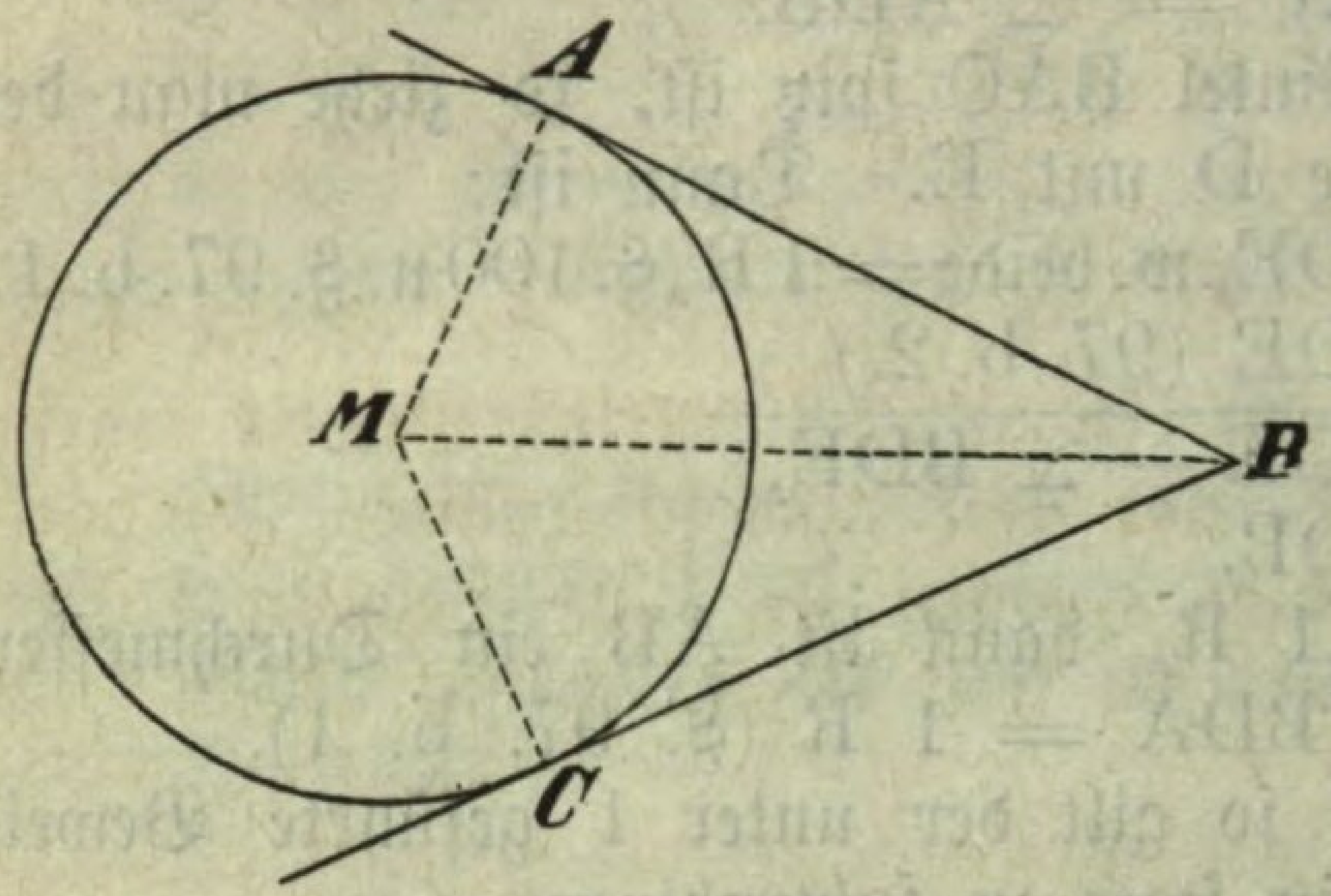
Anmerkung. 1) Sprich α = alpha, β = beta, γ = gamma, φ = phi aus.

2) Liegt der tiefste Treffpunkt C höher als die Geschützmündung, so ist β zu addiren statt zu subtrahiren; dies wird in den Wurftafeln dadurch ausgedrückt, daß es heißt, β sei positiv.

§. 102.

a. **Lehrsatz: Schneiden sich zwei Tangenten eines Kreises, so sind die Stücke von ihnen gleich,**

welche zwischen den Berührungspunkten und dem Durchschnittspunkte liegen.



Voraussetzung: AB und BC sind Tangenten des Kreises um M, A und C die Berührungspunkte.

Behauptung: AB = BC.

Beweis: $\Delta ABM \cong \Delta BCM$ (§. 44 b.), mithin $\overline{AB} = BC$ als gleichliegende Stücke.

b. **Folgesätze**: 1) Verbindet man den Durchschnittspunkt zweier Tangenten mit dem Mittelpunkte des Kreises, so halbirt diese Verbindungslinie (MB) den Winkel, welchen beide Tangenten und auch den, welchen die Radien nach den Berührungspunkten gezogen mit einander bilden.

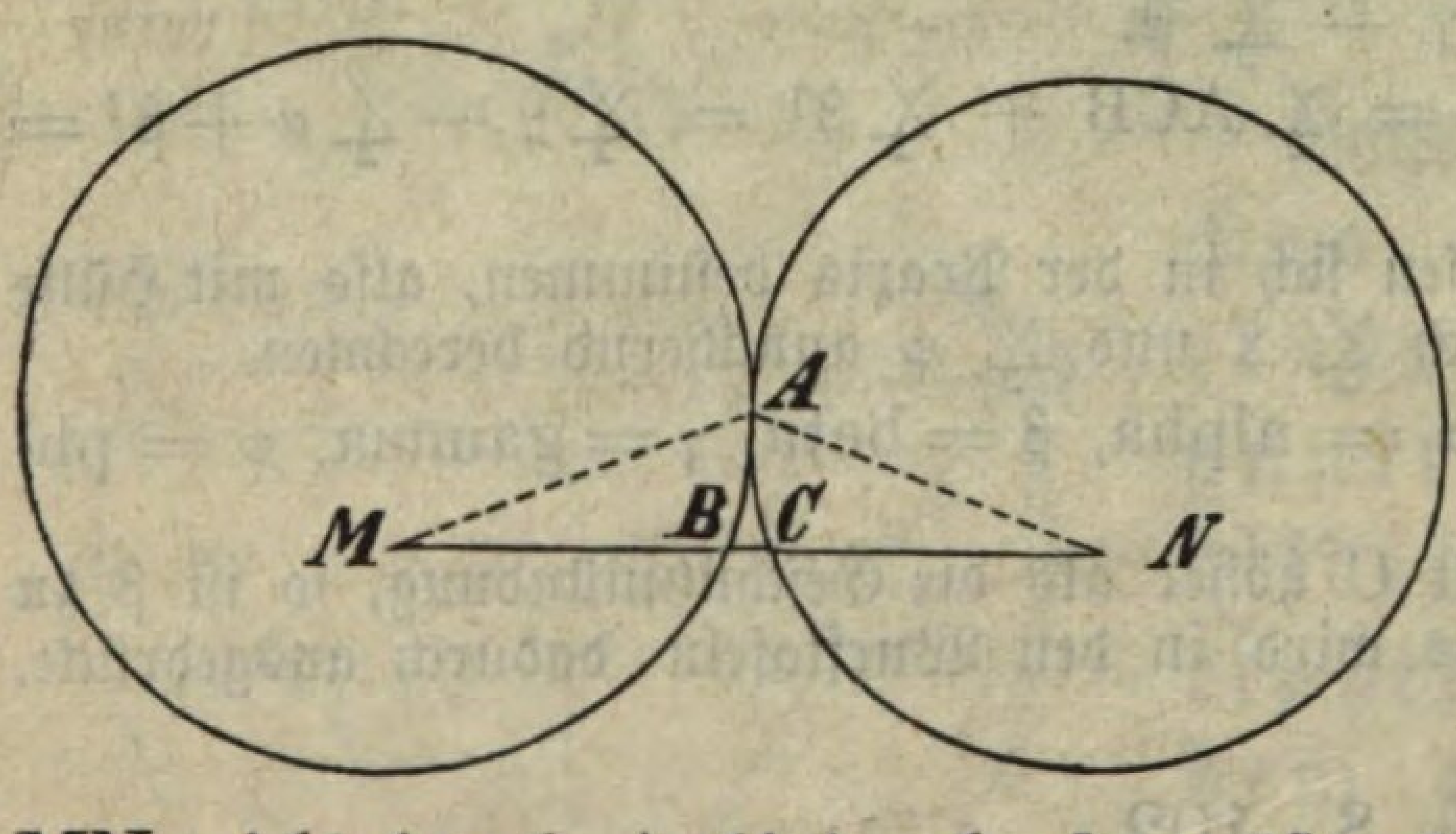
2) Die Halbirungslinie des Winkels, welchen zwei sich schneidende Tangenten bilden, geht durch den Mittelpunkt des Kreises hindurch.

§. 103.

Haben die Peripherien zweier Kreise nur einen Punkt gemeinschaftlich, so nennt man die Kreise Berührungskreise und den gemeinschaftlichen Punkt ihren Berührungspunkt. Liegt dabei ein Kreis innerhalb des anderen, so sagt man, sie berühren sich von innen, liegt jeder der beiden Kreise außerhalb des anderen, so sagt man, sie berühren sich von außen.

§. 104.

Lehrsatz: Berühren sich zwei Kreise, so liegt der Berührungspunkt mit beiden Mittelpunkten in gerader Linie.



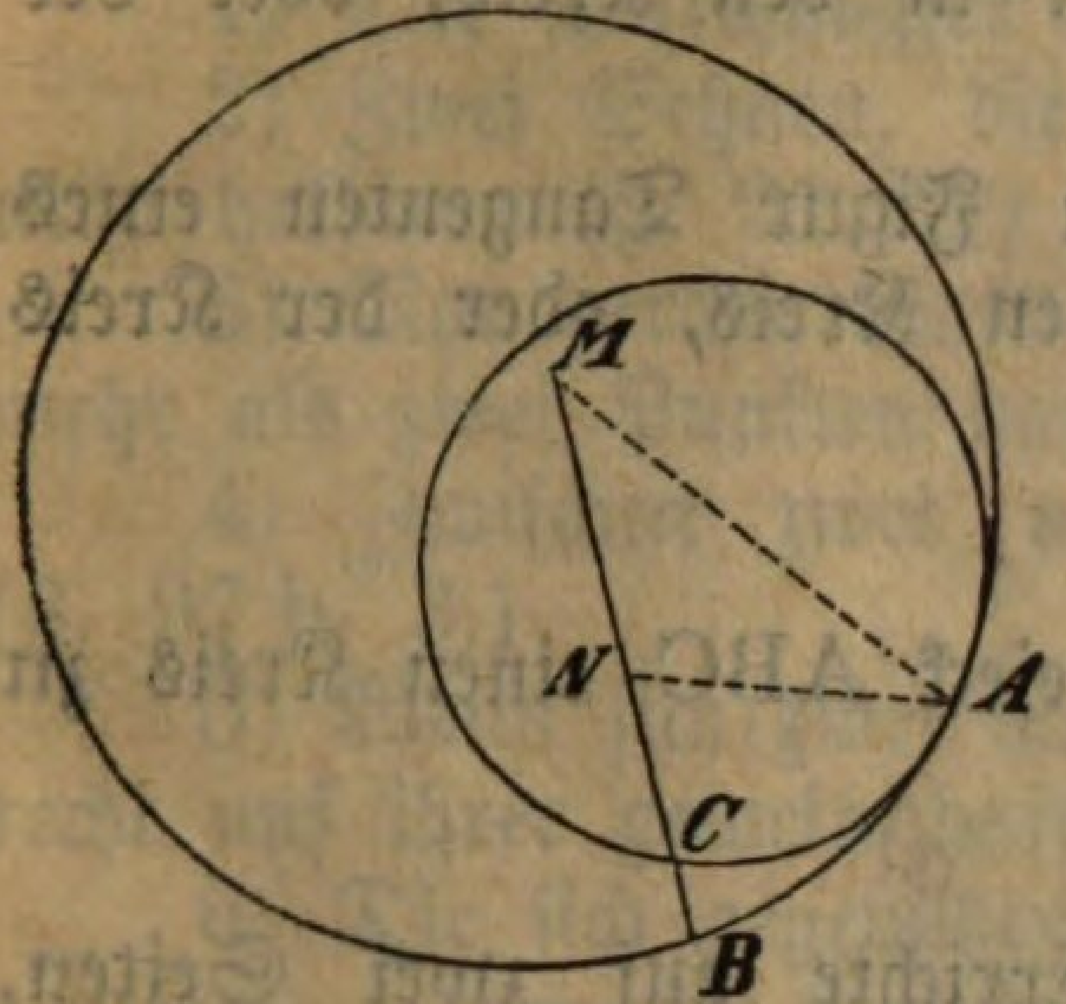
Voraussetzung: Die beiden Kreise um M und N berühren sich in A.

Behauptung: M, A und N liegen in gerader Linie.

Beweis: 1) Die Kreise berühren sich von außen. Ginge die Verbindungslinie MN nicht durch A hindurch, so müßte sie jede der beiden Kreislinien in einem Punkte schneiden. Diese Punkte seien B und C. Alsdann wäre:

$$\begin{array}{rcll} MA &=& MB & \text{als Radien eines Kreises,} \\ NA &=& NC & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \\ \hline MA + NA &=& MB + NC, & \end{array}$$

also im Δ MAN die Summe zweier Seiten noch um BC kleiner als die dritte. Dies ist unmöglich, folglich muß MN durch A hindurchgehen.



2) Berühren sich die Kreise von innen, so gilt der vorige Beweis wörtlich, nur muß man subtrahiren, wo dort addirt worden ist, statt Summe Differenz und statt kleiner größer setzen.

Aufgaben.

§. 105.

Aufgabe: Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden.

Lösung: Ziehe zwei beliebige Sehnen und errichte auf jeder in deren Mitte ein Loth. Der Durchschnittspunkt beider Lothe ist der gesuchte Mittelpunkt.

Beweis folgt aus §. 91. 4.

§. 106.

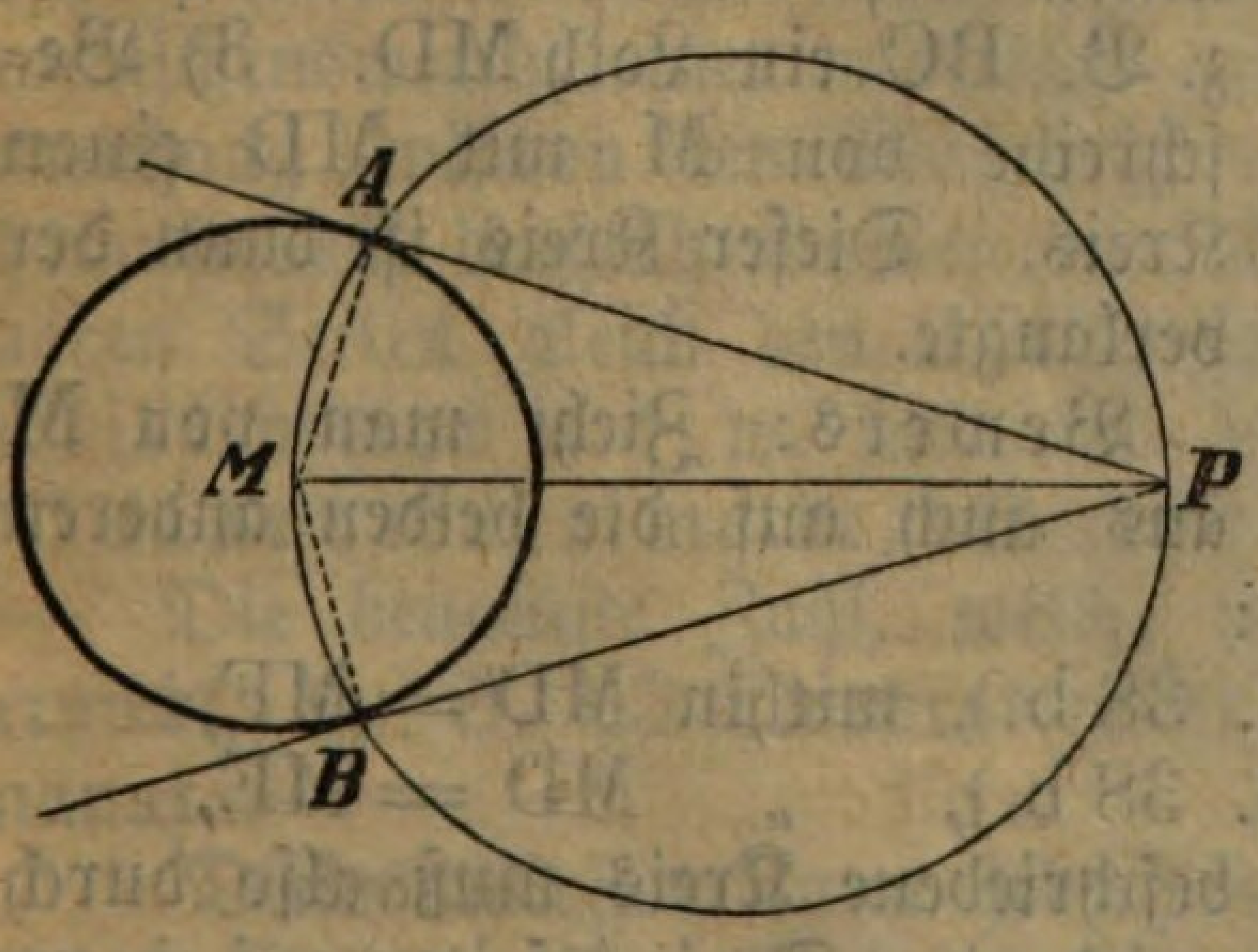
Aufgabe: An einen Kreis durch einen in der Peripherie gegebenen Punkt eine Tangente zu ziehen.

Lösung: Ziehe einen Radius nach dem gegebenen Punkte hin und errichte auf diesen Radius in dessen Endpunkte ein Loth. Dieses Loth ist alsdann die verlangte Tangente.

Beweis folgt aus §. 98.

§. 107.

Aufgabe: Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte P eine Tangente an den Kreis zu ziehen.



Lösung: 1) Verbinde P mit dem Mittelpunkte M. 2) Beschreibe über PM als Durchmesser einen Kreis. 3) Verbinde P mit den Durchschnittspunkten A und B. Dann sind PA und PB Tangenten des Kreises.

Beweis: Wird M mit A und B verbunden, so ist ∡ PAM und auch ∡ PBM = 1 R (§. 97. b. 1), also PA ⊥ MA und PB ⊥ MB und folglich sowohl PA, als auch PB eine Tangente des Kreises. (§. 98.)

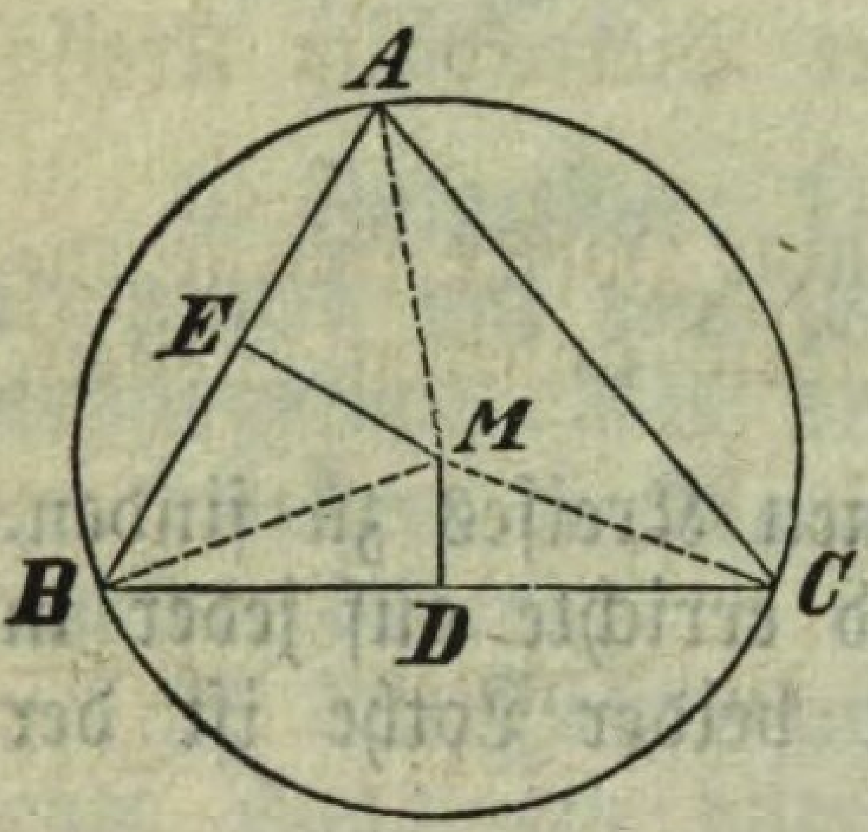
§. 108.

Geht die Peripherie eines Kreises durch alle Endpunkte einer Figur hindurch, so sagt man, die Figur sei in den Kreis, oder der Kreis sei um die Figur beschrieben.

Sind alle Seiten einer geradlinigen Figur Tangenten eines Kreises, so sagt man, die Figur sei um den Kreis, oder der Kreis sei in die Figur beschrieben.

§. 109.

a. Aufgabe: Um ein gegebenes Dreieck ABC einen Kreis zu beschreiben.



Lösung: 1) Errichte auf zwei Seiten, z. B. AB und BC in deren Mitte Lothe. 2) Beschreibe aus dem Durchschnittspunkte M beider Lothe mit MA, oder MB oder MC einen Kreis. Dieser Kreis ist dann der verlangte.

Beweis:

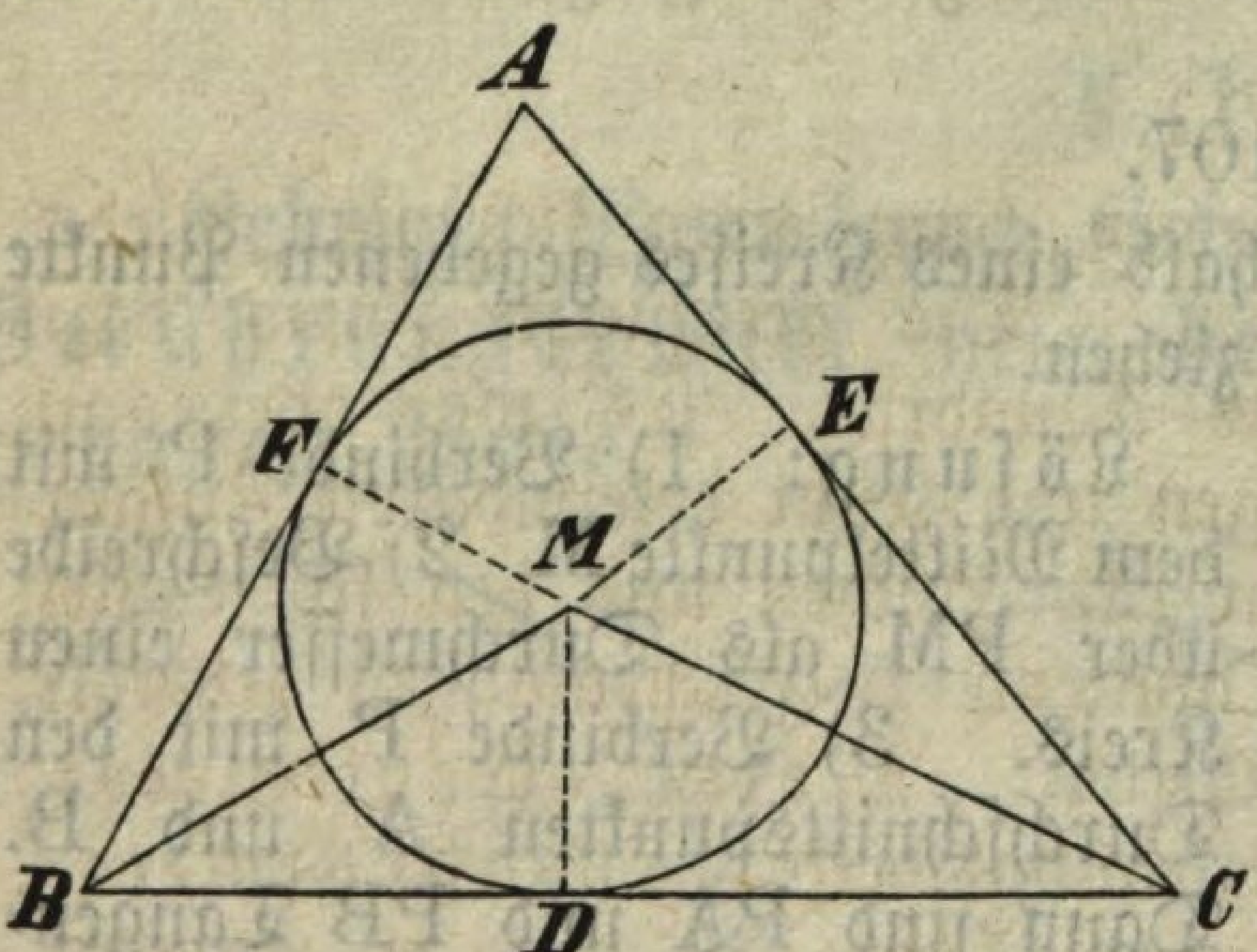
Δ MAE ≌ Δ MBE (§. 37) mithin MA = MB
Δ MBD ≌ Δ MCD (§. 37) mithin MB = MC.

Also MA = MB = MC; folglich muß auch der beschriebene Kreis durch die drei Punkte A, B und C hindurchgehen.

b. Man kann hiernach durch jede 3 Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis beschreiben.

§. 110.

Aufgabe: In ein gegebenes Dreieck ABC einen Kreis zu beschreiben:



Lösung: 1) Halbire zwei Winkel des Dreiecks z. B. ∡ B und ∡ C. 2) Ziehe vom Durchschnittspunkte M beider Halbirungslinien auf eine der Dreieckseiten z. B. BC ein Loth MD. 3) Beschreibe von M mit MD einen Kreis. Dieser Kreis ist dann der verlangte.

Beweis: Zieht man von M aus auch auf die beiden anderen Seiten Lothe ME und MF, so ist:

Δ MBD ≌ Δ MBF (§. 38 b.), mithin MD = MF,
Δ MCD ≌ Δ MCE (§. 38 b.), „ MD = ME,

folglich MD = MF = ME. Der beschriebene Kreis muß also durch D, F und E hindurchgehen, und da jede der Dreiecksseiten auf einem Radius in dessen Endpunkte lothrecht steht, so berührt der Kreis das Dreieck in diesen Punkten.

Uebungen.

a. Lehrsätze:

1) Der Durchmesser ist die größte aller Sehnen eines Kreises.

2) Zwei Sehnen, die nicht Durchmesser sind, können einander nicht halbiren (§. 91. 2.)

3) Eine gerade Linie kann die Peripherie eines Kreises in nicht mehr als zwei Punkten durchschneiden.

4) Zwischen zwei parallelen Sehnen liegen gleiche Bogen. (§. 97 b. 3.)

5) Wenn sich zwei Kreise schneiden, so steht die Centrale lothrecht auf ihrer gemeinschaftlichen Sehne und halbirt dieselbe.

6) Die sich gegenüberstehenden Winkel eines Vierecks im Kreise betragen zusammen 2 rechte. (§. 97 a.)

7) Bei jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier sich gegenüberstehenden Seiten gleich der Summe der beiden anderen Seiten. (§. 102.)

b. Aufgaben:

1) Mit gegebenem Halbmesser einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht.

2) Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Linie liegt und welcher durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht.

3) Ein rechtwinkliges Dreieck aus seiner Hypotenuse und einer Kathete zu zeichnen.

4) An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Siebentes Kapitel.

Von der Inhaltsbestimmung der Figuren.

§. 111.

Zum Messen von Flächenräumen kann man sich nur wieder einer Fläche als Maßeinheit bedienen. Die geeignetste Form dazu ist, wie man leicht übersieht, das Quadrat. Es war aber auch wünschenswerth, einen möglichst engen und leicht erkennbaren Zusammenhang zwischen den Maßeinheiten für Flächen und den für Linien herzustellen, deshalb wurden die Quadrate zu Fächenmaßen gewählt, deren Seiten gleich den Längeneinheiten: Meter, Centimeter, Millimeter u. s. w. sind und beziehungsweise: Quadratmeter, Quadratcentimeter, Quadratmillimeter u. s. w. genannt. — Die benannte Zahl, welche sich durch das Messen einer Figur ergiebt, (z. B. 65 Quadratmeter) wird der Inhalt der Figur genannt. —

Dieses Messen kann jedoch unmittelbar — d. h. durch wirkliches Einlegen von Einheitsquadraten in die zu messende Figur — nur beim rechtwinkeligen Parallelogramm ausgeführt werden, und auch bei diesem würde es sehr mühsam sein und ungenaue Resultate

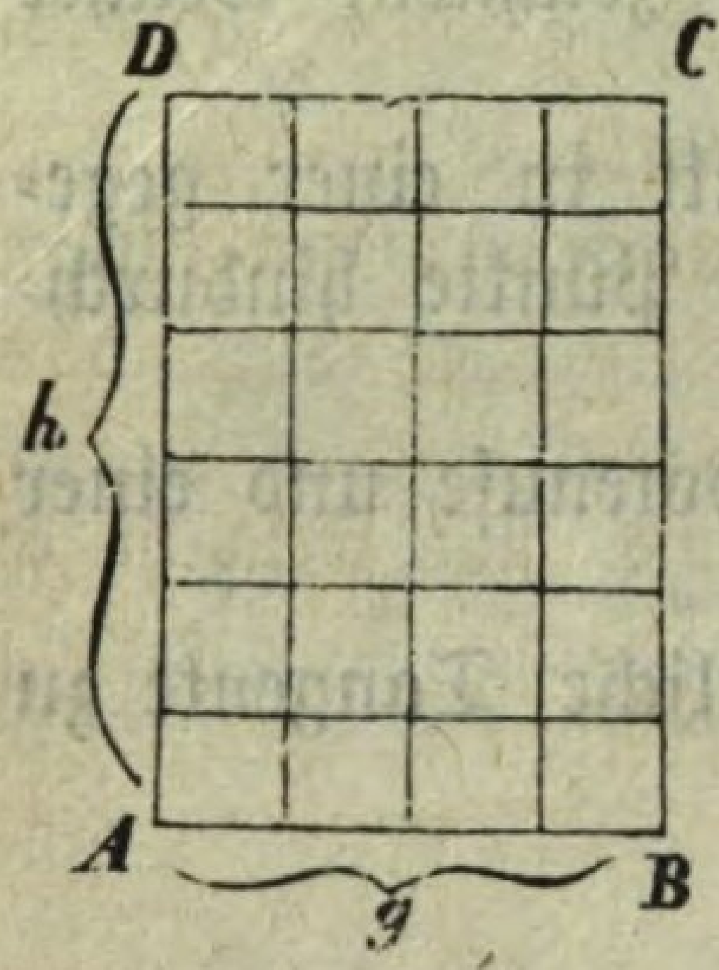
liefern. Aus diesem Grunde wird bei allen Figuren der Inhalt mittelbar dadurch gefunden, daß man bestimmte Linien der Figuren mißt und aus den gefundenen Maßzahlen die Größe des Flächenraumes berechnet. Hierzu dienen folgende Gesetze:

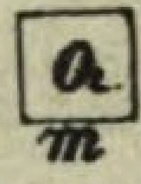
§. 112.

a. **Lehrsatz:** Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben mit einerlei Längenmaß mißt, die gefundenen Maßzahlen multiplicirt und das Product auf das gleichnamige Quadratmaß bezieht.

Z. B. Ist die Grundlinie eines Rechtecks 4 Meter, seine Höhe 6 Meter lang, so enthält es 4 × 6 = 24 Quadratmeter.

Beweis: Es sei ABCD das auszumessende Rechteck und Q das Quadrat über der gewählten Längeneinheit m. Ist nun m in der Grundlinie AB g(4)mal enthalten, so kann man g (4) Einheitsquadrate an der Grundlinie entlang neben einander in das Rechteck hineinlegen. Ist ferner m in der Höhe AD h (6)mal enthalten, so lassen sich h (6) Streifen, von welchen jeder g (4) Quadrate enthält, über einander in das Rechteck hineinlegen. Im Ganzen enthält also das Rechteck g × h (4 × 6) Quadrateinheiten.





b. Gewöhnlich setzt man das Messen der Grundlinie und Höhe stillschweigend voraus und sagt kurz:

Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe (oder Länge und Breite) mit einander multiplicirt.

c. In der Praxis erhält man die Maße für Grundlinie und Höhe nicht selten in der Form von mehrfach benannten Zahlen. Dann müssen beide Maße vor dem Multipliciren auf eine und zwar auf ein und dieselbe Benennung gebracht werden. Z. B. Wie groß ist der Inhalt eines Rechtecks, wenn seine Grundlinie 3 Dekameter, 6 Meter und seine Höhe 2 Dekameter, 5 Meter, 4 Decimeter mißt?

Lösung: Ich verwandele beide Maße in Decimeter. Es sind: 3 Dekameter, 6 Meter = 36 Meter = 360 Decimeter; 2 Dekameter 5 Meter 4 Decimeter = 254 Decimeter, also ist der Inhalt des Rechtecks = 360 × 254 = 91440 □ Decimeter = 9 □ Dekameter 14 □ Meter 40 □ Decimeter.

§. 113.

Aus dem vorigen Lehrsatz folgt:

1) Der Inhalt eines Quadrates wird gefunden, wenn man das Maß einer Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

Denn ist a (5^{m}) das Maß der Grundlinie, d. h. einer beliebigen Seite, so ist auch die zugehörige Höhe = a (5^{m}), also der Inhalt des Quadrats = $a \times a = a^2$ (25 $□^{m}$).

Beispiel: Wie groß ist der Inhalt eines Quadrates, wenn seine Seite $32{,}4^{m}$ lang ist?

Lösung: Der Inhalt dieses Quadrates ist $= 32{,}4^2 = 32{,}4 \times 32{,}4 = 1049{,}76\ □^{m} = 10\ □^{Dm}\ 49\ □^{m}\ 76\ □^{dm}$.

Anmerkung. Hierin liegt der Grund, warum man die zweite Potenz einer Zahl auch ihr Quadrat nennt.

Auch ergiebt sich hieraus, daß, wenn die Eintheilungszahl für Längenmaße 10 ist, die Eintheilungszahl für Flächenmaße 100 sein muß. Z. B. 1 □ Dekameter $= 10 \times 10 = 100$ □ Meter.

2) Der Inhalt eines Parallelogramms wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben mit einander multiplicirt.

Denn jedes Parallelogramm ist dem Rechtecke gleich, mit welchem es gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Beispiel: Die Grundlinie eines Parallelogramms mißt $2^{Km}\ 5{,}2^{m}$ und seine Höhe $2^{Km}\ 3^{Dm}$; wie groß ist sein Flächeninhalt?

Lösung: $3^{Km}\ 5{,}2^{m} = 3005{,}2^{m}$ und $2^{Km}\ 3^{Dm} = 2030^{m}$, also ist des Parallelogramms Flächeninhalt $= 3005{,}2 \times 2030\ □^{m} = 6100556\ □^{m} = 6\ □^{Km}\ 10\ □^{Hm}\ 5\ □^{Dm}\ 56\ □^{m}$.

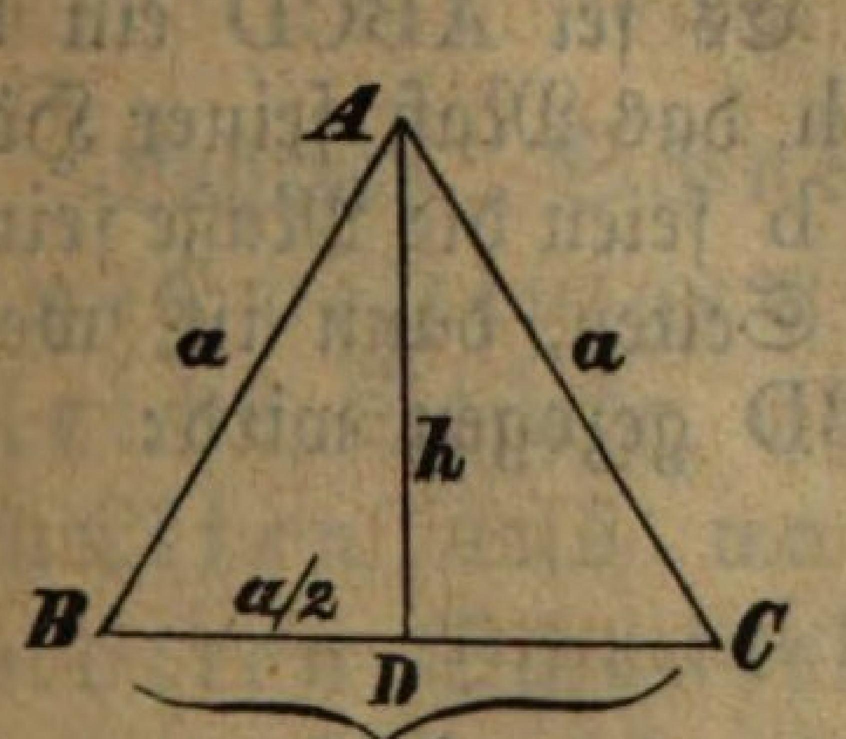
3) Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben mit einander multiplicirt und das erhaltene Product durch 2 dividirt.

Denn jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, mit welchem es gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Beispiel: Den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, wenn die Grundlinie desselben $= 6^{Dm}\ 4^{m}$ und seine Höhe $= 7^{Dm}\ 8^{cm}$ gemessen worden ist.

Lösung: Es sind: $6^{Dm}\ 4^{m} = 64^{m}$ und $7^{Dm}\ 8^{cm} = 70{,}08^{m}$, also der Inhalt des Dreieckes $= \frac{64 \times 70{,}08}{2}\ □^{m} = 32 \times 70{,}08\ □^{m} = 2242{,}56\ □^{m} = 22\ □^{Dm}\ 42\ □^{m}\ 56\ □^{dm}$.

4) Wie groß ist der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks, wenn das Maß seiner Seite = a (z. B. 4^{m}) ist?



Wenn AD die Höhe (h) des Dreiecks ist, so kann h mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes aus Δ ABD berechnet, (es ist: $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, also $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$) also auch der Inhalt des Dreiecks gefunden werden ($\Delta ABC = \frac{a\,h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$).

Beispiel: Wie groß ist der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite $12{,}8^{m}$ lang ist?

1. Lösung: Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist in diesem Dreiecke (s. obige Fig.) $h^2 = 12{,}8^2 - 6{,}4^2 = 163{,}84 - 40{,}96 = 122{,}88$ □ᵐ, also $h = \sqrt{122{,}88} = 11{,}085\ldots$ ᵐ und der Inhalt des $\Delta = \frac{12{,}8 \times 11{,}085\ldots}{2} = 6{,}4 \times 11{,}085 = 70{,}94\ldots$ □ᵐ.

2. Lösung: Kürzer wird die Rechnung, wenn man die oben entwickelte allgemeine Formel $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ anwendet. Es ist dann der Inhalt $J = \frac{12{,}8^2}{4}\sqrt{3} = \frac{163{,}84}{4}\sqrt{3} = 40{,}96 \times 1{,}732 = 70{,}94\ldots$ □ᵐ.

Ist Δ ABC nicht gleichseitig, sondern nur gleichschenklig, so läßt sich sein Inhalt ganz ähnlich berechnen, wenn man die Länge seiner Grundlinie und seines Schenkels kennt.

5) Sind a, b und c die Maße der Seiten eines Dreiecks und bezeichnet s die halbe Summe dieser drei Seiten, so ist des Dreiecks Inhalt

$$J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

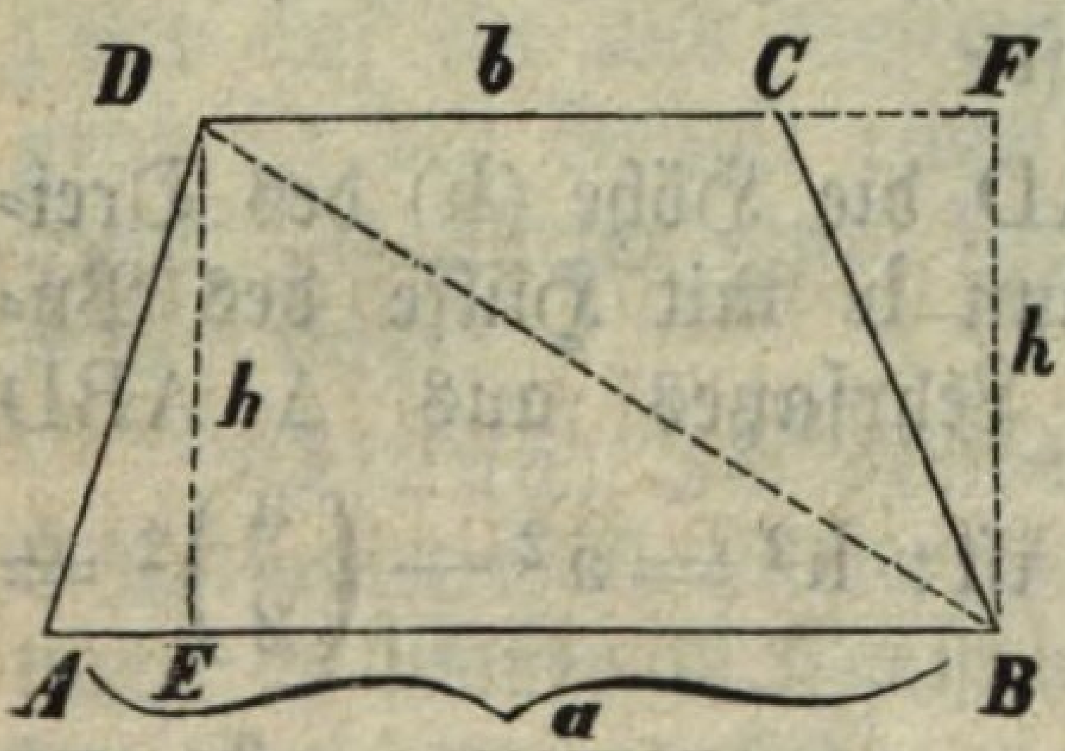
Die Herleitung dieser Formel erfolgt ebenfalls mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes, erfordert jedoch etwas mehr Kenntnisse in der Arithmetik als hier vorausgesetzt werden können.

Beispiel: Die drei Seiten eines Dreiecks sind 3ᵐ, 4,2ᵐ und 6ᵐ lang, wie groß ist sein Flächeninhalt?

Lösung: Es ist: die halbe Summe der drei Seiten $s = \frac{3 + 4{,}2 + 6}{2} = 6{,}6$; $s - a = 6{,}6 - 3 = 3{,}6$; $s - b = 6{,}6 - 4{,}2 = 2{,}4$; $s - c = 6{,}6 - 6 = 0{,}6$; also $J = \sqrt{6{,}6 \times 3{,}6 \times 2{,}4 \times 0{,}6} = \sqrt{34{,}2144} = 5{,}849\ldots$ □ᵐ.

§. 114.

Lehrsatz: Der Inhalt eines Paralleltrapezes wird gefunden, wenn man die Summe seiner beiden parallelen Seiten mit der Höhe desselben multiplicirt und das Product durch 2 dividirt.



Beweis: Es sei ABCD ein beliebiges Trapez, h das Maß seiner Höhe DE und a und b seien die Maße seiner beiden parallelen Seiten, dann ist, wenn die Diagonale BD gezogen wird:

$$\Delta ABD = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$\Delta BCD = \frac{b \cdot h}{2} \quad (BF = h \text{ u. §. 66 a.})$$

$$\Delta ABD + \Delta BCD = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{ah + bh}{2}$$

$$\text{oder } ABCD = \left(\frac{a+b}{2}\right) h.$$

Beispiel: Wie groß ist der Querdurchschnitt eines Dammes von 0,6 ^{m} Kronenbreite und 1,8 ^{m} Höhe, wenn derselbe auf einer Seite ganze, auf der anderen doppelte Anlage hat?

Lösung: Der zu berechnende Querdurchschnitt hat die Form eines Paralleltrapezes, dessen kleinere parallele Seite die Kronenbreite und dessen Höhe die Höhe des Dammes ist. Die größere parallele Seite ist gleich der Kronenbreite plus der Breite der ganzen Anlage (gleich der Höhe des Dammes), plus der Breite der doppelten Anlage (gleich der doppelten Höhe des Dammes), also $= 0{,}6^m + 1{,}8^m + 2 \times 1{,}8^m = 6^m$. Es ist folglich der Inhalt des Trapezes $= \frac{(0{,}6 + 6)\ 1{,}8}{2} = 5{,}94\ \square^m$.

§. 115.

1) Um den Inhalt einer beliebigen anderen geradlinig begrenzten Figur zu finden, zerlegt man dieselbe durch Diagonalen oder andere zweckmäßig gewählte Hülfslinien in Dreiecke, Parallelogramme oder Trapeze, berechnet dann den Inhalt jeder dieser Figuren einzeln und addirt zuletzt die gefundenen Werthe.

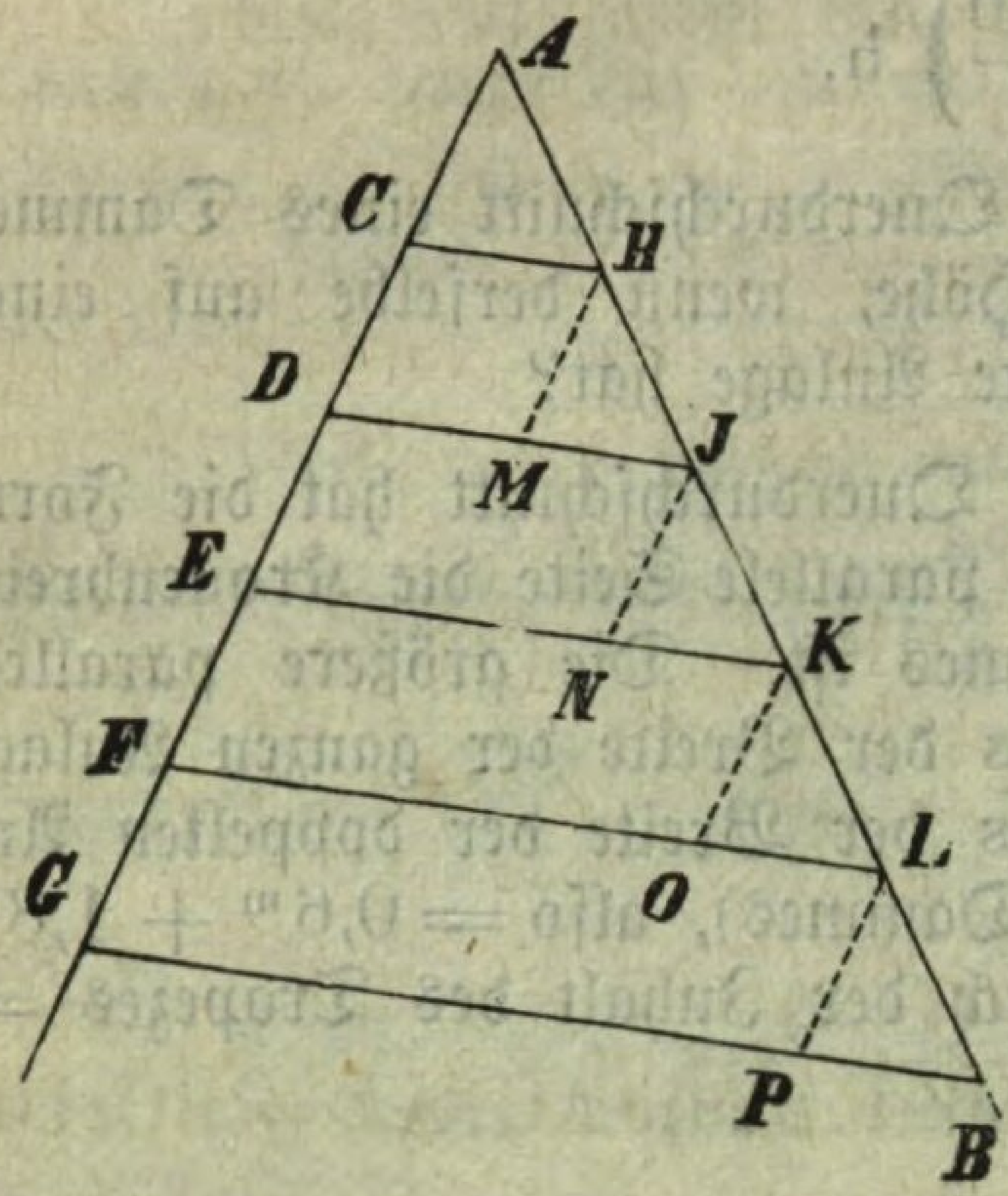
2) Der Inhalt krummlinig begrenzter Figuren kann nur annähernd gefunden werden. Man zerlegt zu diesem Zwecke die krummen Begrenzungslinien in solche Theile, welche annähernd als gerade betrachtet werden können und berechnet nun die krummlinig begrenzte Figur wie ein Vielseit.

Achtes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 116.

Lehrsatz: Schneidet man auf einem der Schenkel eines beliebigen Winkels vom Scheitelpunkte aus gleiche Stücke ab und zieht von den Abschnittspunkten aus unter sich parallele Linien bis zum anderen Schenkel hin, so werden auch auf diesem unter sich gleiche Stücke abgeschnitten und die Parallelen wachsen in der Ordnung der natürlichen Zahlen, d. h. von der Spitze an gezählt, ist die zweite Parallele zweimal, die dritte dreimal u. s. w. so groß als die erste Parallele.



Voraussetzung: 1) $AC = CD = DE = EF = FG$ u. s. w.
2) $CH \parallel DJ \parallel EK \parallel FL \parallel GB$ u. s. w.

Behauptung: 1) $AH = HJ = JK = KL = LB$ u. s. w.
2) $DJ = 2CH$, $EK = 3CH$, $FL = 4CH$, $GB = 5CH$ u. s. w.

Beweis: Der Beweis für den ersten Theil der Behauptung kann wörtlich aus dem Beweise für §. 73 entnommen werden.

Dort ist auch gezeigt, daß: $\Delta ACH \cong \Delta HMJ \cong \Delta JNK$ u. s. w.

Nun ist ferner:

$DM = CH$ (§. 66 a.)
$MJ = CH$ (gleichl. Stücke).
$DM + MJ = 2CH$, oder
$DJ = 2CH$.

$EN = DJ = 2CH$ (§. 66 a.)
$NK = CH$ (gleichl. Stücke).
$EN + NK = 3CH$, oder:
$EK = 3CH$ u. s. w.

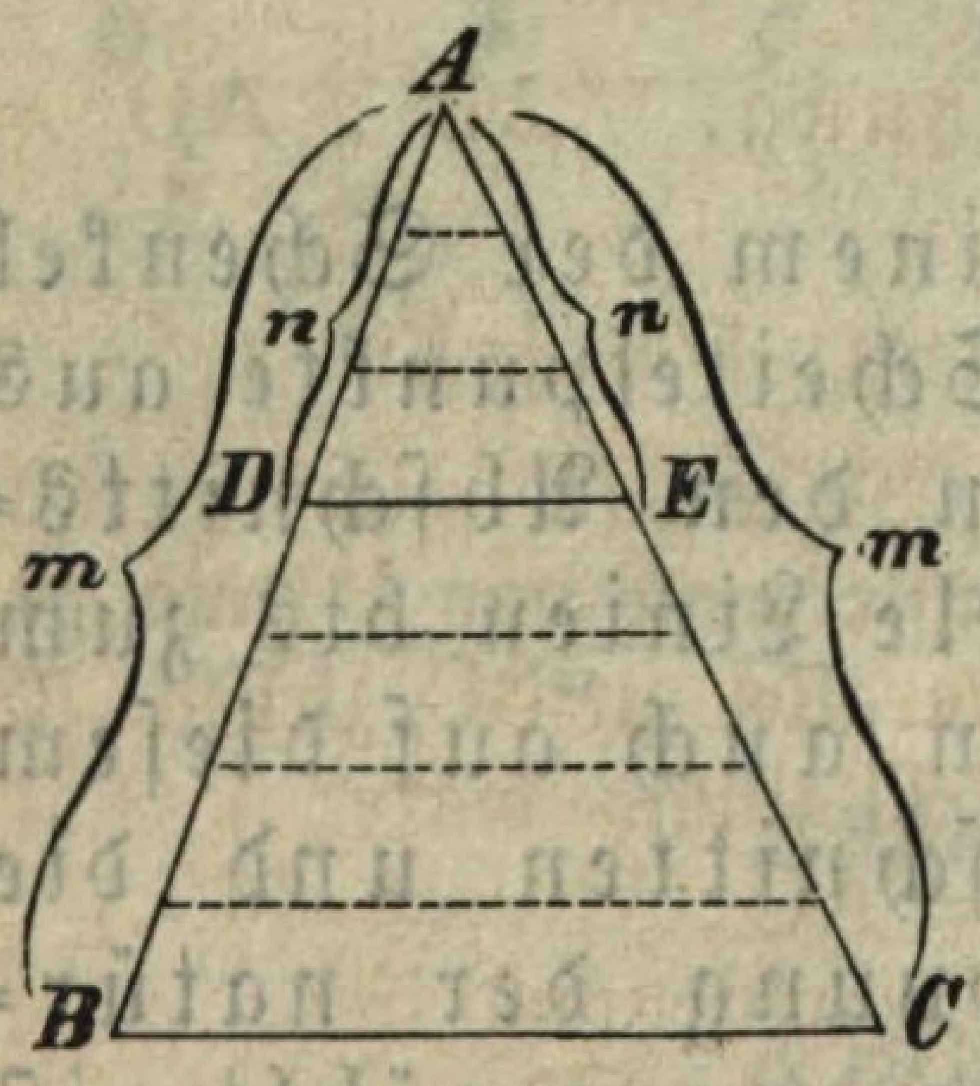
Erklärung des Transversalmaßstabes.

§. 117.

a. **Lehrsatz:** Zieht man in einem Dreiecke zwischen zwei Seiten eine Linie parallel zur dritten Seite, so verhält sich:

1) jede geschnittene Seite zu ihrem oberen Abschnitte, wie die andere geschnittene Seite zu ihrem oberen Abschnitte;

2) jede der geschnittenen Seiten zu ihrem oberen Abschnitte wie die parallele Seite zur parallelen Linie.



Voraussetzung: $DE \parallel BC$.

Behauptung:

1) $AB : AD = AC : AE$.

2) $\begin{cases} AB : AD = BC : DE. \\ AC : AE = BC : DE. \end{cases}$

(oder mit anderen Worten: Ist z. B. $AD = {}^3/_7$ von AB, so muß auch $AE = {}^3/_7$ von AC sein u. s. w.)

Beweis: 1) Man denke sich AB in eine solche Anzahl gleicher Theile getheilt, daß ein Theilpunkt in D fällt und aus den Theilpunkten Parallelen zu BC gezogen. Angenommen, es müsse zu diesem Zwecke AB in m (z. B. in 7) gleiche Theile getheilt werden und zwischen A und D lägen n (3) dieser Theile, dann wird

durch die gezogenen Parallelen auch AC in m (7) gleiche Theile getheilt und AE enthält n (3) dieser Theile (§. 116). Es verhält sich also:

1) AB : AD = m : n (7 : 3)
und ebenso AC : AE = m : n (7 : 3)
folglich AB : AD = AC : AE.

2) Nach unserer Annahme ist ferner: DE die nte (3te) und BC die mte (7te) Parallele, also DE = n (3) mal und BC m (7) mal so groß, als die erste Parallele, also:

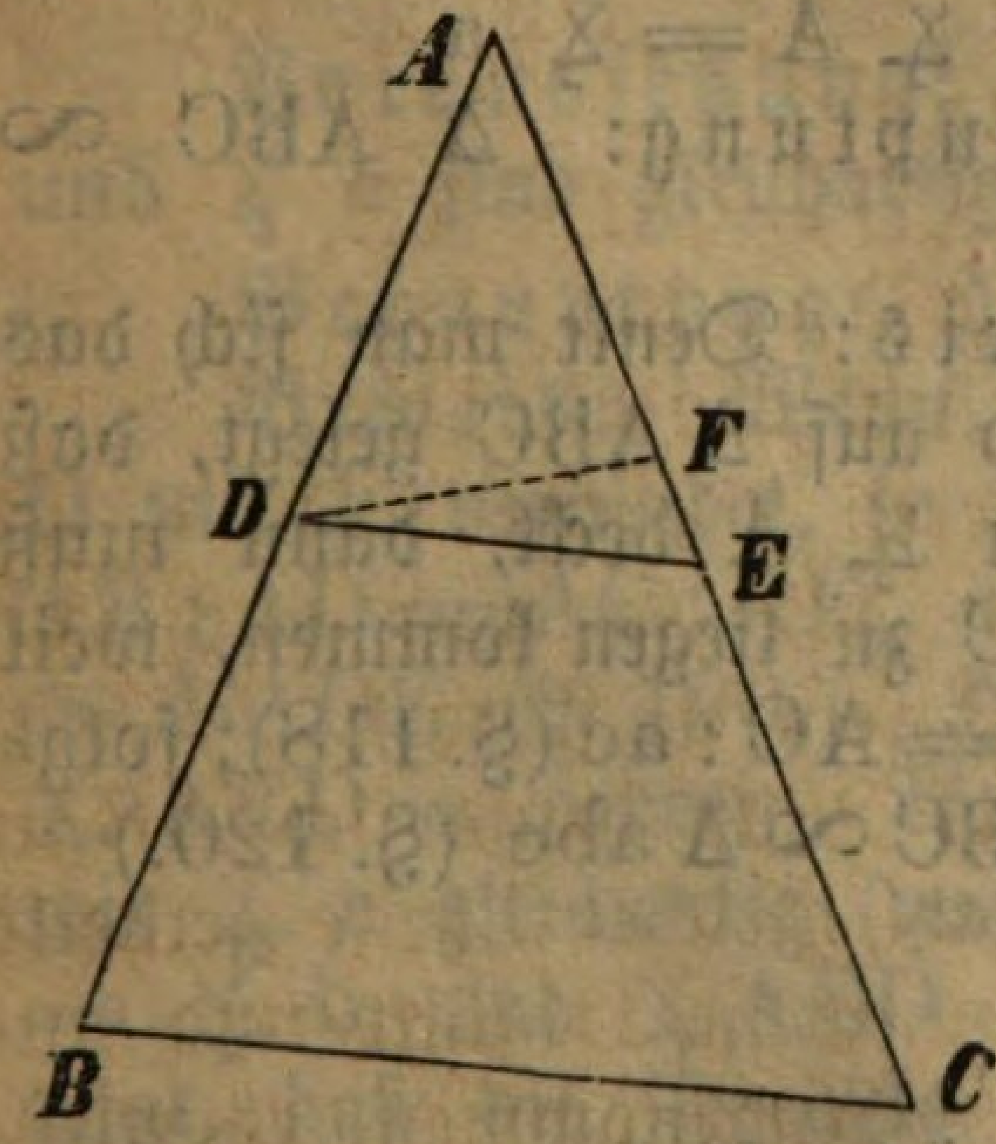
BC : DE = m : n (7 : 3)
Nun ist auch: AB : AD = m : n (7 : 3)
und ebenso: AC : AE = m : n (7 : 3)
folglich AB : AD = BC : DE u. ebenso AC : AE = BC : DE.

b. Wie lauten die erwiesenen Proportionen, wenn man: 1) die mittleren Glieder vertauscht? 2) beide Verhältnisse umkehrt?

Anmerkung. Auf die Frage: Ist es auch immer möglich AB in eine solche Anzahl gleicher Theile zu theilen, daß ein Theilpunkt in D fällt? muß streng genommen mit Nein geantwortet werden, denn es giebt, wie sich erweisen läßt, wirklich Linien, welche kein gemeinschaftliches Maß haben und solche Linien können AB und AD sein. Denkt man sich aber in einem solchen Falle AB zuerst in 2, dann in 3, hierauf in 4 u. s. w. gleiche Theile getheilt, so wird die Entfernung des Punktes D von dem zunächst liegenden Theilpunkte immer kleiner und kleiner werden und zuletzt, wenn man sich AB in unendlich viele gleiche Theile getheilt denkt, als verschwindend angesehen werden können.

§. 118.

Lehrsatz: Ist zwischen zwei Seiten eines Dreiecks eine Linie so gezogen, daß sich die eine der geschnittenen Seiten zu ihrem oberen Abschnitte verhält, wie die andere geschnittene Seite zu ihrem oberen Abschnitte, so ist die gezogene Linie parallel zur dritten Seite.



Voraussetzung: AB : AD = AC : AE.

Behauptung: DE ⫲ BC.

Beweis: Wäre DE nicht parallel zu BC, so könnte man von D aus eine andere Linie parallel zu BC ziehen. Es sei dies DF. Alsdann wäre:
AB : AD = AC : AF. (§. 117.)
Nach der Voraussetzung ist:
AB : AD = AC : AE.

Folglich müßte sein: AF = AE. Dies ist nicht möglich, mithin muß: DE ⫲ BC sein.

§. 119.

Figuren heißen ähnlich, wenn die Winkel der einen Figur einzeln und in derselben Reihenfolge den Winkeln der anderen Figur gleich sind und wenn die gleichliegenden Seiten gleiches Verhältniß zu einander haben. Das Zeichen für ähnlich ist: ∾. In ähnlichen Dreiecken liegen gleichen Winkeln gleichliegende Seiten und umgekehrt gegenüber.

Aehnlich bedeutet so viel wie gleich in der Form. (§. 36.) Wodurch wird aber eine gleiche Form bedingt? Wenn heißen zwei Menschen ähnlich? Wenn wird ein Bild dem abgebildeten Gegenstande ähnlich genannt? Aehnlich in diesem Sinne aufgefaßt ist ein unbestimmter Begriff; denn man spricht von geringerer oder größerer Aehnlichkeit. Die Geometrie muß daher die Merkmale für eine vollkommen gleiche Form der Figuren bestimmt angeben. Dies ist in obiger Erklärung geschehen. — Congruente Figuren sind auch ähnlich, nicht aber umgekehrt, ähnliche Figuren auch congruent.

§. 120.

Lehrsatz: Zieht man in einem Dreiecke zwischen zwei Seiten eine Linie parallel zur dritten Seite, so ist das abgeschnittene Dreieck dem Stammdreiecke ähnlich. (Fig. §. 118.)

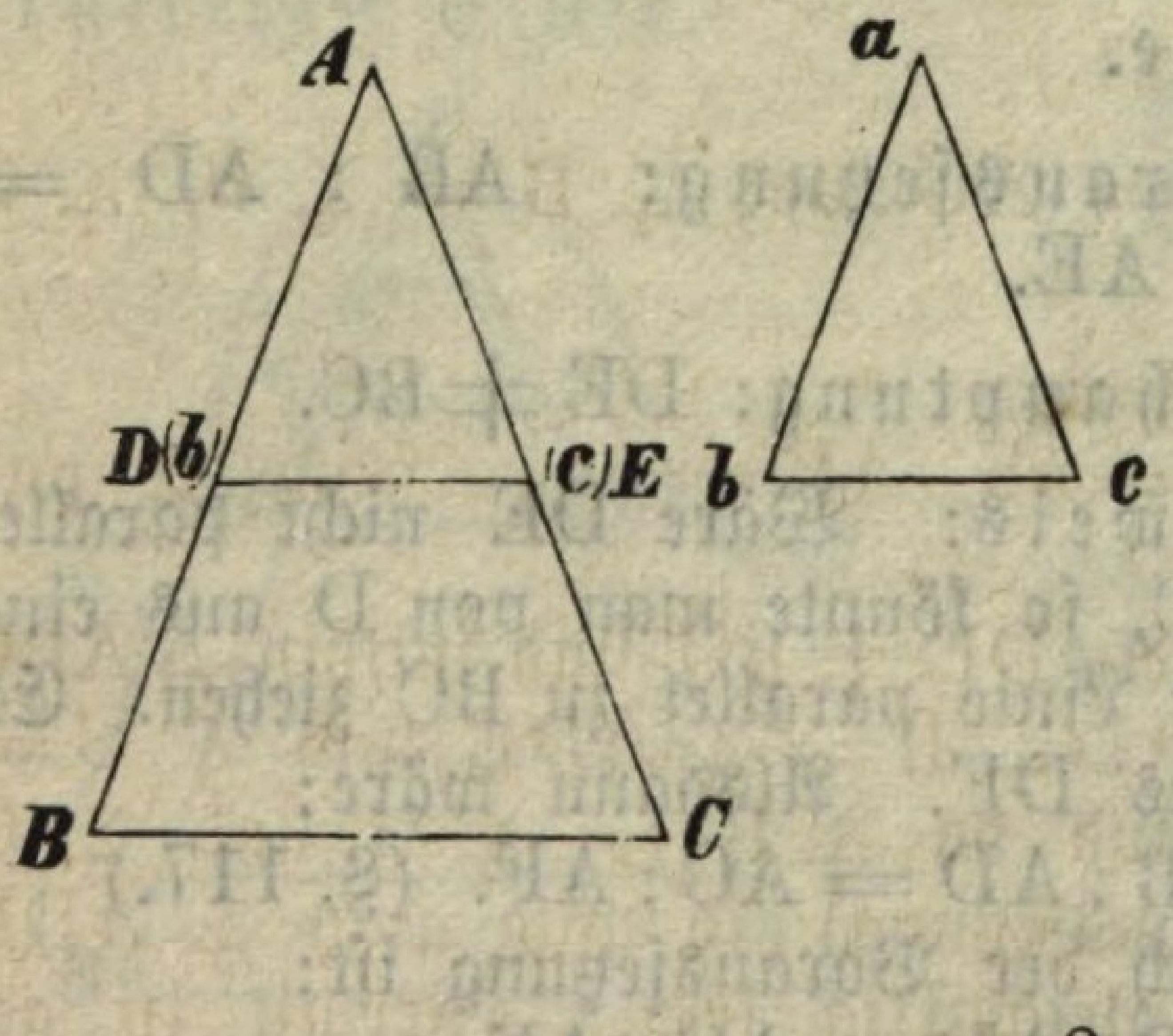
Voraussetzung: DE ∦ BC.

Behauptung: Δ ABC ∾ Δ ADE.

Beweis: Es ist: ∡ A = ∡ A, ∡ B = ∡ ADE (§. 26. 1), ∡ C = ∡ AED (§. 26. 1) und auch (§. 117) AB : AD = BC : DE = AC : AE; folglich nach dem Begriff der Aehnlichkeit (§. 119) Δ ABC ∾ Δ ADE.

§. 121.

Lehrsatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenpaare gleiches Verhältniß haben und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich sind.



Voraussetzung: AB : ab = AC : ac, ∡ A = ∡ a.

Behauptung: Δ ABC ∾ Δ abc.

Beweis: Denkt man sich das Δ abc so auf Δ ABC gelegt, daß ∡ a den ∡ A deckt, dann muß bc ∦ BC zu liegen kommen, weil AB : ab = AC : ac (§. 118); folglich Δ ABC ∾ Δ abc (§. 120.)

§. 122.

Lehrsatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. (Fig. §. 121.)

Voraussetzung: ∡ A = ∡ a, ∡ B = ∡ b.

Behauptung: Δ ABC ∾ Δ abc.

Beweis: Denkt man sich das Δ abc so auf Δ ABC gelegt, daß ∡ a den ∡ A deckt, dann werden die gleichen Winkel b und B correspondirende Winkel, mithin muß bc ╫ BC zu liegen kommen und folglich Δ ABC ∾ Δ abc sein.

§. 123.

Lehrsatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn je zwei gleichliegende Seiten gleiches Verhältniß zu einander haben. (Fig. §. 121.)

Voraussetzung: AB : ab = AC : ac = BC : bc.

Behauptung: Δ ABC ∾ Δ abc.

Beweis: Schneidet man AD = ab und AE = ac ab, und verbindet D mit E, so ist: AB : AD = AC : AE, also (§. 118) DE ╫ BC und mithin Δ ABC ∾ Δ ADE (§. 120.)

Hieraus folgt: AB : AD = BC : DE
und da nach der Voraussetzung: AB : ab = BC : bc
so muß DE = bc sein.

Hiermit ist gezeigt, daß die Dreiecke ADE und abc in ihren drei Seiten übereinstimmen, also congruent sein müssen. Da nun, wie schon erwiesen, Δ ABC ∾ Δ ADE ist, so muß auch Δ ABC ∾ Δ abc sein.

§. 124.

Lehrsatz: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seitenpaare gleiches Verhältniß haben, die Gegenwinkel des einen Seitenpaares gleich und die Gegenwinkel des anderen Seitenpaares gleichartig sind. (Fig. §. 121.)

Voraussetzung: AB : ab = AC : ac; ∡ B = ∡ b, ∡ C und ∡ c sind gleichartig.

Behauptung: Δ ABC ∾ Δ abc.

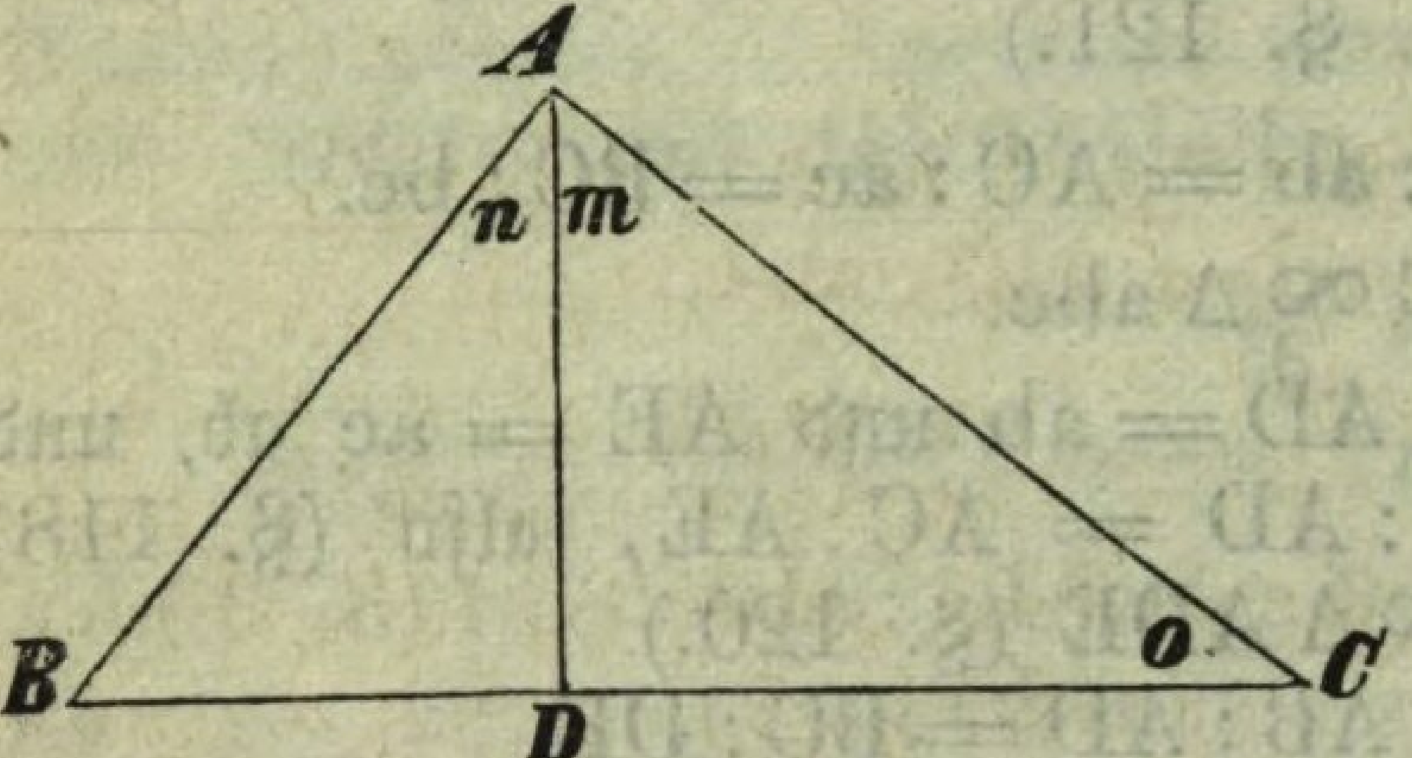
Beweis: Wenn man AD = ab, AE = ac abschneidet und D mit E verbindet, so ist:
AB : AD = AC : AE, also (§. 118) DE ╫ BC und mithin Δ ABC ∾ Δ ADE (§. 120.) Hieraus folgt: ∡ B = ∡ ADE und ∡ C = ∡ AED a. corresp. W. bei ╫ und da ∡ B = ∡ b und ∡ C mit ∡ c gleichartig (nach der Voraussetzung), so muß auch ∡ ADE = ∡ b und ∡ AED mit ∡ c gleichartig sein. Hiermit ist gezeigt, daß die Dreiecke ADE und abc (nach §. 44 a.) congruent sind. Da nun, wie schon bewiesen, Δ ABC ∾ Δ ADE ist, so muß auch Δ ABC ∾ Δ abc sein.

§. 125.

a. **Lehrsatz:** Zieht man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse, so ist:

1) jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem der Kathete angrenzenden Abschnitte derselben;

2) das Loth die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.



Voraussetzung: ∡ BAC = 1 R, AD ⊥ BC.

Behauptung:
1) BC : AB = AB : BD.
BC : AC = AC : CD.
2) BD : AD = AD : CD.

Beweis: 1) Beim Vergleichen der Dreiecke ABC und ABD findet man: ∡ BAC = ∡ ADB a. R und ∡ B = ∡ B, folglich Δ ABC ∾ Δ ABD (§. 122) und mithin als gleichliegende Stücke: BC : AB = AB : BD. Ebenso läßt sich die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ACD nachweisen und daraus ableiten: BC : AC = AC : CD.

2) Vergleicht man nun die Dreiecke ABD und ACD, so ergiebt sich: ∡ ADB = ∡ ADC a. R und ∡ n = ∡ o, weil beide durch ∡ m zu 1 R ergänzt werden, folglich Δ ABD ∾ Δ ACD und mithin BD : AD = AD : CD.

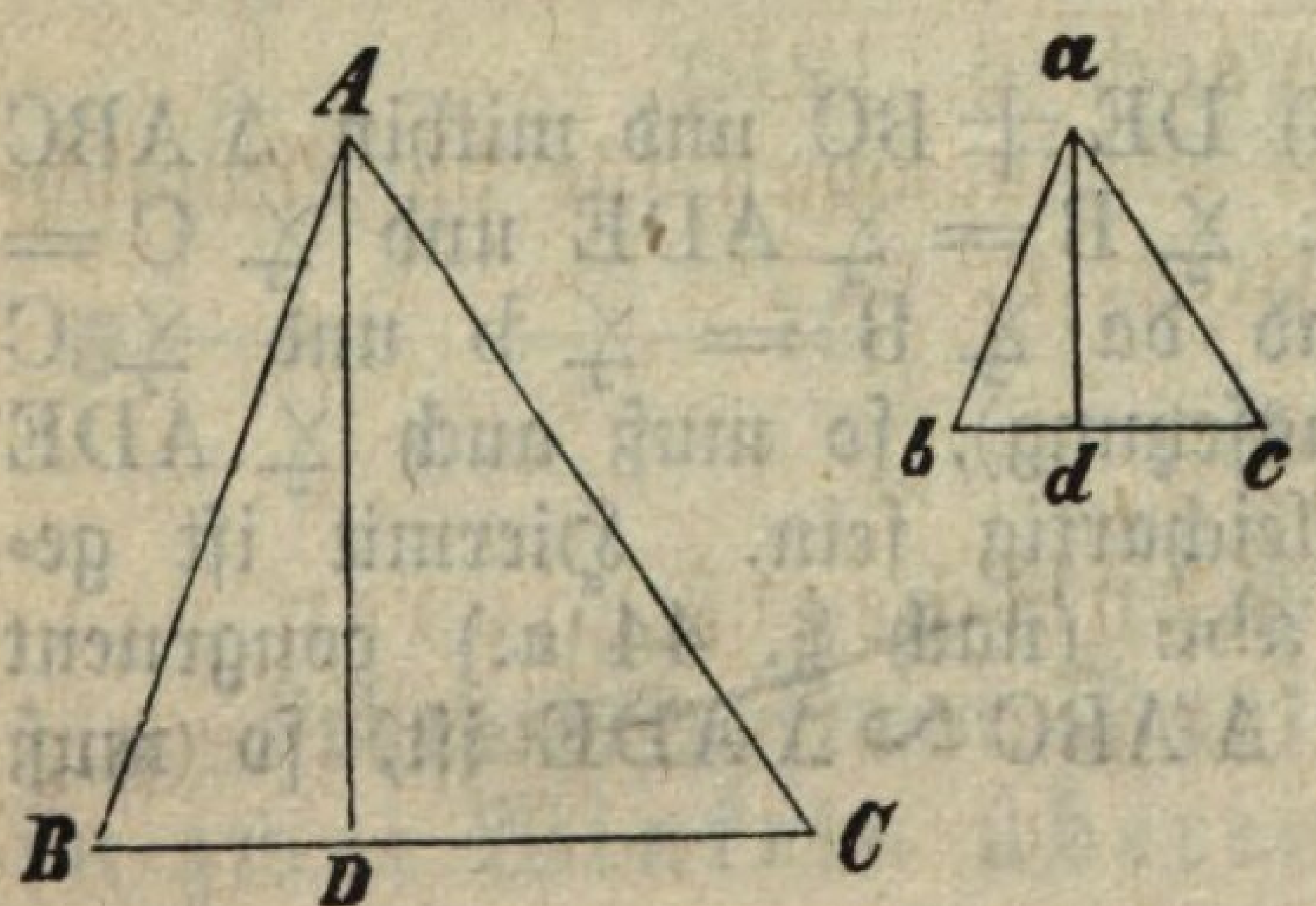
b. Aus diesem Satze läßt sich der Pythagoräische Lehrsatz auf einfache Weise ableiten:

Es ist: BC : AB = AB : BD; also: $AB^2 = BC \times BD$
BC : AC = AC : CD; also: $AC^2 = BC \times CD$

folglich $AB^2 + AC^2 = BC \times BD + BC \times CD$
$= BC\,(BD + CD)$
$= BC^2$.

§. 126.

Lehrsatz: In ähnlichen Dreiecken verhalten sich gleichliegende Höhen wie gleichliegende Seiten.



Voraussetzung: Δ ABC ∾ Δ abc; AD ⊥ BC, ad ⊥ bc.

Behauptung: AD : ad = AB : ab = AC : ac = BC : bc.

Beweis: Beim Vergleichen der Dreiecke ABD und abd findet man: ∡ B = ∡ b als gleich-

liegende Stücke und $\measuredangle ADB = \measuredangle adb$ a. R., folglich $\Delta ABD \sim \Delta adb$ und mithin $AD : ad = AB : ab$.

§. 127.

Lehrsatz: Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten. (Fig. §. 126.)

Voraussetzung: $\Delta ABC \sim \Delta abc$; $AD \perp BC$, $ad \perp bc$.

Behauptung: $\Delta ABC : \Delta abc = AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2$ u. s. w.

Beweis: Es ist $BC : bc = AB : ab$ als gleichliegende Stücke ähnlicher Dreiecke

und $AD : ad = AB : ab$ (n. §. 126)

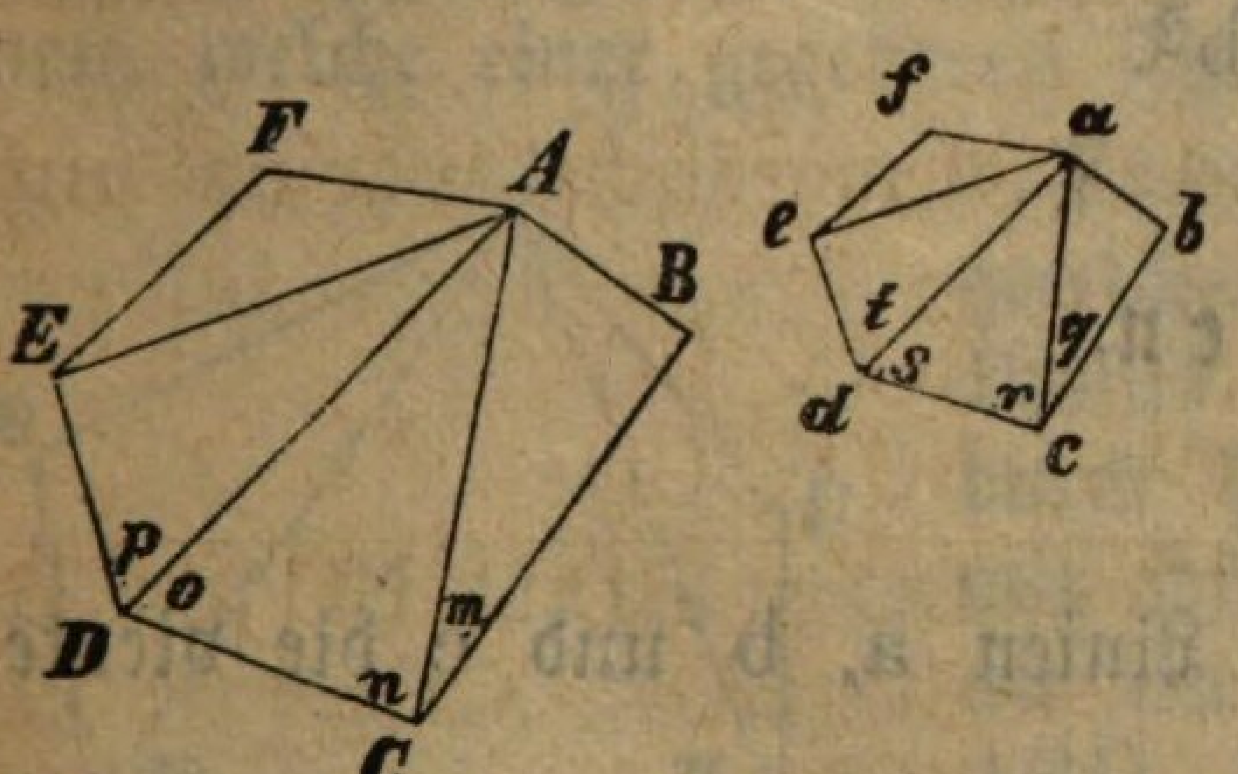
folglich $BC \times AD : bc \times ad = AB^2 : ab^2$

also auch: $\frac{BC \times AD}{2} : \frac{bc \times ad}{2} = AB^2 : ab^2$

oder: $\Delta ABC : \Delta abc = AB^2 : ab^2$ (§. 113. 3.).

§. 128.

Lehrsatz: Zieht man in zwei ähnlichen Vielecken von zwei gleichliegenden Winkelspitzen aus sämmtliche Diagonalen, so ist jedes Dreieck der einen Figur dem gleichliegenden Dreiecke in der anderen Figur ähnlich.



Voraussetzung: $ABCDEF \sim abcdef$.

Behauptung: $\Delta ABC \sim \Delta abc$, $\Delta ACD \sim \Delta acd$ u. s. w.

Beweis: 1) Es ist $AB : ab = BC : bc$ und $\measuredangle B = \measuredangle b$, mithin $\Delta ABC \sim \Delta abc$ (§. 121).

2) Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt:

$AC : ac = AB : ab$, also auch $AC : ac = CD : cd$

$\measuredangle m = \measuredangle q$ mithin da $\measuredangle C = \measuredangle c$, $\measuredangle C - m = \measuredangle c - q$ oder $\measuredangle n = \measuredangle r$

folglich $\Delta ACD \sim \Delta acd$ (§. 121.)

Hieraus werden nun wieder die Bedingungen für die Aehnlichkeit der beiden nächsten Dreiecke abgeleitet u. s. f.

§. 129.

Lehrsatz: Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie die gleichliegenden Seiten. (Fig. §. 128.)

Voraussetzung: ABCDEF $\sim$ abcdef.

Behauptung: AB + BC + CD + DE + EF + FA : ab + bc + cd + de + ef + fa = AB : ab.

Beweis: Aus der Aehnlichkeit der Figuren folgt: AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FA : fa und hieraus: AB + BC + CD + DE + EF + FA : ab + bc + cd + de + ef + fa = AB : ab.

§. 130.

Lehrsatz: Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten. (Fig. §. 128.)

Voraussetzung: ABCDEF $\sim$ abcdef.

Behauptung: ABCDEF : abcdef = $AB^2 : ab^2$.

Beweis: Zieht man aus zwei gleichliegenden Winkelspitzen, z. B. A und a sämmtliche Diagonalen, so sind (n. §. 128) die gleichliegenden Dreiecke ähnlich, also (§. 127).

Δ ABC : Δ abc = $AB^2 : ab^2$.

Δ ACD : Δ acd = $CD^2 : cd^2 = AB^2 : ab^2$.

Δ ADE : Δ ade = $DE^2 : de^2 = AB^2 : ab^2$.

Δ AEF : Δ aef = $EF^2 : ef^2 = AB^2 : ab^2$.

Δ ABC : Δ abc = Δ ACD : Δ acd = Δ ADE : Δ ade = Δ AEF : Δ aef = $AB^2 : ab^2$.

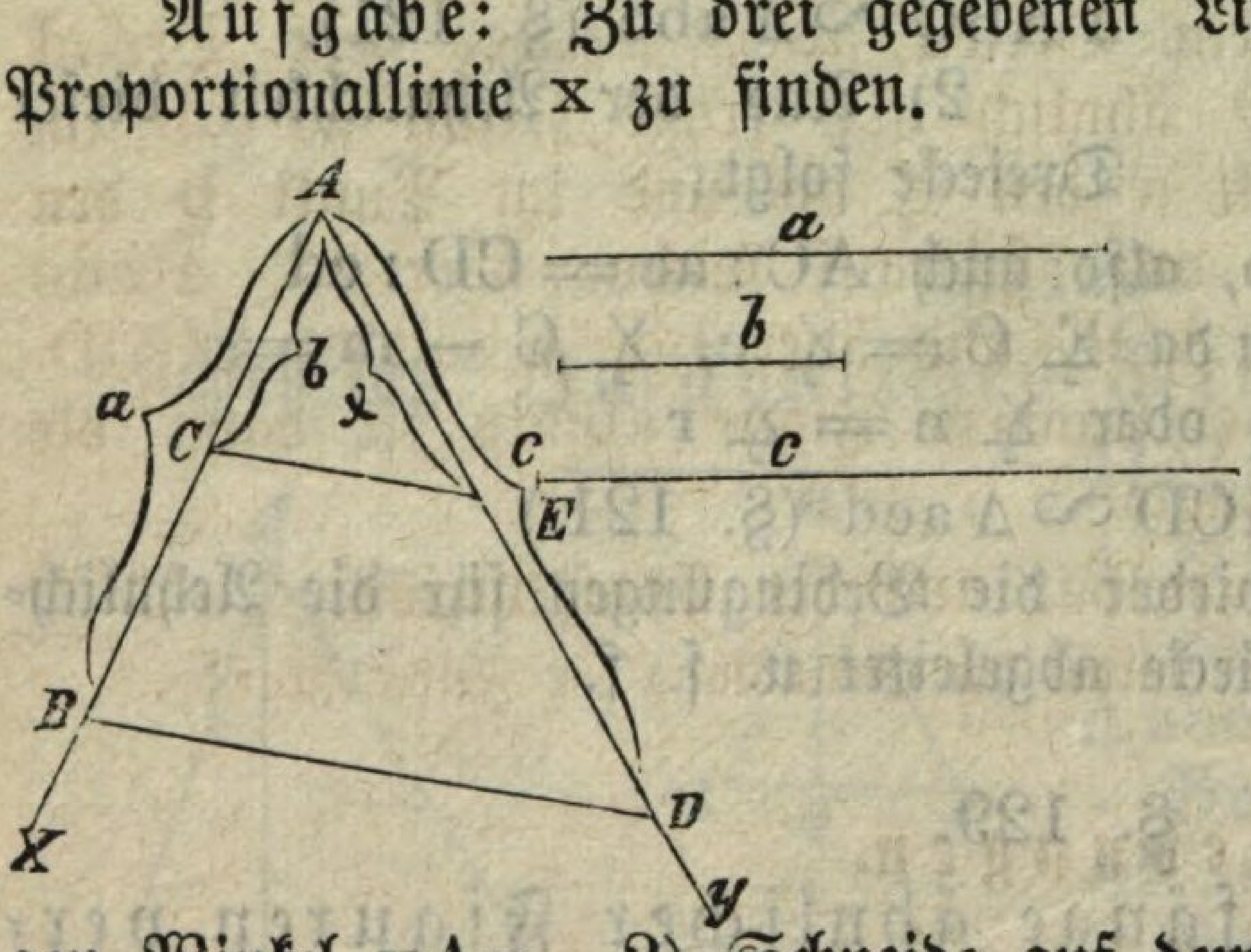
mithin: Δ ABC + Δ ACD + Δ ADE + ... : Δ abc + Δ acd + Δ ade + ... = $AB^2 : ab^2$

oder: ABCDEF : abcdef = $AB^2 : ab^2$.

Aufgaben.

§. 131.

Aufgabe: Zu drei gegebenen Linien a, b und c die vierte Proportionallinie x zu finden.



Lösung: Aus jeder der Proportionen des §. 117, so wie aus jeder Versetzung derselben, kann eine Lösung dieser Aufgabe abgeleitet werden. Nimmt man die erste dieser Proportionen zu Hülfe, so ergiebt sich folgende Construction.

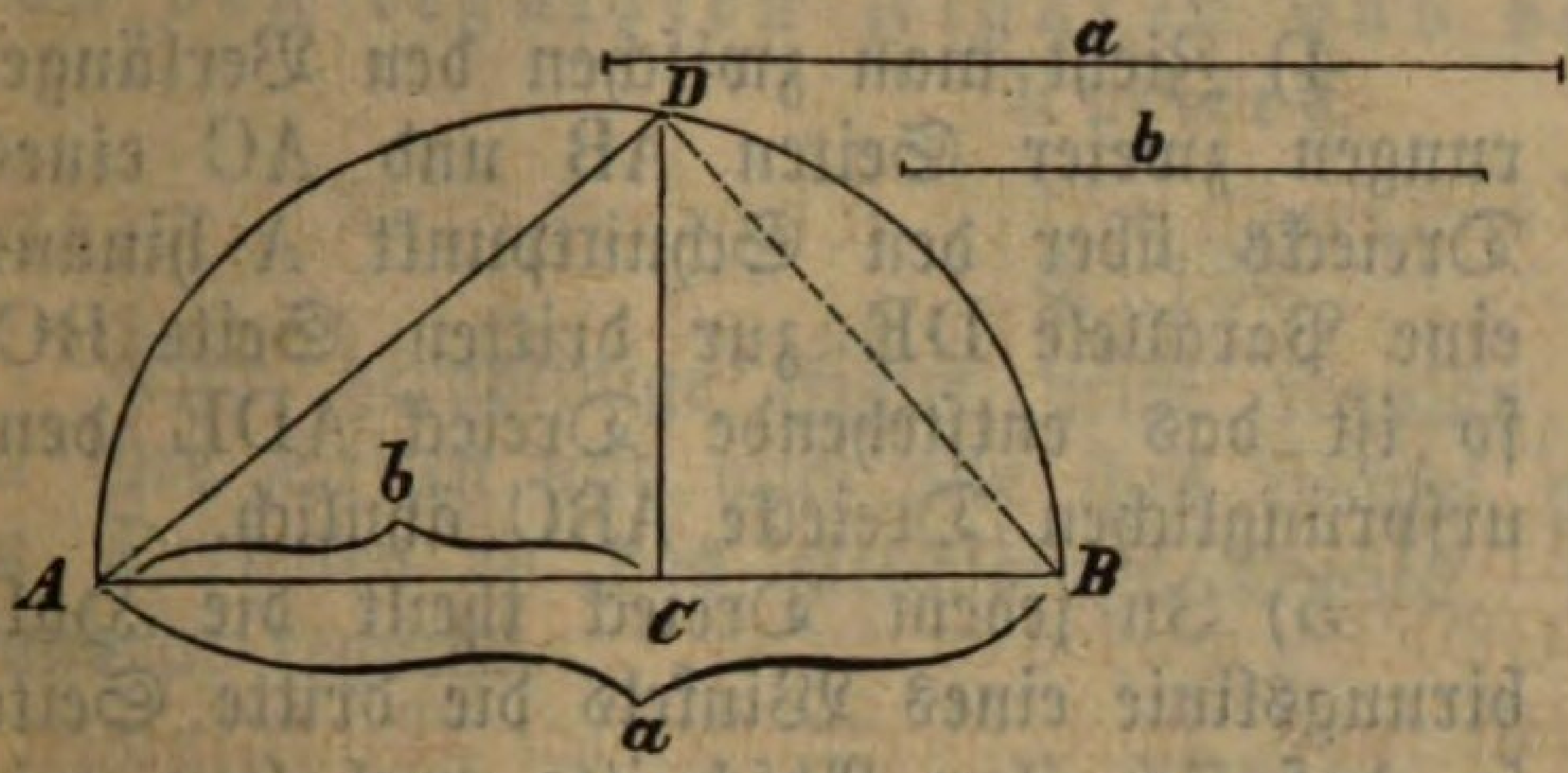
1) Zeichne einen beliebigen Winkel xAy. 2) Schneide auf dem einen Schenkel von A aus, eine Linie AB = a, eine andere AC = b und dann auf dem anderen Schenkel AD = c ab. 3) Verbinde B mit D und ziehe von

C aus eine Parallele zu BD; es sei dies CE. Dann ist AE die verlangte Linie.

Beweis folgt unmittelbar aus §. 117.

§. 132.

Aufgabe: Zu zwei gegebenen Linien a und b die mittlere Proportionale x zu finden.



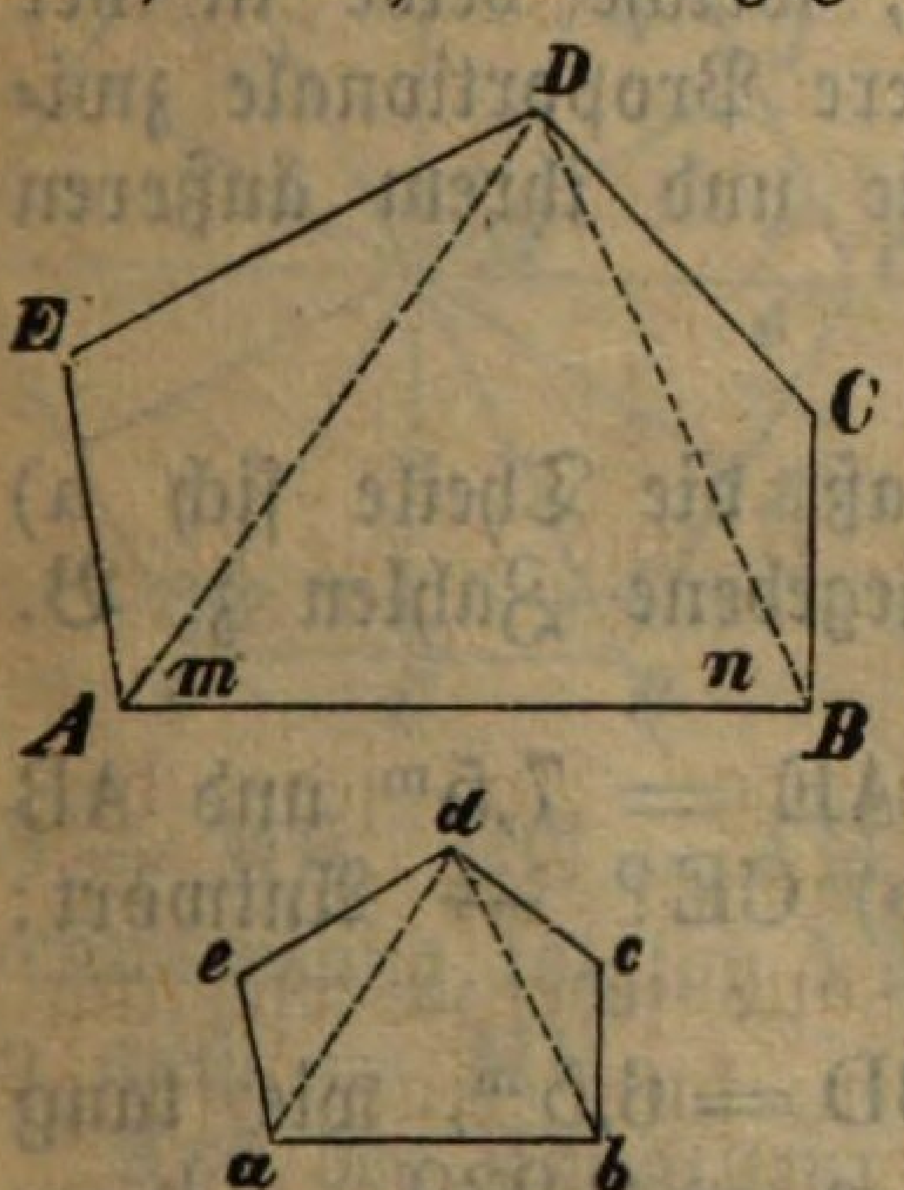
Lösung: Aus jeder der beiden Proportionen des §. 125 a. kann eine Lösung dieser Aufgabe abgeleitet werden. Nimmt man die erste dieser Proportionen zu Hülfe, so ergiebt sich folgende Construction:

1) Zeichne eine Linie AB = a und schneide auf derselben AC = b ab. 2) Beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis. 3) Errichte auf AB im Punkte C ein Loth. 4) Verbinde den Durchschnittspunkt D mit A. Dann ist AD die verlangte Linie x.

Beweis: Verbindet man B mit D, so ist $\measuredangle$ ADB = 1 R. (§. 97 b. 1). Da nun auch CD $\perp$ AB gezogen ist, so verhält sich (n. §. 125) AB : AD = AD : AC, oder a : AD = AD : b.

§. 133.

Aufgabe: Ueber einer gegebenen Linie ab eine Figur zu zeichnen, welche einer gegebenen Figur ähnlich ist.



Lösung: Soll z. B. über ab eine Figur gezeichnet werden, welche dem Fünfeck ABCDE ähnlich ist, so zerlege das gegebene Fünfeck durch Diagonalen in Dreiecke. Dann zeichne mit Hülfe eines der 4 Aehnlichkeitssätze über ab ein Dreieck abd, welches dem Dreieck ABD ähnlich ist; trage z. B. an ab im Punkt a den $\measuredangle$ m und im Punkt b den $\measuredangle$ n an. Hierauf zeichne über ad, Δ ade $\sim$ Δ ADE und über bd, Δ bcd $\sim$ Δ BCD. Die entstandene Figur abcde ist dann die verlangte.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

Anmerkung: Diese Aufgabe bildet die Grundlage der Feldmeßkunde.

Uebungen.

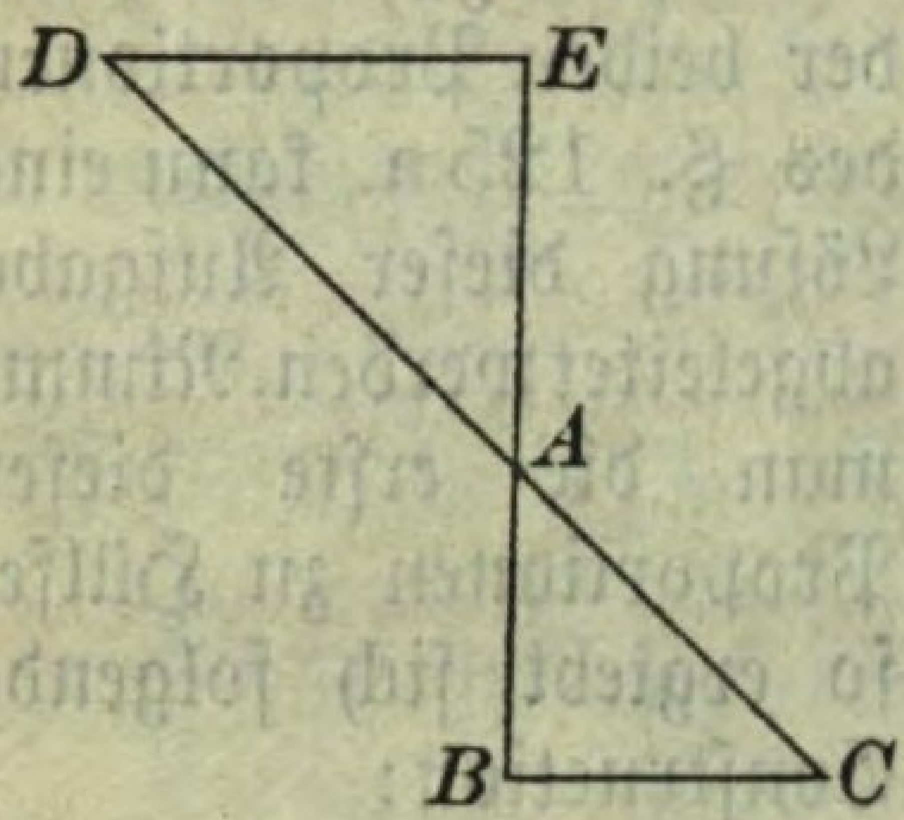
a. Lehrsätze.

1) Erweiterung des §. 117. Zieht man in einem Dreiecke eine Linie parallel zu einer Seite, so verhalten sich,

a) die geschnittenen Seiten wie ihre unteren Abschnitte,
b) die oberen Abschnitte wie die unteren.

2) Zieht man zwischen den Schenkeln eines Winkels mehrere parallele Linien, so verhalten sich die entstehenden Abschnitte des einen Schenkels wie die des anderen.

3) Zieht man zwischen zwei Seiten eines Dreiecks eine Linie so, daß sich die oberen Abschnitte wie die unteren verhalten, so ist die gezogene Linie parallel der dritten Seite.



4) Zieht man zwischen den Verlängerungen zweier Seiten AB und AC eines Dreiecks über den Schnittpunkt A hinaus eine Parallele DE zur dritten Seite BC, so ist das entstehende Dreieck ADE dem ursprünglichen Dreiecke ABC ähnlich.

5) In jedem Dreieck theilt die Halbirungslinie eines Winkels die dritte Seite so, daß sich ihre Abschnitte verhalten wie die Seiten, welche den halbirten Winkel einschließen.

6) Beweise, daß auch die Umkehrung des vorstehenden Lehrsatzes richtig ist.

7) Liegen die gleichliegenden Seiten zweier ähnlichen Dreiecke parallel zu einander, so schneiden sich die Verbindungslinien der gleichliegenden Ecken in demselben Punkte. (Indirect.)

8) Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so verhalten sich die Abschnitte der einen Sehne umgekehrt wie die Abschnitte der anderen.

9) Zieht man von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine den Kreis schneidende Linie, welche beide in der Kreislinie endigen, so ist diese Tangente mittlere Proportionale zwischen der ganzen den Kreis schneidenden Linie und ihrem äußeren Abschnitte.

b. **Aufgaben.**

1) Eine gegebene Linie so zu theilen, daß die Theile sich a) wie gegebene Linien m, n und p, b) wie gegebene Zahlen z. B. 3, 4, 5 verhalten.

2) Wenn in Fig. §. 117 AD = 6^m, AE = $7{,}5^m$ und AB = $12{,}8^m$ ist, wie groß ist dann a) AC, b) CE? — Antwort: a = 16^m, b = $8{,}5^m$.

3) In Fig. §. 125 sei BC = $15{,}2^m$, BD = $6{,}5^m$, wie lang ist: a) AB, b) AC, c) AD? — Antwort: a = 9,939... b = 11,50. c = 7,52.

4) In Fig. a. 4. sei AB = $3{,}86^m$, BC = 34^{mm}, AE = 1200^m, wie groß ist DE? — Antwort: $10{,}57^m$.

Anmerkung: Auf dieser Aufgabe beruht bei den Geschützen das Corrigiren der Seitenrichtung mittelst der Seitenverschiebung oder der Richtscala.

5) Ein Thurm wirft einen Schatten von $63{,}4^m$; wie hoch ist dieser Thurm, wenn zu gleicher Zeit ein $1{,}5^m$ hoher, lothrecht aufgestellter Stab einen Schatten von $0{,}9^m$ erzeugt? Antwort: 105,66.

6) Auf einem Plane, der in dem Maßstabe von 1:25000 angefertigt ist, mißt man die Entfernung zweier Dörfer = 9,5 Centimeter, wie groß ist die wirkliche Entfernung? Antwort: 2375^m.

Neuntes Kapitel.

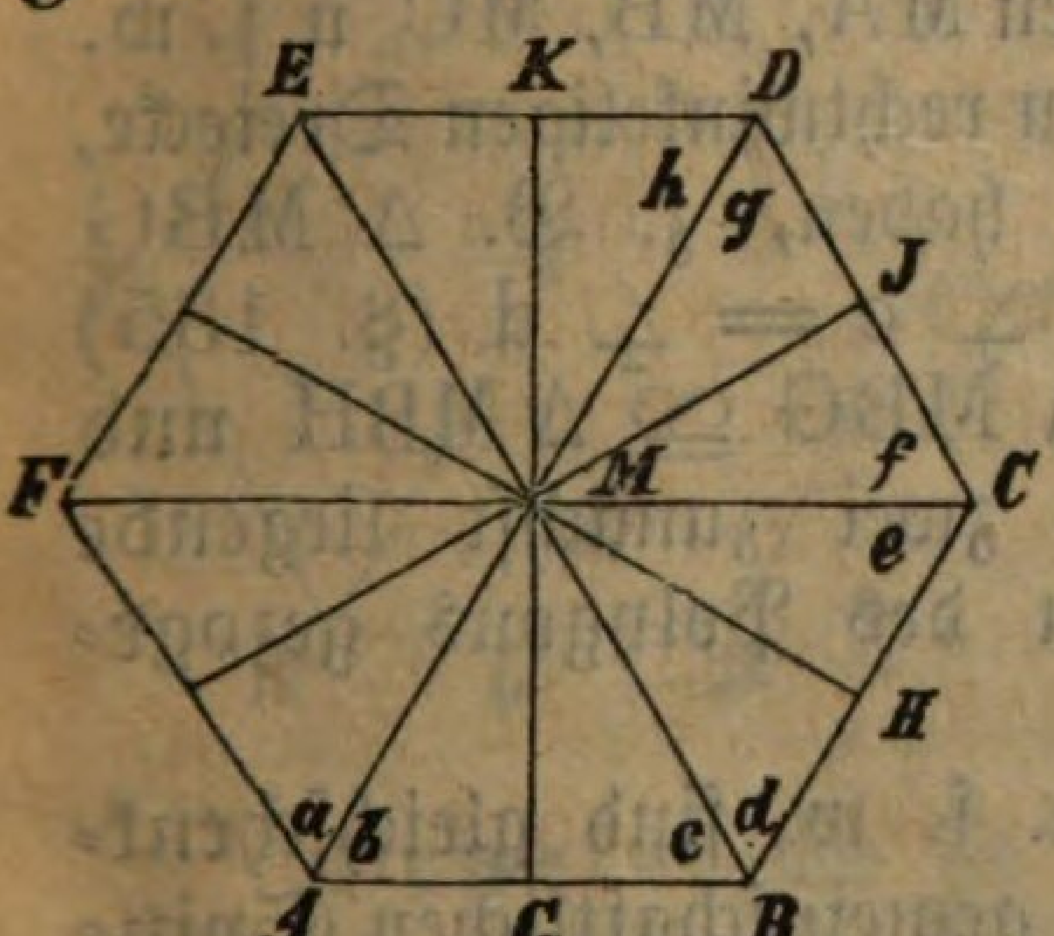
Von den regulären Figuren und der Ausmessung des Kreises.

§. 134.

Eine geradlinige Figur heißt regulär oder regelmäßig, wenn alle ihre Seiten und auch alle ihre Winkel gleich groß sind. Von den Dreiecken ist das gleichseitige Dreieck, von den Vierecken das Quadrat regulär.

§. 135.

a. **Lehrsatz:** Halbirt man in einem regulären Vieleck zwei an einer Seite liegende Winkel, so ist der Durchschnittspunkt der beiden Halbirungslinien von allen Ecken des Polygons gleich weit entfernt und die Verbindungslinien dieses Punktes mit den Ecken halbiren die Winkel des Polygons.



Voraussetzung: ABCDEF ist eine reguläre Figur; ∡ a = ∡ b, ∡ c = ∡ d.

Behauptung: 1) MA = MB = MC = MD u. s. w.

2) ∡ e = ∡ f; ∡ g = ∡ h u. s. w.

Beweis: Es ist ∡ A = ∡ B, also auch ½ ∡ A = ½ ∡ B, oder ∡ b = c und mithin MA = MB (§. 41). Ferner: Vergleicht man die beiden Dreiecke MBC und MAB, so findet man: MB = MB, BC = AB als Polygonseiten, ∡ d = ∡ c nach der Voraussetzung, folglich Δ MBC ≌ Δ MAB (§. 37), mithin MC = MA, also auch = MB.

Aus der Congruenz dieser Dreiecke folgt aber auch: ∡ e = ∡ b. ∡ b ist ein halber Polygonwinkel des Vielecks und alle Polygonwinkel sind gleich, also ist auch ∡ e ein halber Polygonwinkel und daher ∡ e = ∡ f. Nun kann auf dieselbe Weise nachgewiesen werden, daß Δ MCD ≌ Δ MBC, also MD = MB und ∡ g = ∡ h ist u. s. w.

b. Der Punkt, welcher in einer regulären Figur von allen Ecken gleich weit entfernt ist, heißt der Mittelpunkt derselben und jede Verbindungslinie des Mittelpunktes mit einer Ecke der Figur wird ein großer Radius der Figur genannt.

c. Aus dem vorigen Lehrsatz folgt:

1) Beschreibt man aus dem Mittelpunkte einer regulären Figur mit einem großen Radius einen Kreis, so geht dieser durch alle Ecken der regulären Figur hindurch.

2) Alle Dreiecke, in welche eine regelmäßige Figur durch ihre großen Radien getheilt wird, sind congruent. Jedes dieser Dreiecke heißt ein Bestimmungsdreieck und der Winkel desselben, welchen die beiden großen Radien einschließen, ein Centriwinkel der regulären Figur.

3) Hat die reguläre Figur n Seiten, so hat sie auch n Centriwinkel und da die Summe aller Centriwinkel $= 4\,R = 360^0$ ist, so kommt auf jeden Centriwinkel $\frac{4\,R}{n} = \frac{360^0}{n}$.

§. 136.

a. **Lehrsatz:** Zieht man in einer regulären Figur vom Mittelpunkte aus lothrechte Linien auf die Seiten, so sind diese Linien gleich lang und halbiren die Seiten des Polygons. (Fig. §. 135.)

Voraussetzung: ABCDEF ist eine reguläre Figur, M der Mittelpunkt derselben; $MG \perp AB$, $MH \perp BC$, $MJ \perp CD$ u. s. w.

Behauptung: 1) $MG = MH = MJ = MK$ u. s. w.
2) $AG = BG$, $BH = CH$, $CJ = DJ$ u. s. w.

Beweis: 1) Zieht man die großen Radien MA, MB, MC u. s. w. und betrachtet dann irgend zwei der entstandenen rechtwinkeligen Dreiecke, welche einen großen Radius gemeinschaftlich haben, z. B. Δ MBG und Δ MBH, so findet man: $MB = MB$, $\measuredangle c = \measuredangle d$ (§. 135) und $\measuredangle MGB = \measuredangle MHB$ a. R; folglich $\Delta MBG \cong \Delta MBH$ und mithin $MG = MH$. Hieraus folgt, daß je zwei zunächst liegende und deshalb auch alle von M auf die Seiten des Polygons gezogenen Lothe gleich sein müssen.

2) Die Dreiecke MAB, MBC, MCD u. s. w. sind gleichschenklig und MG, MH, MJ u. s. w. sind von der gemeinschaftlichen Spitze M aus lothrecht auf die Grundlinien gezogen, folglich treffen diese Lothe auch die Mitte der Grundlinien AB, BC, CD u. s. w.

b. Jedes Loth vom Mittelpunkte einer regulären Figur auf eine Seite derselben gezogen, wird ein kleiner Radius der regulären Figur genannt.

c. Aus dem vorigen Lehrsatze folgt:

1) Beschreibt man aus dem Mittelpunkte einer regulären Figur mit einem kleinen Radius einen Kreis, so geht derselbe durch die Endpunkte aller kleinen Radien hindurch und die Seiten der regulären Figur sind Tangenten dieses Kreises, weil jede senkrecht auf dem Ende eines Halbmessers steht.

2) Errichtet man in einem regulären Polygon auf irgend einer Seite in deren Mitte ein Loth, so geht dieses, genügend verlängert,

durch den Mittelpunkt des Polygons hindurch; der Durchschnittspunkt von zwei solchen Lothen ist daher der Mittelpunkt des Vielecks.

§. 137.

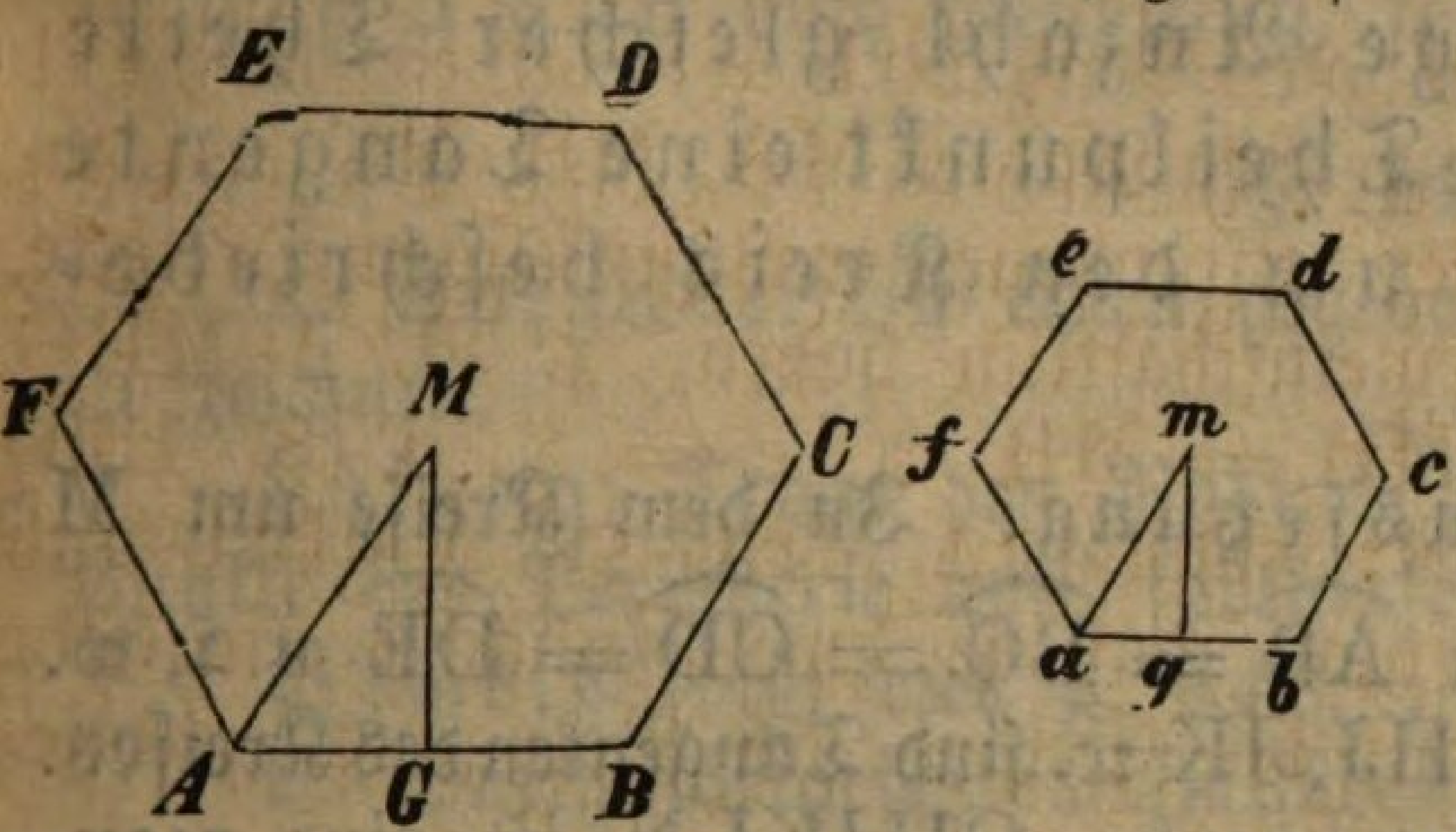
a. **Lehrsatz:** Reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

Beweis: Die Winkel der einen Figur sind einzeln und in derselben Reihenfolge den Winkeln der anderen Figur gleich, denn jeder Polygonwinkel eines regulären n-Ecks ist $= \frac{(2\,n - 4)\,R}{n}$ (§. 35); außerdem müssen je zwei gleichliegende Seiten dasselbe Verhältniß zu einander haben, weil in jeder regulären Figur die Seiten gleich lang sind. Folglich sind die Figuren (n. §. 119) ähnlich.

b. Aus diesem Lehrsatze, in Verbindung mit §. 129 und §. 130 folgt: Die Umfänge regulärer Figuren von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie ihre Polygonseiten und ihre Flächenräume wie die Quadrate ihrer Polygonseiten.

§. 138.

a. **Lehrsatz:** In regulären Figuren von gleicher Seitenzahl verhalten sich die großen und kleinen Radien wie die Polygonseiten.



Voraussetzung: ABCDEF und abcdef sind reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl, M und m ihre Mittelpunkte, MG $\perp$ AB, mg $\perp$ ab.

Behauptung: MA : ma = MG : mg = AB : ab.

Beweis: Es ist ∡ MAG = ∡ mag als Hälften gleicher Polygonwinkel und ∡ MGA = ∡ mga als R, folglich Δ MAG ∾ Δ mag (§. 122) und mithin MA : ma = MG : mg = AG : ag. Nun ist AG die Hälfte von AB und ag die Hälfte von ab, also ist auch: MA : ma = MG : mg = AB : ab.

b. **Folgesatz:** In regulären Figuren von gleicher Seitenzahl verhalten sich die Umfänge wie die großen und kleinen Radien, die Inhalte wie die Quadrate der großen und kleinen Radien.

§. 139.

Lehrsatz: Der Flächeninhalt jeder regulären Figur wird gefunden, wenn man ihren halben Umfang mit dem kleinen Radius multiplicirt.

Beweis: Hat die Figur n (z. B. 8) Seiten, so läßt sie sich auch

in n (8) congruente Bestimmungsdreiecke zerlegen. Bezeichnet man nun die Polygonseite mit a und den kleinen Radius mit r, so ist jedes Bestimmungsdreieck $= \frac{ar}{2}$, also die ganze Figur $= \frac{n \cdot a \cdot r}{2} \left(\frac{8 \cdot a \cdot r}{2}\right)$.

Für diesen Ausdruck kann man setzen: $\left(\frac{n \cdot a}{2}\right) \cdot r$. Damit ist aber der Beweis geführt, weil $\frac{n \cdot a}{2}$ der halbe Umfang des Polygons ist.

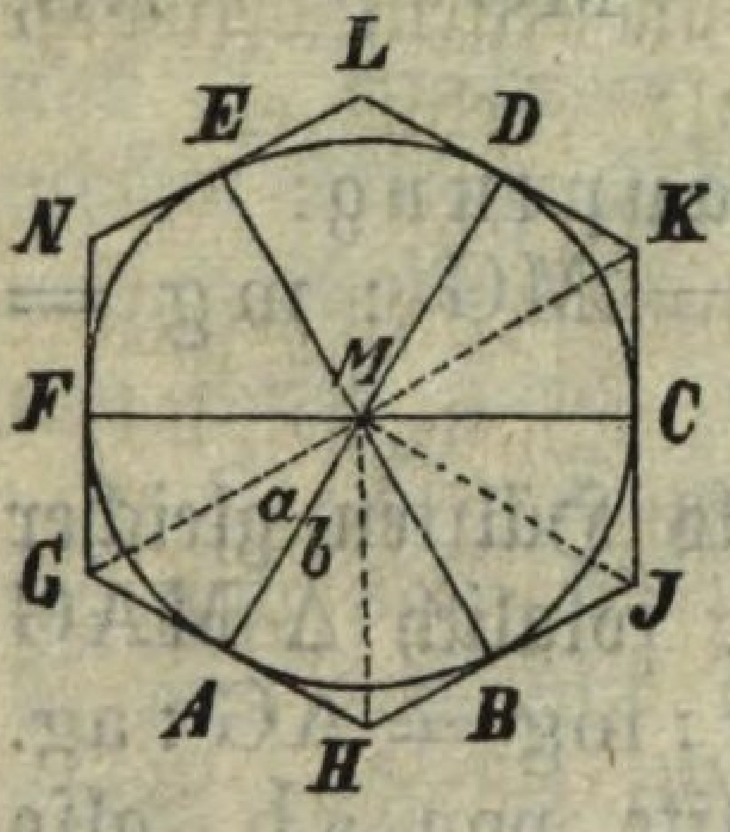
§. 140.

Lehrsatz: Denkt man sich die Peripherie eines Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt und dann je zwei zunächst liegende Theilpunkte mit einander verbunden, so entsteht ein reguläres Polygon im Kreise.

Beweis: Die Seiten des entstandenen Polygons sind gleich, weil zu gleichen Bogen gleiche Sehnen gehören und die Polygonwinkel sind gleich, als Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen stehen; folglich ist die entstandene Figur regulär.

§. 141.

Lehrsatz: Denkt man sich die Peripherie eines Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt und durch jeden Theilpunkt eine Tangente gezogen, so entsteht ein um den Kreis beschriebenes reguläres Polygon.



Voraussetzung: In dem Kreise um M ist Bogen $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$ u. s. w. und GH, HJ, JK ꝛc. sind Tangenten des Kreises.

Behauptung: GHJKLN ist eine reguläre Figur.

Beweis: 1) Verbindet man den Mittelpunkt M mit den Endpunkten G, H, J, K u. s. w. und betrachtet zwei beliebige neben einem Radius liegende rechtwinkelige Dreiecke, z. B. MAG und MAH, so findet man: MA = MA, ∡ MAG = ∡ MAH, als R, ∡ a = ∡ b als die Hälften der gleichen Centriwinkel AMF und AMB (§. 89), folglich Δ MAG $\cong$ Δ MAH und mithin AG = AH. Hieraus folgt, daß jede Polygonseite in ihrem Berührungspunkte halbirt ist.

Nun ist ferner: HA = HB (§. 102), also auch 2 HA = 2 HB oder GH = HJ, woraus folgt, daß alle Seiten des Polygons gleich sind.

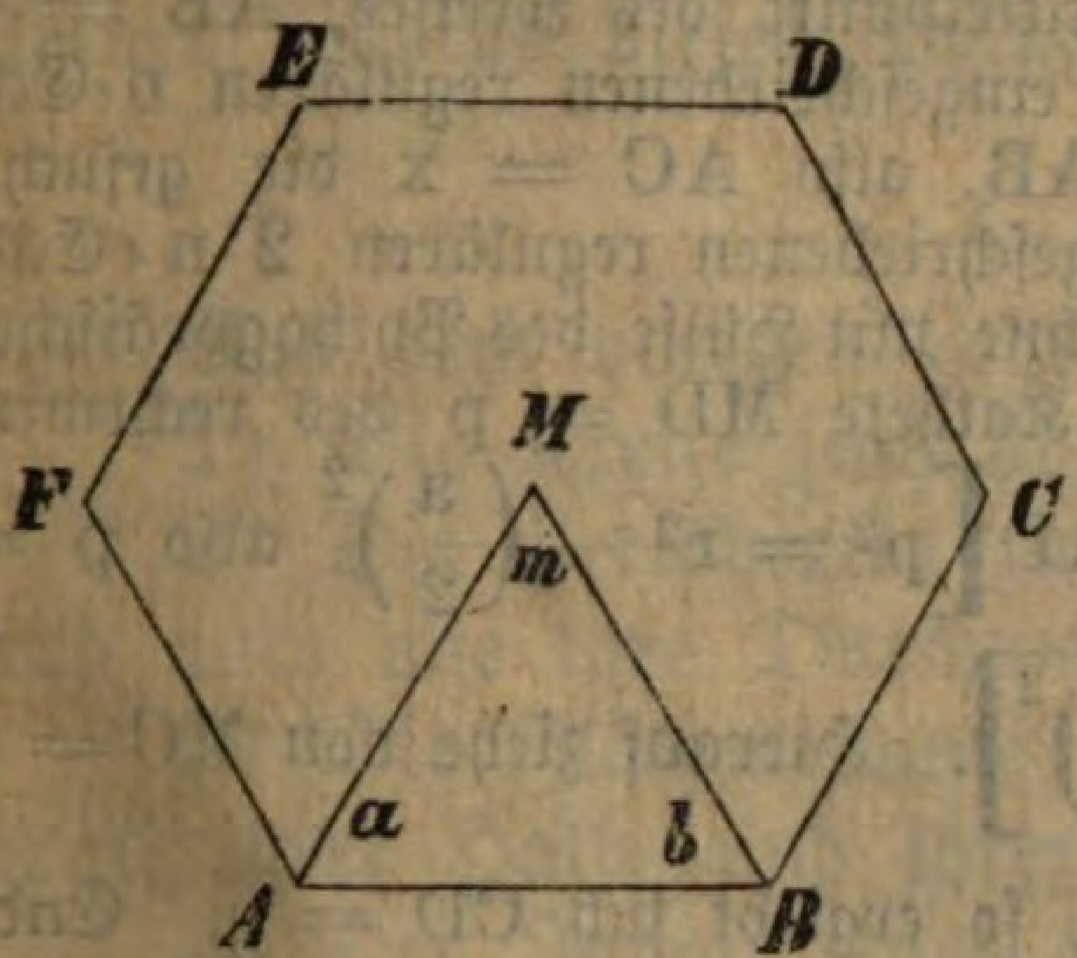
2) Jeder der Polygonwinkel G, H, J u. s. w. wird durch den ihm gegenüberliegenden Centriwinkel AMF, AMB, BMC u. s. w. zu

2 R ergänzt (weil z. B. in dem Vierecke AMFG, die Winkel bei A und F rechte Winkel sind und die 4 Winkel jedes Vierecks zusammen 4 R betragen). Diese Centriwinkel sind gleich, also müssen auch die Polygonwinkel gleich sein.

Figur GHJKLN hat sonach gleiche Seiten und gleiche Winkel, folglich ist sie regulär.

§. 142.

Lehrsatz: Die Seite eines regulären Sechsecks ist gleich dem großen Radius desselben.



Voraussetzung: ABCDEF ist ein reguläres Sechseck und M der Mittelpunkt desselben.

Behauptung: AB = MA = MB.

Beweis: In dem gleichschenkeligen Dreieck MAB ist $\measuredangle$ m $= \frac{360^0}{6} = 60^0$ (§. 135. c. 3), also $\measuredangle$ a + $\measuredangle$ b $= 180^0 - 60^0 = 120^0$. Nun ist $\measuredangle$ a = $\measuredangle$ b (§. 39), also jeder dieser beiden Winkel $= 60^0$, mithin Δ MAB gleichwinkelig, und weil in jedem Dreieck gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüberliegen, so muß Δ MAB auch gleichseitig, folglich AB = MA = MB sein.

§. 143.

a. Aufgabe: In einen gegebenen Kreis ein reguläres Sechseck zu zeichnen.

Lösung: Trage den Radius des Kreises, von einem beliebigen Punkte der Peripherie aus, fortlaufend sechsmal als Sehne ein.

Beweis folgt aus §. 142.

b. Durch fortgesetztes Halbiren der Centriwinkel eines regulären Sechsecks im Kreise wird die Kreislinie nach und nach in 12, 24, 48 u. s. w. gleiche Theile getheilt, so daß hiernach leicht in jeden Kreis ein reguläres 12-, 24-, 48-Eck u. s. w. gezeichnet werden kann.

§. 144.

Aufgabe: In einen gegebenen Kreis ein reguläres Dreieck zu zeichnen.

Lösung: Theile die Peripherie des Kreises (auf die §. 143 angegebene Weise) in sechs gleiche Theile und verbinde dann einen Theilpunkt, als den ersten, mit dem dritten, den dritten mit dem fünften und den fünften mit dem ersten.

Beweis folgt unmittelbar aus der Construction.

§. 145.

a. Aufgabe: In einen gegebenen Kreis ein reguläres Viereck zu zeichnen.

Lösung: Zeichne zwei sich lothrecht schneidende Durchmesser und verbinde die Endpunkte derselben.

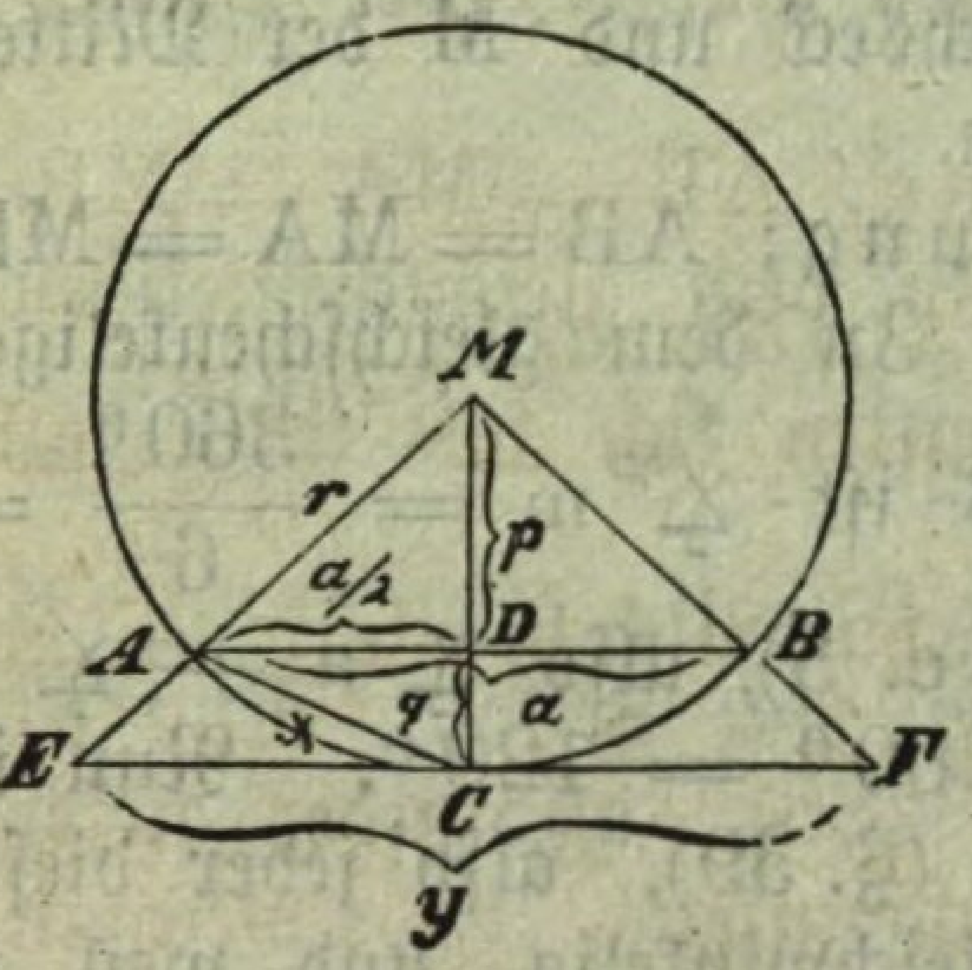
Beweis folgt aus §. 87 in Verbindung mit §. 140.

b. Durch fortgesetztes Halbiren der Centriwinkel des regulären Vierecks im Kreise ist man im Stande in jeden Kreis ein reguläres 8=, 16=, 32=Eck u. s. w. zu construiren.

§. 146.

Aufgabe: Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite a des eingeschriebenen regulären n=Eck (z. B. des Sechsecks) die Seite des eingeschriebenen regulären 2 n=Ecks (Zwölfecks) zu berechnen.

Lösung und Beweis: Es sei M der Mittelpunkt des Kreises, AB = a die Seite des eingeschriebenen regulären n=Ecks und MC ⊥ AB, also AC = x die gesuchte Seite des eingeschriebenen regulären 2 n=Ecks.



Dann berechne mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes die Kathete MD = p des rechtwinkeligen Δ MAD $\left[p^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right.$ also $p = \left.\sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right]$. Hierauf ziehe von MC = r, MD = p ab, so ergiebt sich CD = q. Endlich berechne aus Δ ACD, $x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2$ also $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2}$.

§. 147.

Aufgabe: Aus dem Radius r eines Kreises und der Seite a eines eingeschriebenen regulären n=Ecks die Seite des umschriebenen regulären n=Ecks zu berechnen. (Fig. §. 146).

Lösung und Beweis: Gelten die Annahmen und Bezeichnungen der vorigen Aufgabe und ist EF eine Tangente des Kreises, so läßt sich leicht zeigen, daß EF = y die gesuchte Seite des umgeschriebenen regulären n=Ecks ist. Nun verhält sich (§. 117. a.) EF : AB = ME : MA, = MC : MD oder y : a = r : p. p kann, wie im vorigen Paragraph gezeigt worden ist, aus r und $\frac{a}{2}$ berechnet werden. Ist p gefunden, so ergiebt sich aus obiger Proportion: $y = \frac{a \cdot r}{p}$.

§. 148.

a. **Lehrsatz: Jeder Kreis kann als ein reguläres Vieleck mit unendlich vielen Seiten angesehen werden.**

Beweis: Zeichnet man in und um den Kreis ein reguläres Polygon von beliebiger Seitenzahl, z. B. ein Sechseck, so ist der Umfang und Inhalt des eingeschriebenen Sechsecks kleiner und der des umgeschriebenen größer als der Umfang und Inhalt des Kreises. Construirt man dann in und um den Kreis das reguläre Zwölfeck, so ist zwar immer noch das eingeschriebene Zwölfeck kleiner und das

umgeschriebene größer als der Kreis, aber beide Figuren nähern sich dem Kreise schon mehr als die Sechsecke. Denkt man sich hierauf nach und nach in und um den Kreis das reguläre 24=Eck, 48=Eck, 96=Eck u. s. w. beschrieben, so werden diese Figuren die Kreislinie immer enger und enger einschließen und zuletzt wird, wenn man sich dieses Verfahren bis ins Unendliche hin fortgesetzt denkt, der Unterschied zwischen eingeschriebenem Polygon, Kreislinie und umgeschriebenem Polygon als verschwindend angesehen werden können. Alle drei Figuren fallen dann in eine zusammen.

b. Wird der Kreis als ein reguläres Polygon mit unendlich vielen Seiten angesehen, so ist sein Radius gleichzeitig großer und kleiner Radius dieses Polygons.

§. 149.

Aus dem vorigen Lehrsatze folgt:

1) Alle Kreise sind ähnliche Figuren (§. 137. a.)

2) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halb= und auch wie ihre Durchmesser (§. 138. b.)

3) Die Flächenräume zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halb= und ihrer Durchmesser (§. 138. b.)

4) Der Inhalt eines jeden Kreises ist gleich dem Producte aus der halben Peripherie und dem Radius; oder auch:

Jeder Kreis ist gleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist. (§. 139.)

§. 150.

Sind P und p die Peripherien zweier Kreise und D und d die zugehörigen Durchmesser, so verhält sich: (§. 149. 2.)

$$P : p = D : d, \text{ also auch: } P : D = p : d.$$

Hieraus folgt: In allen Kreisen ist das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser dasselbe, oder mit anderen Worten: Bei allen Kreisen muß der Durchmesser mit derselben Zahl multiplicirt werden, wenn man die Peripherie haben will. Diese Zahl wird gewöhnlich mit dem griechischen Buchstaben π (pi) bezeichnet.

§. 151.

a. Aufgabe: Die Zahl π annähernd zu berechnen.

Lösung: Setze den Durchmesser eines beliebigen Kreises = 1, dann ist der Halbmesser und die Seite des eingeschriebenen regulären Sechsecks = $^1/_2$ = 0,5, also der Umfang des Sechsecks = $^1/_2 \times 6 = 3$. Hieraus geht schon hervor, daß der Umfang eines Kreises mehr als 3mal so groß ist als der Durchmesser desselben. Nun berechne (mit Hülfe von §. 146 und 147) nach und nach die Seite und den Umfang des eingeschriebenen und des umgeschriebenen regulären 12=Ecks, 24=Ecks, 48=Ecks u. s. w. Die Umfänge dieser Figuren werden sich dann immer mehr und mehr der Kreislinie nähern, also auch mit immer größerer Genauigkeit für π gesetzt werden dürfen. Der genaue Werth von π liegt stets zwischen dem Umfange des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Polygons von derselben Seitenzahl. Rechnet man mit Decimalbrüchen, so werden also auch die Decimalstellen, in welchen das eingeschriebene und das umgeschriebene Polygon übereinstimmen, genau für π gelten.

Die folgende Tabelle schließt die Resultate einer solchen Rechnung bis zum 96-Eck hin zusammen:

Anzahl der Seiten.	Umfang des eingeschriebenen Polygons.	Umfang des umgeschriebenen Polygons.
6	3	3,464101
12	3,105828	3,215390
24	3,132628	3,150660
48	3,139350	3,146086
96	3,141031	3,142714

b. Der erste, welcher π berechnet hat, war Archimedes (212 v. Chr. Geb.), ein großer griechischer Mathematiker. Er fand schon für π die Näherungszahl $3^1/_7$, ein Werth, welcher für die gewöhnlichen Fälle genügend genau ist.

Später (1596) leistete besonders Ludolph van Ceulen, (gewöhnlich von Cöln genannt) Hervorragendes in der Berechnung dieser Zahl. Er berechnete π mit bewundernswerther Ausdauer bis auf 32 Decimalstellen genau. Ihm zu Ehren wird π häufig die Ludolphische Zahl genannt.

Für die mehrsten praktischen Rechnungen genügt es, $\pi = 3^1/_7$ oder $= 3{,}14$ anzunehmen; ist eine größere Genauigkeit erforderlich, so setzt man $\pi = 3{,}1416$, oder noch genauer $\pi = 3{,}1415927$.

Anmerkung. Die Aufgabe: π zu berechnen, ist dem Wesen nach einerlei mit dem berüchtigten Problem der Quadratur des Kreises oder der Aufgabe: des Zirkels Viereck zu finden.

§. 152.

a. **Lehrsatz:** Bezeichnet r den Halbmesser, d den Durchmesser, P die Peripherie und K den Flächeninhalt eines beliebigen Kreises, so ist:

$$1)\ P = d\pi = 2 \cdot r \cdot \pi$$

d. h. die Peripherie eines jeden Kreises wird gefunden, wenn man den Durchmesser desselben mit der Ludolphischen Zahl multiplicirt.

$$2)\ K = r^2\pi.$$

d. h. Der Flächeninhalt eines jeden Kreises ist gleich dem Quadrate seines Halbmessers multiplicirt mit der Ludolphischen Zahl.

Beweis: 1) Die Behauptung $P = d\pi = 2r\pi$ folgt unmittelbar aus dem Begriff von π. (§. 150.)

2) Nach §. 149. 4. ist der Flächeninhalt K eines jeden Kreises gleich dem Producte aus der halben Peripherie und dem Radius, also $= \frac{P}{2} \cdot r$. Für P kann man $2\,r\pi$ setzen, mithin ist auch $K = \frac{2\,r\pi}{2} \cdot r = r^2\pi$.

b. **Folgerungen.**

1) Aus $d\pi = P$ folgt: $d = \frac{P}{\pi}$, d. h.: Der Durchmesser eines jeden Kreises ist gleich dem Umfange desselben dividirt durch die Ludolphische Zahl.

2) Aus $r^2\pi = K$ folgt: $r^2 = \frac{K}{\pi}$ und dann: $r = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$, d. h.: Man erhält den Halbmesser eines Kreises, wenn man den Inhalt desselben durch die Ludolphische Zahl dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

§. 153.

Lehrsatz: Bezeichnet Sect. den Flächeninhalt eines beliebigen Kreisausschnittes, giebt m die Zahl der Grade des zugehörigen Centriwinkels an und gelten außerdem die im vorigen Paragraph angewendeten Bezeichnungen, so ist:

$$\text{Sect.} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{360}.$$

Beweis: Der Inhalt eines jeden Kreises ist $= r^2\pi$, mithin ist der Inhalt eines Sectors, dessen Centriwinkel 1^0 beträgt, $= \frac{r^2\pi}{360}$ und der Inhalt eines Sectors von $m^0 = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{360}$.

§. 154.

Berechnung des Kreisabschnittes. Der Inhalt eines Kreisabschnittes wird gefunden, wenn man von dem Inhalte des zugehörigen Kreisausschnittes den Inhalt des Dreiecks subtrahirt, welches durch die Sehne des Kreisabschnittes und den beiden Radien nach den Endpunkten dieser Sehne gebildet wird.

§. 155.

a. Bei zwei in einander liegenden (concentrischen oder excentrischen) Kreisen nennt man die zwischen beiden Peripherien liegende Figur einen Kreisring.

b. Der Inhalt eines solchen Kreisringes wird gefunden, wenn man vom Inhalte des größeren Kreises, den des kleineren abzieht.

Zweiter Abschnitt.

Kurzer Ueberblick über die körperliche Geometrie, insbesondere Erklärung der wichtigsten Körperformen und ihre Berechnung.

§. 156.

Die körperliche Geometrie oder Stereometrie handelt von den Raumformen, deren Theile nicht sämmtlich in ein und derselben Ebene liegen; dazu gehören insbesondere alle Körper.

Man unterscheidet ebenflächige oder eckige und krummflächige Körper. Erstere sind von lauter Ebenen, letztere ganz oder theilweise von krummen Flächen begrenzt. Die Linien, in welchen zwei Begrenzungsflächen eines Körpers zusammentreffen, werden Kanten und die Punkte, in welchen drei oder mehr Kanten zusammenstoßen, Ecken des Körpers genannt.

§. 157.

Durch jeden Punkt des Raumes lassen sich unzählig viele Ebenen legen; ebenso durch zwei Punkte oder eine gerade Linie.

Denken wir uns aber drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, hierauf durch zwei derselben eine Ebene gelegt, und diese um die gerade Verbindungslinie beider Punkte drehend bewegt, so wird sie nach und nach unzählig viele verschiedene Lagen einnehmen, aber nur in einer einzigen Lage auch durch den dritten Punkt hindurchgehen.

Hieraus folgt: Die Lage einer Ebene im Raume wird bestimmt:

1) durch drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, und deshalb auch:

2) durch eine gerade Linie und einen außerhalb derselben liegenden Punkt;

3) durch zwei sich schneidende gerade Linien;

4) durch zwei parallele Linien.

Liegen zwei gerade Linien nicht in derselben Ebene, so können sie sich nie schneiden, sie heißen dann windschiefe Linien und dürfen nicht mit parallelen Linien verwechselt werden.

§. 158.

1) Eine Linie heißt einer Ebene parallel, wenn Linie und Ebene unendlich gedacht werden können, ohne daß sie sich schneiden.

2) Zwei Ebenen heißen parallel, wenn sie nach allen Seiten unbegrenzt erweitert werden können, ohne sich zu treffen.

§. 159.

1) Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so geschieht dies immer in einer geraden Linie.

2) Gehen von einer geraden Linie zwei Ebenen nach verschiedenen Richtungen hin aus, so wird ihr Richtungsunterschied ein Flächenwinkel genannt. Die beiden Ebenen, welche einen Flächenwinkel bilden, heißen Schenkelebenen desselben und die gerade

Linie, von welcher beide Schenkelebenen ausgehen, wird die **Scheitellinie** oder **Kante** des Flächenwinkels genannt.

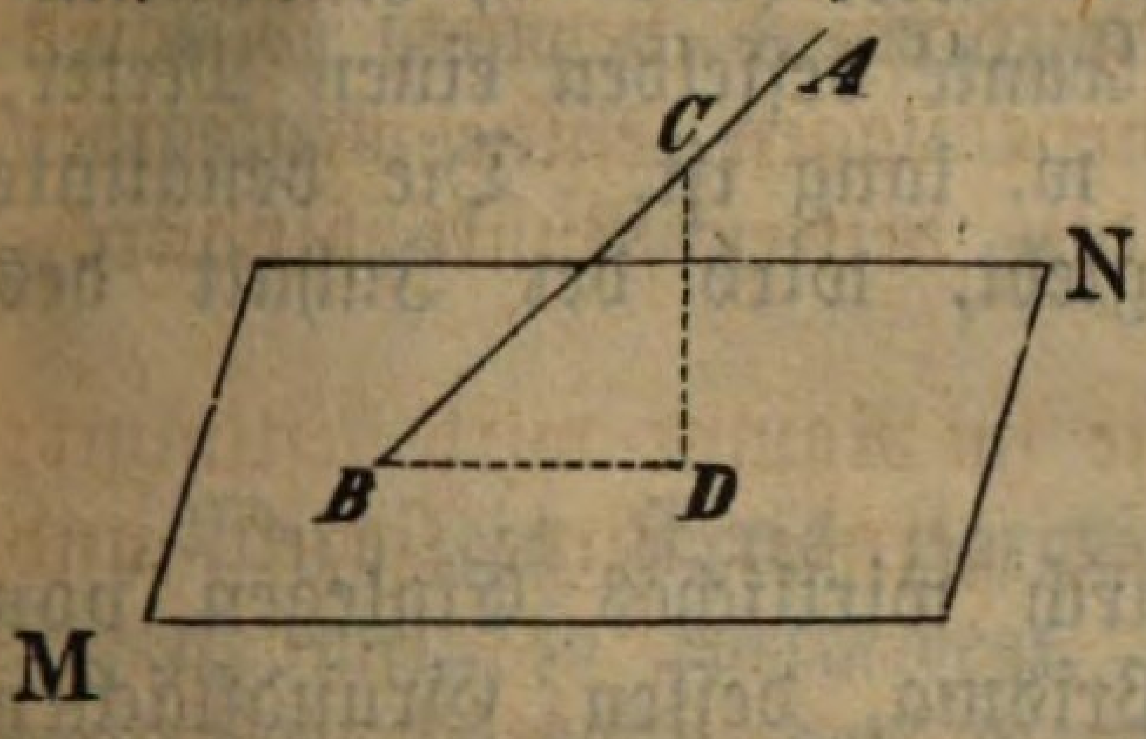
3) Die Größe jedes Flächenwinkels kann leicht durch einen Linienwinkel ausgedrückt werden. Man errichtet zu diesem Zwecke in einem beliebigen Punkte der Kante, in jeder der beiden Schenkelebenen ein Loth zur Kante. Der Winkel, welchen diese beiden Lothe bilden, giebt dann an, wie groß der Richtungsunterschied beider Ebenen ist und wird aus diesem Grunde der **Neigungswinkel** beider Ebenen genannt.

4) Zwei Ebenen stehen lothrecht auf einander, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter Winkel ist.

§. 160.

1) Steht eine gerade Linie auf zwei Linien einer Ebene lothrecht, so bildet sie (wie sich dies beweisen läßt) mit allen Linien, welche in der Ebene durch ihren Treffpunkt gezogen werden können, rechte Winkel. Man sagt dann, die Linie stehe lothrecht auf der Ebene.

2) Trifft eine gerade Linie AB eine Ebene MN nicht lothrecht, sondern schief, so heißt der Winkel, welchen sie mit ihrer Projection auf die Ebene bildet, der **Neigungswinkel** der Linie zur Ebene.

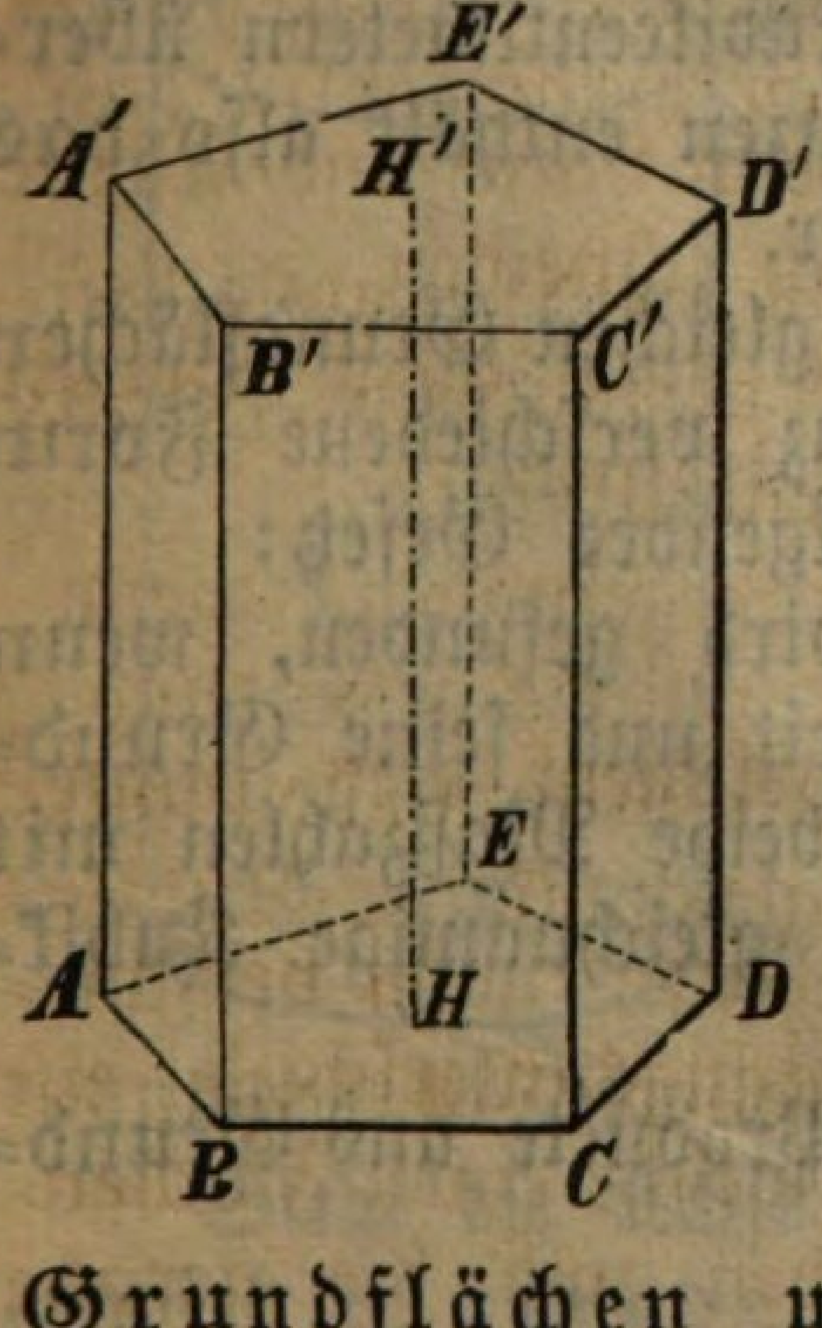


Die Projection wird erhalten, wenn man von einem beliebigen Punkte C der Linie AB ein Loth CD auf die Ebene MN zieht und dann den Fußpunkt D des Lothes mit dem Treffpunkte B der Linie verbindet; BD ist dann die verlangte Projection.

Vom Prisma.

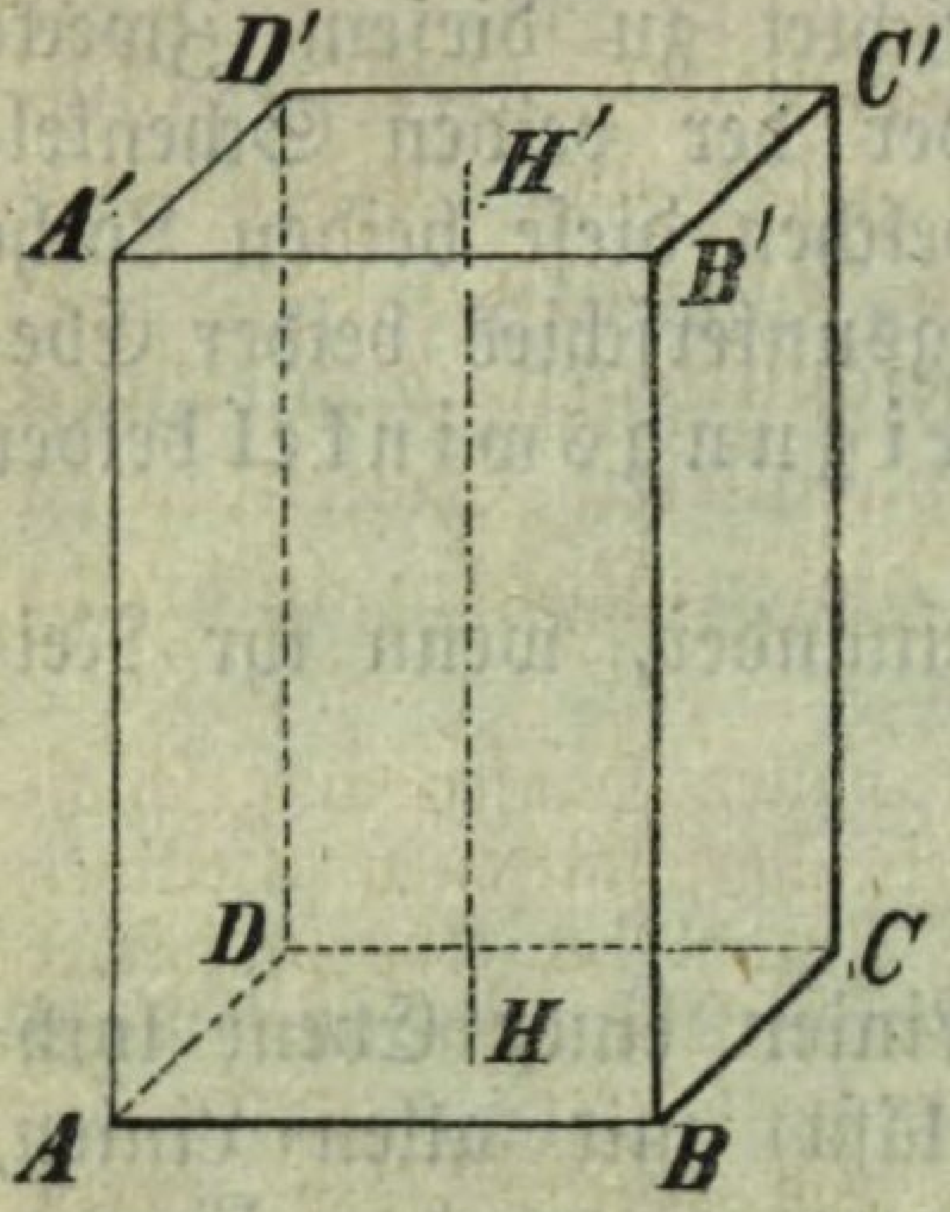
§. 161.

Wird eine ebene geradlinige Figur (ABCDE) im Raume eine Strecke weit so fortbewegt, daß sie stets parallel mit ihrer ursprünglichen Lage bleibt und jede ihrer Ecken eine gerade Linie beschreibt, so heißt der Raum, welchen die Figur durchlaufen hat, ein prismatischer Raum oder ein Prisma (ABCDE A'B'C'D'E'). Hieraus folgt:



Ein Prisma ist ein Körper, welcher von zwei congruenten und parallelen Figuren und so viel dazwischen liegenden Parallelogrammen begrenzt wird, als diese Figuren Seiten haben. Jene beiden congruenten und parallelen Figuren (ABCDE und A'B'C'D'E') werden die **Grundflächen** und die dazwischen liegenden Parallelogramme

(ABA'B', BCB'C' 2c.) die **Seitenfächen** des Prismas genannt. Der lothrechte Abstand der beiden Grundflächen von einander (HH') heißt die **Höhe** des Prismas. Nach der Anzahl der Seitenflächen (oder Seitenkanten) unterscheidet man 3seitige, 4seitige, 5seitige u. s. w. Prismen. Ein Prisma heißt **gerade**, wenn seine Seitenkanten lothrecht zu den Grundflächen stehen, sonst **schief**. — Sind bei einem Prisma auch die Grundflächen Parallelogramme, so führt es den Namen **Parallelepipedon**(ABCDA'B'C'D'). Ein solches heißt **rechtwinkelig**, wenn es von lauter Rechtecken, **Kubus** oder **Würfel**, wenn es von lauter Quadraten begrenzt wird.



§. 162.

Zu Maßeinheiten für das Ausmessen der Körper hat man die Würfel gewählt, deren Kanten gleich den Längeneinheiten sind. Ein Würfel heißt Kubikmeter (Kb^{m}), Kubikcentimeter (Kb^{cm}), Kubikmillimeter (Kb^{mm}) u. s. w., je nachdem jede Kante desselben einen Meter, einen Centimeter, einen Millimeter u. s. w. lang ist. Die benannte Zahl, welche sich durch das Messen ergiebt, wird der Inhalt des Körpers genannt.

§. 163.

Eine unmittelbare Ausmessung (durch wirkliches Einlegen von Einheitskuben) ist nur beim geraden Prisma, dessen Grundflächen Rechtecke sind, denkbar. Ist bei einem solchen eine Seitenfläche des Einheitskubus (z. B. eines Kubikcentimeters) in der Grundfläche g (z. B. 20) mal enthalten, so können g (20) Kubikcentimeter in das Prisma so hineingestellt werden, daß sie auf der Grundfläche neben einander stehen. Ist ferner die Kante des Einheitskubus (des Centimeters) in der Höhe des Prismas h (z. B. 7) mal enthalten, so lassen sich h (7) solche Schichten von g (20) Kubikcentimetern übereinander in das Prisma hineinstellen. Im Ganzen enthält also das Prisma $g \times h$ $(20 \times 7 = 140)$ Kubikcentimeter.

Nun läßt sich beweisen, daß Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen (die Grundflächen können dabei ganz verschiedene Form haben), inhaltsgleich sind, also gilt allgemein folgendes Gesetz:

Der körperliche Inhalt eines Prismas wird gefunden, wenn man seine Höhe mit einer beliebigen Längeneinheit und seine Grundfläche mit dem Quadrate derselben mißt, dann beide Maßzahlen mit einander multiplicirt und das Product auf das gleichnamige Kubikmaß bezieht, oder abgekürzt:

Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Producte aus Grundfläche und Höhe desselben.

Formel: $P = g \times h$.

(P = Kubikinhalt des Prismas, g = Maß der Grundfläche, h = Maß der Höhe.)

§. 164.

Wird ein Prisma durch eine Ebene geschnitten, welche nicht parallel zu den Grundflächen läuft, so heißt jeder der beiden entstehenden Theile ein schief abgeschnittenes Prisma.

Der körperliche Inhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist gleich der Summe seiner drei parallelen Seitenkanten multiplicirt mit dem dritten Theile eines auf diesen Kanten lothrecht stehenden Durchschnittsdreiecks.

Anmerkung. Werden Kugeln in regelmäßigen vollen Haufen aufgeschichtet, so entspricht die Form dieser Haufen einem schief abgeschnittenen 3seitigen Prisma. Merkwürdig ist es nun, daß man auch die Anzahl der Kugeln solcher Haufen nach obiger Formel finden kann. Die einfache, sehr praktische Regel hierzu lautet:

Multiplicire die Anzahl der Kugeln, welche in dem Rücken (der oberen Schicht) und den beiden dem Rücken parallel gehenden Kanten der Grundschicht liegen, mit dem dritten Theil der Anzahl Kugeln in einem der Seitendreiecke.

Im viereckigen Kugelhaufen, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, liegt im Rücken nur 1 Kugel und es ist gleichgültig, welche zwei von den sich paarweise gegenüberliegenden Grundkanten man als parallel zum Rücken ansieht.

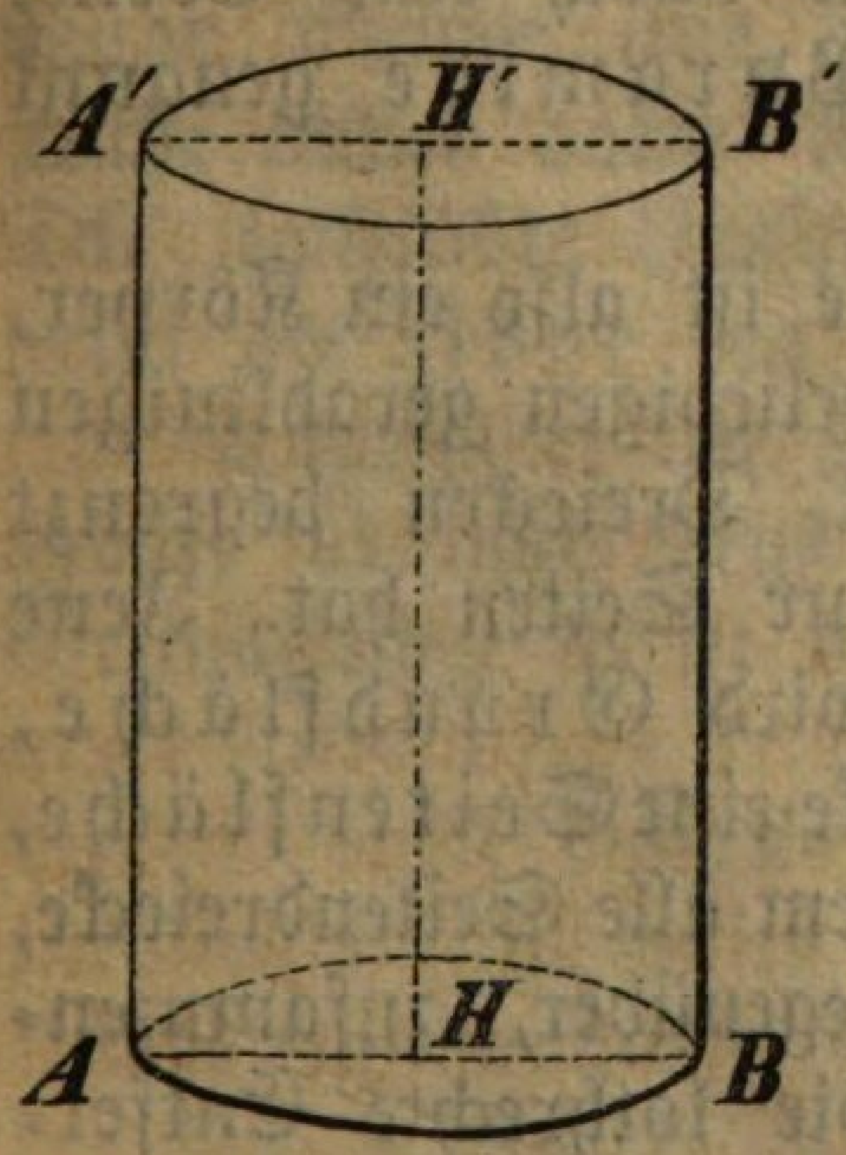
Beim dreiseitigen Kugelhaufen zählt man zu der einen Kugel in der Spitze, die Kugeln einer Seite der Grundschicht und die dieser Seite gegenüberliegende eine Kugel hinzu, um die Anzahl der Kugeln in den drei parallelen Seitenkanten zu erhalten.

Vom Cylinder.

§. 165.

Wird ein Kreis parallel mit seiner ursprünglichen Lage eine Strecke weit so fortbewegt, daß sein Mittelpunkt eine gerade Linie beschreibt, so heißt der Raum, welchen der Kreis zurückgelegt hat, ein Cylinder (AB A'B'). Hieraus folgt:

Ein Cylinder oder eine Walze ist ein Körper, welcher von zwei parallelen und congruenten Kreisen und einer einfach gekrümmten Fläche von solcher Form begrenzt wird, daß man in ihr von jedem Punkte der einen Kreislinie nach der anderen Kreislinie hin eine gerade Linie ziehen kann. Jene beiden Kreise bilden die Grundflächen des Cylinders, die dazwischen liegende einfach gekrümmte Fläche heißt Seitenfläche, oder Mantel, die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte der Grundkreise Achse, die senkrechte Entfernung beider Grundflächen Höhe, und jede gerade Linie, welche auf dem Mantel von Grundkreis zu Grundkreis gezogen ist, eine Seite des Cylinders.



Steht die Achse eines Cylinders lothrecht zu den Grundflächen, so wird er gerade, sonst schief genannt.

Bei dem geraden Cylinder sind Achse, Höhe und Seite gleich lang.

Den geraden Cylinder kann man sich auch durch Drehung eines Rechteckes um eine seiner Seiten als festliegende Achse erzeugt denken. Die Gegenseite dieser Achse beschreibt alsdann den Mantel und jede der beiden anderen Seiten einen der Grundkreise des Cylinders.

§. 166.

Jeder Cylinder kann als ein Prisma angesehen werden, dessen Grundflächen reguläre Figuren mit unzählig vielen Seiten sind. Hieraus folgt:

Der Inhalt eines jeden Cylinders ist gleich dem Producte aus Grundfläche und Höhe desselben.

Mißt der Radius der Grundfläche r, und die Höhe h Einheiten irgend eines Längenmaßes, so ist die Grundfläche $= r^2 \pi$, also der Inhalt des Cylinders:

$$C = r^2 \cdot \pi \, . \, h.$$

§. 167.

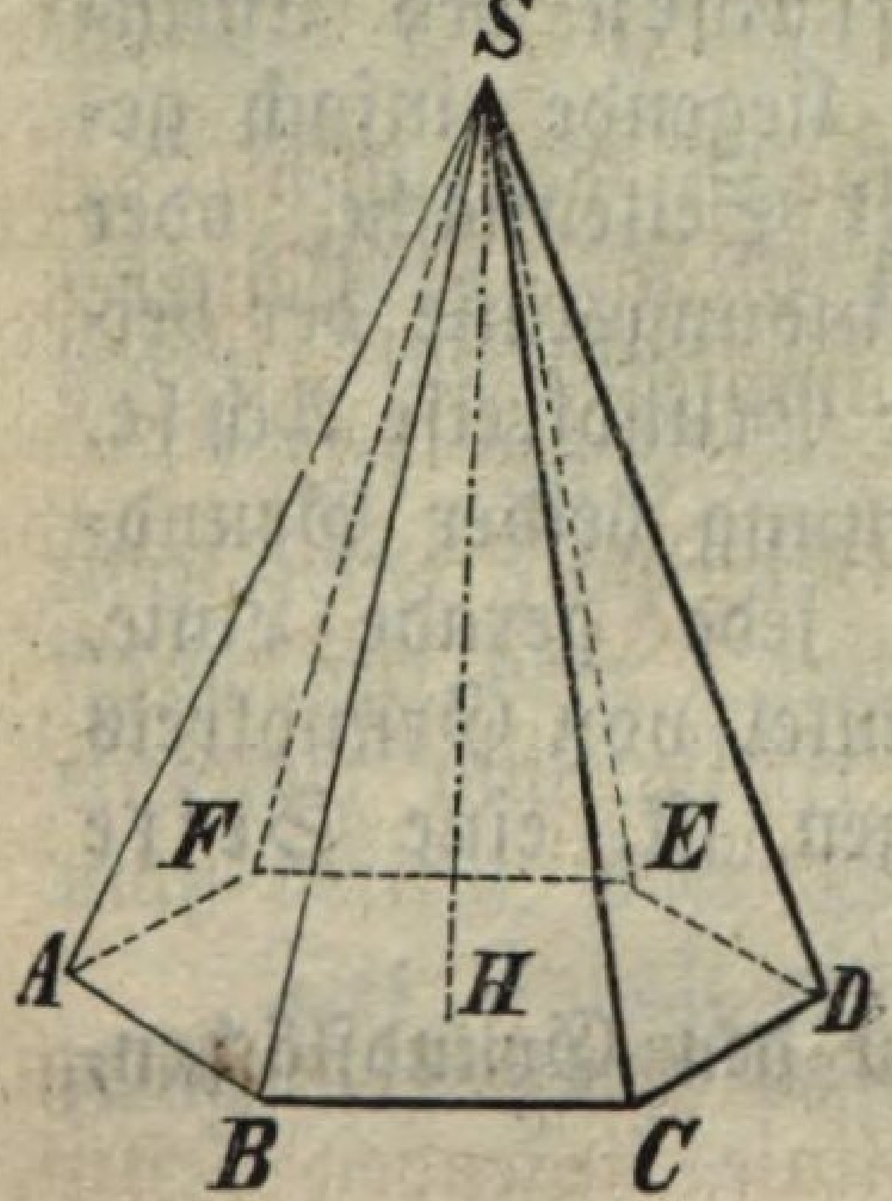
Denkt man sich den Mantel eines geraden Cylinders in der Richtung einer Seite durchschnitten und dann in eine Ebene ausgebreitet, so nimmt er die Gestalt eines Rechteckes an. Die Grundlinie dieses Rechteckes ist gleich dem Umfange des Grundkreises, also $= 2 r \pi$, die Höhe = der Höhe h des Cylinders, folglich ist der Mantel

$$M = 2 r \pi h.$$

Von der Pyramide.

§. 168.

Verbindet man die Ecken einer beliebigen geradlinigen Figur (ABCDEF) mit einem außerhalb liegenden Punkte (S) und dann je zwei zunächstliegende dieser Verbindungslinien durch eine Ebene, so entsteht ein Körper (SABCDEF), welcher **Pyramide** genannt wird.

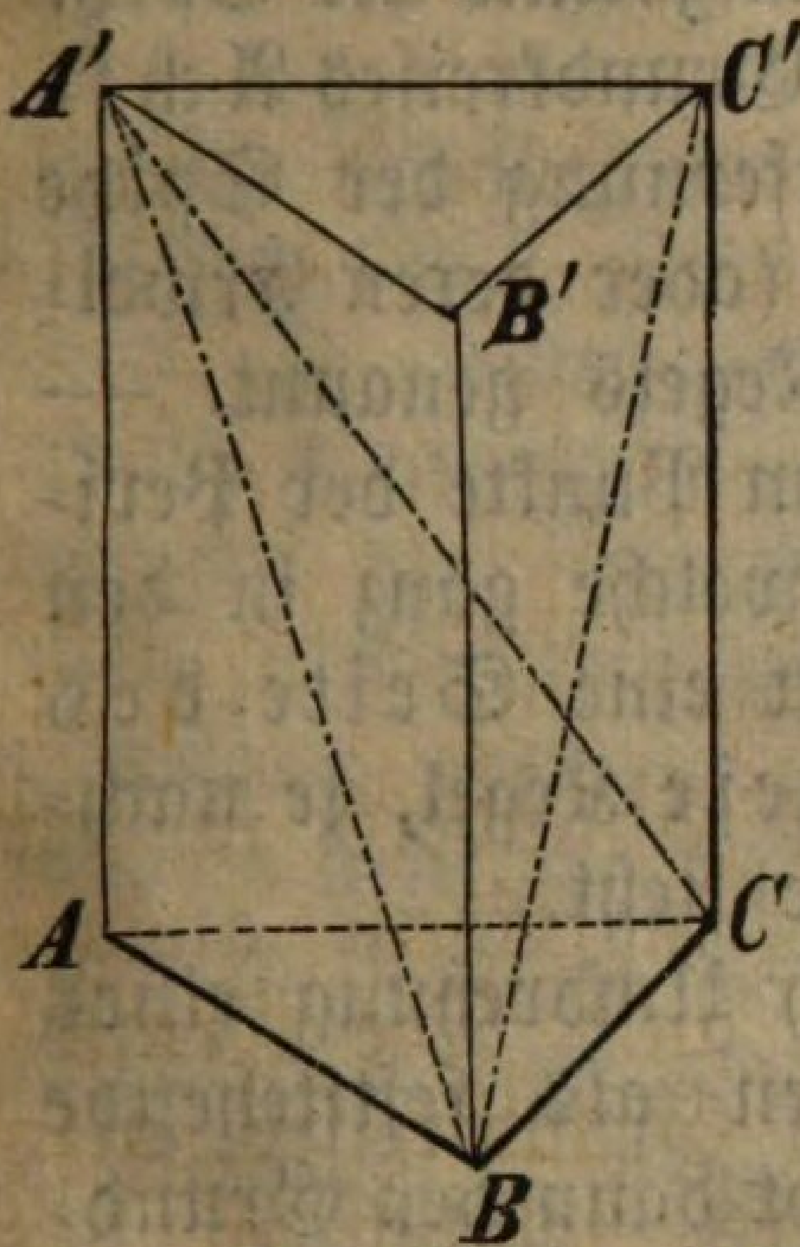


Eine **Pyramide** ist also ein Körper, welcher von einer beliebigen geradlinigen Figur und so viel Dreiecken begrenzt wird, als diese Figur Seiten hat. Jene geradlinige Figur wird **Grundfläche**, jedes der Grenzdreiecke eine **Seitenfläche**, der Punkt, in welchem alle Seitendreiecke, der Grundfläche gegenüber, zusammentreffen, **Spitze**, die lothrechte Entfernung der Spitze von der Grundfläche (oder deren Erweiterung) **Höhe** der Pyramide genannt.

Nach der Zahl der Seitenflächen (oder der Form der Grundfläche) werden die Pyramiden eingetheilt in dreiseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w. — Eine Pyramide heißt regulär, wenn ihre Grundfläche eine reguläre Figur ist. In diesem Falle nennt man die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Grundfläche mit der Spitze, die Achse der Pyramide. Steht die Achse einer regulären Pyramide lothrecht zur Grundfläche, so heißt die Pyramide gerade, sonst schief.

§. 169.

Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind inhaltsgleich (die Grundflächen können dabei ganz verschiedene Form haben). — Nun läßt sich ferner mit Hülfe eines Modelles (oder auch durch



Zertheilen eines aus einer Rübe, einer großen Kartoffel ꝛc. geschnittenen dreiseitigen Prismas) zeigen, daß jedes dreiseitige Prisma (ABC A'B'C') durch zwei Diagonalebenen (A'BC und A'C'B) in drei Pyramiden zerlegt werden kann, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, also gleich sind, und umgekehrt läßt sich beweisen, daß jede dreiseitige Pyramide der dritte Theil eines Prismas ist, mit dem es gleiche Grundfläche und Höhe hat, also gilt folgendes Gesetz:

Der körperliche Inhalt einer jeden Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus Grundfläche und Höhe:

$$\text{Pyr.} = \frac{g \cdot h}{3}$$

(g = Maß der Grundfläche, h = Maß der Höhe).

§. 170.

Wird von einer Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene eine kleinere Pyramide abgeschnitten, so heißt der übrig bleibende Körper eine abgestumpfte Pyramide und die Schnittfläche bildet dann die zweite Grundfläche des Pyramidenstumpfes. Die lothrechte Entfernung der beiden Grundflächen von einander heißt die Höhe des Pyramidenstumpfes.

Bezeichnet bei einer abgestumpften Pyramide h das Maß der Höhe, G das Maß der größeren und g das Maß der kleineren Grundfläche, so ist der Inhalt des Pyramidenstumpfes:

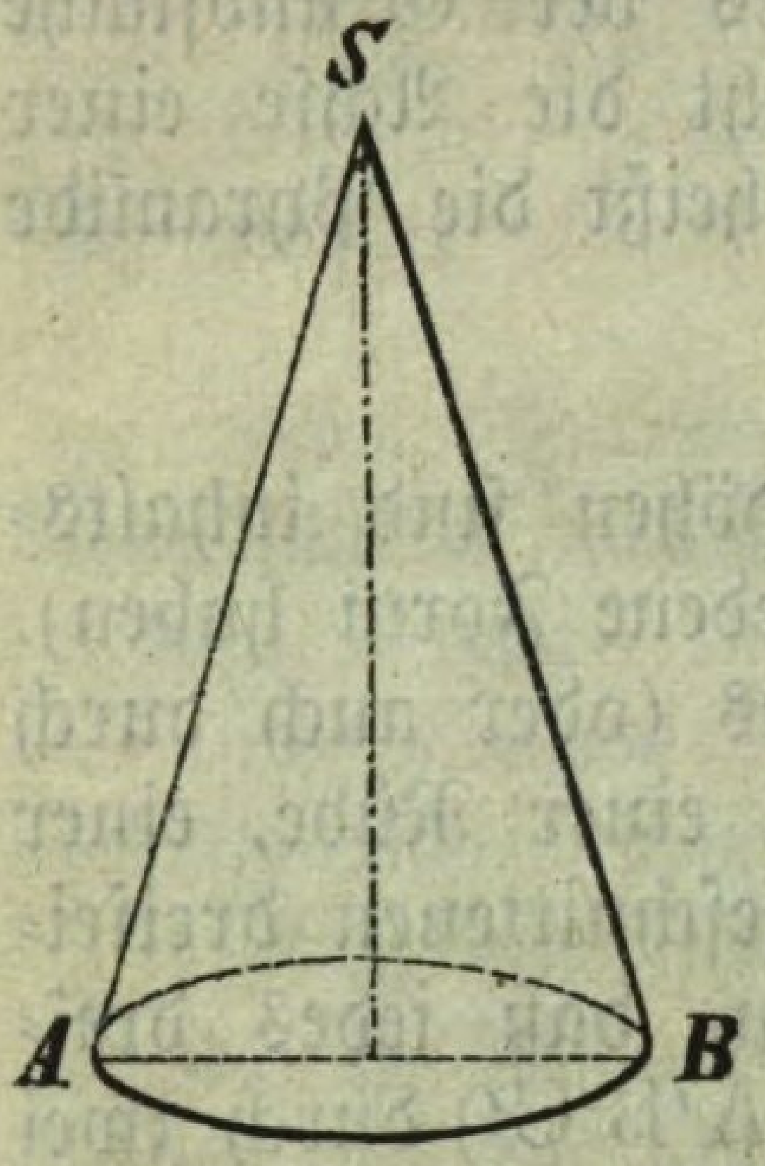
$$\text{Pyr. St.} = \frac{h}{3}\left(G + g + \sqrt{G \cdot g}\right).$$

Vom Kegel.

§. 171.

Denkt man sich an der Peripherie eines Kreises (AB) entlang eine gerade Linie um einen außerhalb der Kreislinie liegenden festen

Punkt (S) bewegt, bis sie die ganze Kreislinie durchlaufen hat, so beschreibt sie eine einfach gekrümmte Fläche, welche im Verein mit jenem Kreise einen Körper (SAB) völlig umschließt. Ein solcher Körper wird Kegel oder Conus genannt.



Ein Kegel ist also ein Körper, welcher von einem Kreise und einer einfach gekrümmten in einen Punkt auslaufenden Fläche begrenzt wird. Jener Kreis wird Grundfläche, die einfach gekrümmte Grenzfläche Seitenfläche oder Mantel, der Punkt, in welchen der Mantel ausläuft Spitze, die Verbindungslinie der Spitze mit dem Centrum des Grundkreises Achse und die senkrechte Entfernung der Spitze von der Grundfläche (oder deren Erweiterung) Höhe des Kegels genannt. — Von der Spitze eines Kegels kann man nach jedem Punkte der Peripherie des Grundkreises eine gerade Linie ziehen, welche ganz in den Mantel desselben hineinfällt; eine solche Linie heißt eine Seite des Kegels. — Man unterscheidet gerade und schiefe Kegel, je nachdem die Achse lothrecht oder schief zur Grundfläche steht.

Den geraden Kegel kann man sich auch durch Umdrehung eines rechtwinkeligen Dreieckes um eine seiner Katheten als feststehende Achse erzeugt denken. Die andere Kathete beschreibt dann den Grundkreis und die Hypotenuse den Mantel des Kegels. — Bei jedem geraden Kegel fallen Achse und Höhe zusammen und alle Seiten sind gleich lang.

Wird ein Kegel von einer Ebene durchschnitten, so heißt die auf dem Mantel sich ergebende, einfach gekrümmte Linie im Allgemeinen ein Kegelschnitt. Ist die Ebene parallel zur Grundfläche, so ist der Durchschnitt ein Kreis, geht sie nicht parallel zur Grundfläche, durchschneidet aber noch den ganzen Mantel, so entsteht eine Ellipse; läuft die Ebene parallel zu einer Seite des Kegels, so heißt der Kegelschnitt eine Parabel. (Ellipsoid, ellipsoidale Höhlung der glatten 12cm Granate. — Flugbahn der Geschosse im luftleeren Raume).

§. 172.

Jeder Kegel kann als eine Pyramide angesehen werden, deren Grundfläche unzählig viele Seiten hat. Hieraus folgt:

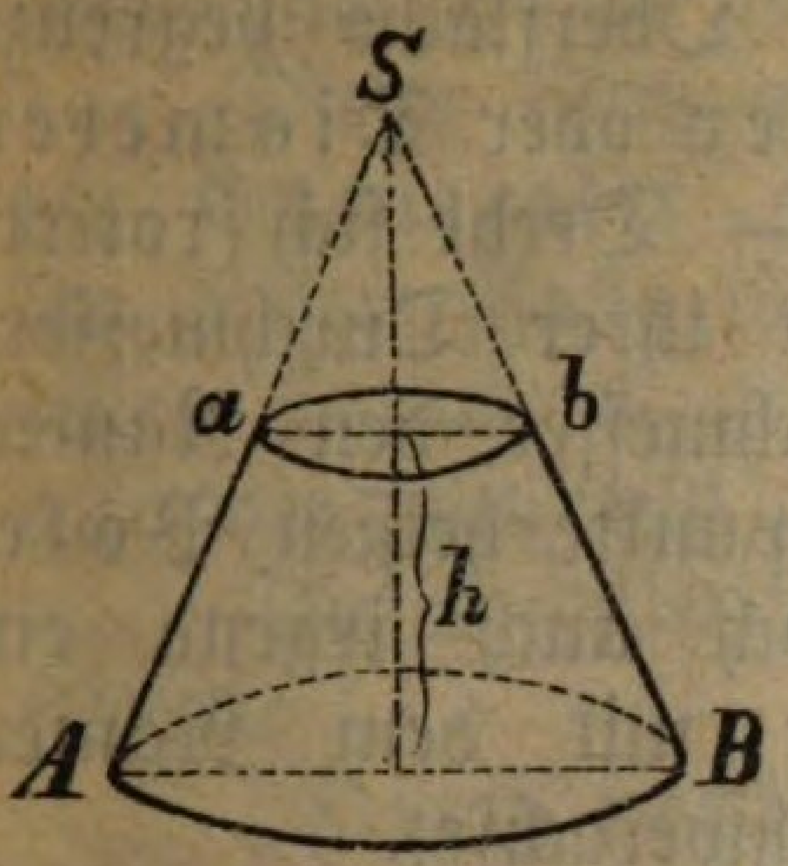
Der körperliche Inhalt eines jeden Kegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus seiner Grundfläche und Höhe.

Mißt der Radius der Grundfläche r und die Höhe h Einheiten irgend eines Längenmaßes, so ist die Grundfläche $= r^2\pi$, also der körperliche Inhalt des Kegels

$$K = \frac{r^2\pi h}{3}.$$

§. 173.

Wird ein Kegel (SAB) parallel seiner Grundfläche durchschnitten, so ist die Durchschnittsfläche (ab) ein Kreis und der zwischen diesem



Kreise und der Grundfläche liegende Theil des Kegels (ABab) wird ein abgestumpfter Kegel genannt.

Den körperlichen Inhalt eines Kegelstumpfes findet man nach folgender Formel:

$$K \cdot St. = \frac{h\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

(h = Maß der Höhe, R = Maß des Radius vom größeren und r = Maß des Radius vom kleineren Grenzkreise).

§. 174.

1) Denkt man sich den Mantel eines geraden Kegels in der Richtung einer Seite durchschnitten und dann in eine Ebene ausgebreitet, so nimmt er die Gestalt eines Kreisausschnittes an, dessen Radius gleich der Seite des Kegels und dessen Bogen gleich dem Umfange der Grundfläche ist. Nun ist jeder Kreisausschnitt an Inhalt einem Dreiecke gleich, welches die Länge des Kreisbogens zur Grundlinie und den Halbmesser des Kreisausschnittes zur Höhe hat; also wird man den Flächeninhalt eines solchen Kegelmantels finden, wenn man den Umfang des Grundkreises mit der Länge einer Seite multiplicirt und das erhaltene Product durch 2 dividirt. Bezeichnet r den Radius der Grundfläche und s eine Seite des Kegels, so ist der Umfang des Grundkreises $= 2 r \pi$, folglich der Kegelmantel $M = \frac{2 r \pi s}{2}$, oder wenn man durch 2 hebt:

$$M = r \cdot \pi \cdot s.$$

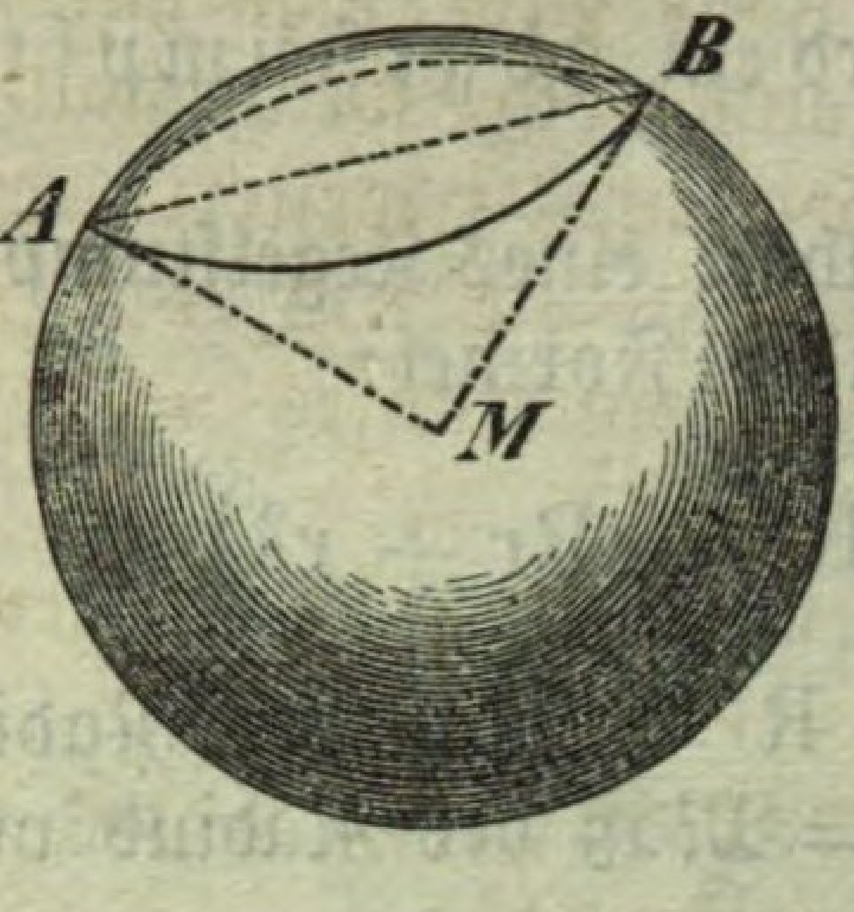
2) Der Mantel eines Kegelstumpfes ist gleich einem Trapeze, dessen parallele Seiten gleich den Peripherien der beiden Grenzkreise und dessen Höhe gleich einer Seite des abgestumpften Kegels ist.

Von der Kugel.

§. 175.

1) Wird ein Halbkreis um seinen Durchmesser herumgedreht, bis er wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so beschreibt die halbe Kreislinie eine doppelt gekrümmte Fläche, deren Punkte sämmtlich gleich weit von dem Mittelpunkte des Halbkreises entfernt sind. Eine solche Fläche heißt Kugelfläche und der von ihr eingeschlossene Körper wird Kugel oder Sphära genannt.

Eine Kugel ist also ein Körper, welcher von einer einzigen doppelt gekrümmten Fläche begrenzt wird, deren Punkte sämmtlich von einem innerhalb der Kugel liegenden Punkte gleich weit entfernt sind. Letzterer Punkt (M) wird Mittelpunkt, jene Fläche Oberfläche, jede gerade Linie (MA, MB) vom Mittelpunkte bis zur Oberfläche gezogen, Radius oder Halbmesser und jede gerade Linie, welche



durch den Mittelpunkt geht und auf beiden Seiten von der Oberfläche begrenzt ist, ein Durchmesser oder Diameter der Kugel genannt. — Dreht sich (rotirt) eine Kugel um einen ihrer Durchmesser, so erhält dieser Durchmesser den Namen Achse und seine Endpunkte heißen Pole. Mitunter wird jedoch auch irgend ein anderer Durchmesser mit dem Namen Achse bezeichnet (Schwerachse).

Haben zwei Kugeln (oder Kugeloberflächen) denselben Mittelpunkt, so werden sie concentrisch und wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben, excentrisch genannt.

Anmerkung. Ein nahe liegendes Beispiel solcher Kugeln bieten uns die Hohlkugeln der Artillerie. Werden diese so gegossen, daß der Mittelpunkt der Höhlung mit dem Mittelpunkte der äußeren Kugeloberfläche zusammenfällt, so sind sie concentrisch; wird aber der Kern, d. i. der Körper, welcher während des Gusses den Raum der späteren Höhlung einnimmt, absichtlich zur Seite verschoben, so entstehen excentrische Kugeln. Bei diesen heißt die Entfernung der beiden Kugelmittelpunkte Kernverschiebung, nicht Excentricität, wie man meinen könnte. Unter letzterer versteht man die Entfernung des Schwerpunktes der Kugel vom Mittelpunkte der äußeren Kugeloberfläche.

2) Alle Radien und daher auch alle Durchmesser einer Kugel sind gleich.

3) Wird eine Kugel von einer Ebene (AB) durchschnitten, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis. Geht dabei die Ebene durch den Mittelpunkt, so ist der Durchschnitt ein größter Kreis der Kugel. — Jeder Kugelkreis zerlegt die Kugel in zwei Theile, welche Kugelabschnitte genannt werden; zugleich wird auch die Kugeloberfläche in zwei Stücke getheilt, von denen jedes eine Kalotte heißt. Geht der Kugelkreis durch den Mittelpunkt der Kugel hindurch, so sind die beiden entstehenden Kugelabschnitte congruent und heißen daher Halbkugeln. Denkt man sich aus einer Kugel durch einen Radius, der sich um den Mittelpunkt als festen Drehpunkt an der Peripherie eines Kugelkreises entlang bewegt, ein Stück herausgeschnitten, so heißt dasselbe ein Kugelausschnitt oder Kugelsector (MAB). (Wodurch wird also ein Kugelsector begrenzt?) — Jeder Theil der Kugeloberfläche, welcher von zwei parallelen Kugelkreisen begrenzt wird, heißt Kugelzone; der zwischen beiden Kreisen liegende Theil der Kugel selbst wird eine körperliche Kugelzone genannt.

Die Höhe einer Kalotte und eines Kugelabschnittes ist das Loth, welches auf der Ebene des begrenzenden Kreises im Mittelpunkte errichtet und bis zum Durchschnitt mit der Kugelfläche verlängert wird. — Unter Höhe einer Kugelzone versteht man die lothrechte Entfernung beider Grenzkreise von einnander.

§. 176.

1) Jede Kalotte und jede Kugelzone ist gleich dem Mantel

eines geraden Cylinders, welcher den größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und die Höhe der Kalotte oder Zone zur Höhe hat.

Dieser Satz gilt allgemein, also auch dann noch, wenn man sich die Kalotte oder Zone zur ganzen Kugeloberfläche erweitert denkt. In diesem Falle ist, wenn man den Kugelradius $= r$ setzt, die Höhe jenes Cylinders $= 2r$, der Umfang seines Grundkreises $= 2r\pi$, also des Mantels Inhalt $= 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi$.

Diesen Werth merkt man sich am leichtesten nach folgender Regel:

„Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groß als die Fläche eines größten Kreises der Kugel.

Formel: $O = 4r^2\pi$.

2) Der körperliche Inhalt jedes Kugelausschnittes ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche gleich der Kalotte und deren Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Denkt man sich einen Kugelausschnitt erweitert bis er die ganze Kugel umfaßt, so ist seine Kalotte zur Oberfläche der Kugel geworden. Hieraus folgt:

„Der körperliche Inhalt einer Kugel wird gefunden, wenn man ihre Oberfläche mit ihrem Radius multiplicirt und das Product durch 3 dividirt. Bezeichnet r den Halbmesser und K den Inhalt einer Kugel, so ist ihre Oberfläche $= 4r^2\pi$, also $K = \frac{4r^2\pi r}{3} = {}^4/_3\, r^3\pi$. Daher die Formel:

$$K = {}^4/_3\, r^3\pi.$$

3) Sind p und q die Radien der Grundflächen einer körperlichen Kugelzone von der Höhe h, dann ist der Inhalt derselben:

$$J = \frac{h\pi}{6}\left(3p^2 + 3q^2 + h^2\right)$$

4) Der Inhalt eines Kugelabschnittes, dessen Höhe $= h$ und dessen Radius des Begrenzungskreises $= p$ Maßeinheiten mißt, ist

$$J = \frac{h\pi}{6}\left(3p^2 + h^2\right)$$

oder, wenn r der Halbmesser der Kugel,

$$J = \frac{h^2\pi}{3}\left(3r - h\right)$$

§. 177.

Berechnung des körperlichen Inhaltes anderer Körper:

1) Soll der Inhalt eines Körpers gefunden werden, welcher eine andere Form hat, als die vorstehend betrachteten Körper, so denke man sich denselben durch Ebenen — genau oder oft nur annähernd — in solche Körper zerlegt, deren Inhalt nach den vorstehenden Regeln gefunden werden kann, berechne die einzelnen Theile und addire dann die erhaltenen Resultate.

2) Weicht jedoch die Oberfläche eines Körpers (z. B. einer Bildsäule) so bedeutend von der Ebene, der Cylinder-, Kegel- und Kugelfläche ab, daß eine Berechnung auf die vorbeschriebene Weise ohne erhebliche Ungenauigkeit nicht ausführbar ist, so wird in vielen Fällen folgendes Verfahren praktisch sein:

Man lege den Körper in ein prismatisches Gefäß (einen rechteckigen Kasten), übergieße ihn vollständig mit Wasser oder einer anderen den Körper nicht angreifenden Flüssigkeit und merke sich, wie hoch die Flüssigkeit in dem Gefäße steht. Hierauf nehme man den Körper wieder vorsichtig heraus und berechne nun den Inhalt des Raumes, welcher durch das Fallen des Wassers 2c. leer geworden ist. Dieser Inhalt ist dann offenbar gleich dem Inhalte des Körpers. An Stelle der Flüssigkeit kann auch feiner Sand, Gries 2c. angewendet werden.

Anhang.

Abstecken von Linien und Winkeln auf dem Felde und Auflösen einiger einfachen Aufgaben mittelst Kette und Stäben.

§. 178.

Die Schwere wirkt an jedem Punkte der Erde in einer bestimmten Richtung. Jede Linie, welche diese Richtung angiebt, heißt Schwerlinie oder Lothlinie, auch senkrechte oder verticale Linie. Wird durch eine verticale Linie eine Ebene hindurchgelegt, so erhält man eine Verticalebene. Steht eine Linie oder Ebene lothrecht zur Richtung der Schwere, so wird sie eine Horizontallinie, eine Horizontalebene genannt.

Da alle Schwerlinien im Allgemeinen nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet sind, so können sie, streng genommen, nicht parallel gehen; die Lothlinien von zwei verschiedenen Punkten der Erdoberfläche bilden vielmehr am Mittelpunkte der Erde (oder in dessen Nähe) einen Winkel. Dieser Winkel ist aber bei geringen Entfernungen so klein (er ist erst bei $^1/_4$ Meile = 1 Minute), daß er in der Praxis gewöhnlich unbeachtet bleiben darf.

Zur Bestimmung der verticalen Richtung wird das Bleiloth (Senkblei), zur Bestimmung der horizontalen Richtung die Setzwage, das Dosenniveau, der Libellenquadrant benutzt.

§. 179.

Jede Verticalebene schneidet die Oberfläche der Erde in einer Linie, deren Projection auf die Horizontalebene eine gerade Linie ist. Hierauf gründet sich der Sprachgebrauch, welcher alle Punkte einer solchen Linie als in gerader Richtung liegend bezeichnet.

Eine gerade Linie auf dem Felde abstecken heißt, auf der Erdoberfläche Punkte bestimmen und bezeichnen, welche in derselben

Verticalebene liegen. Ebenso wird bei dem Messen einer auf der Erdoberfläche befindlichen Linie nicht das Maß dieser Linie selbst, sondern das Maß ihrer Horizontalprojection bestimmt.

Eine Linie traciren heißt, ihre Richtung dadurch sichtbar machen, daß man auf dem Erdboden eine Vertiefung (Furche) mittelst Hacke, Spaten ꝛc. herstellt. (Tracirleine, Trace.)

Zum Bezeichnen von Punkten der Erdoberfläche benutzt man: Meßfahnen, Fluchtstäbe, Pfähle ꝛc.

§. 180.

Aufgabe: In der Verlängerung einer geraden Linie, deren Endpunkte A und B durch Meßflaggen (oder Objecte ꝛc.) bezeichnet sind, andere Punkte abzustecken.

Lösung: Man stecke nach dem Augenmaße in der Verlängerung von AB eine Meßflagge C lothrecht in die Erde. Dann gehe man einige Schritte in dem Alignement (der Richtung) AB zurück und visire über gleichliegende (d. h. auf einerlei Seite liegende) Kanten der Meßflaggen über C und B nach A hin. Trifft die Visirlinie die Meßflagge A, so ist die Aufgabe gelöst, ist dies nicht der Fall, so wird der Standpunkt der Flagge C so lange verbessert, bis die Flaggen A, B und C sich decken.

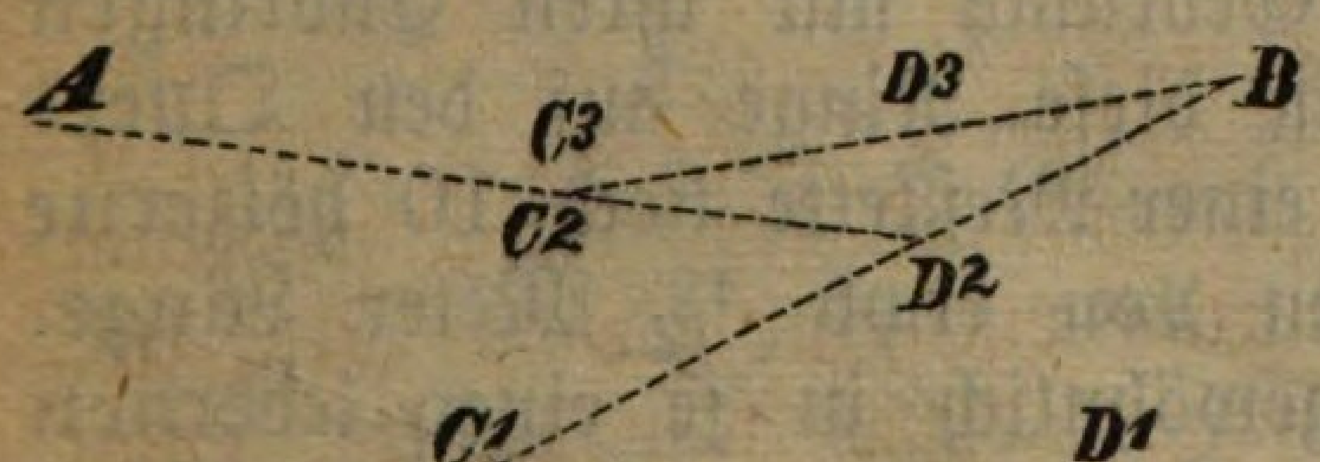
§. 181.

Aufgabe: In einer durch zwei Meßflaggen ꝛc. A und B bezeichneten geraden Linie Zwischenpunkte abzustecken:

a. wenn man von A nach B freie Aussicht hat und sich in A (oder B) aufstellen kann.

Lösung: Ein Gehülfe stellt eine Meßflagge C zwischen A und B lothrecht nieder. Er tritt dabei seitwärts und wendet sein Gesicht dem Einrichtenden zu. Dieser ist nach A oder B gegangen, visirt über A und B und prüft, ob C in dieser Visirlinie steht. Ist dies nicht der Fall, so giebt er dem Gehülfen so lange durch Winken mit der Hand zu verstehen, daß er die Flagge mehr rechts oder links setzen soll, bis A, C und B sich genau decken. Dann winkt er niederwärts, worauf der Gehülfe die Flagge lothrecht in die Erde fest einsteckt.

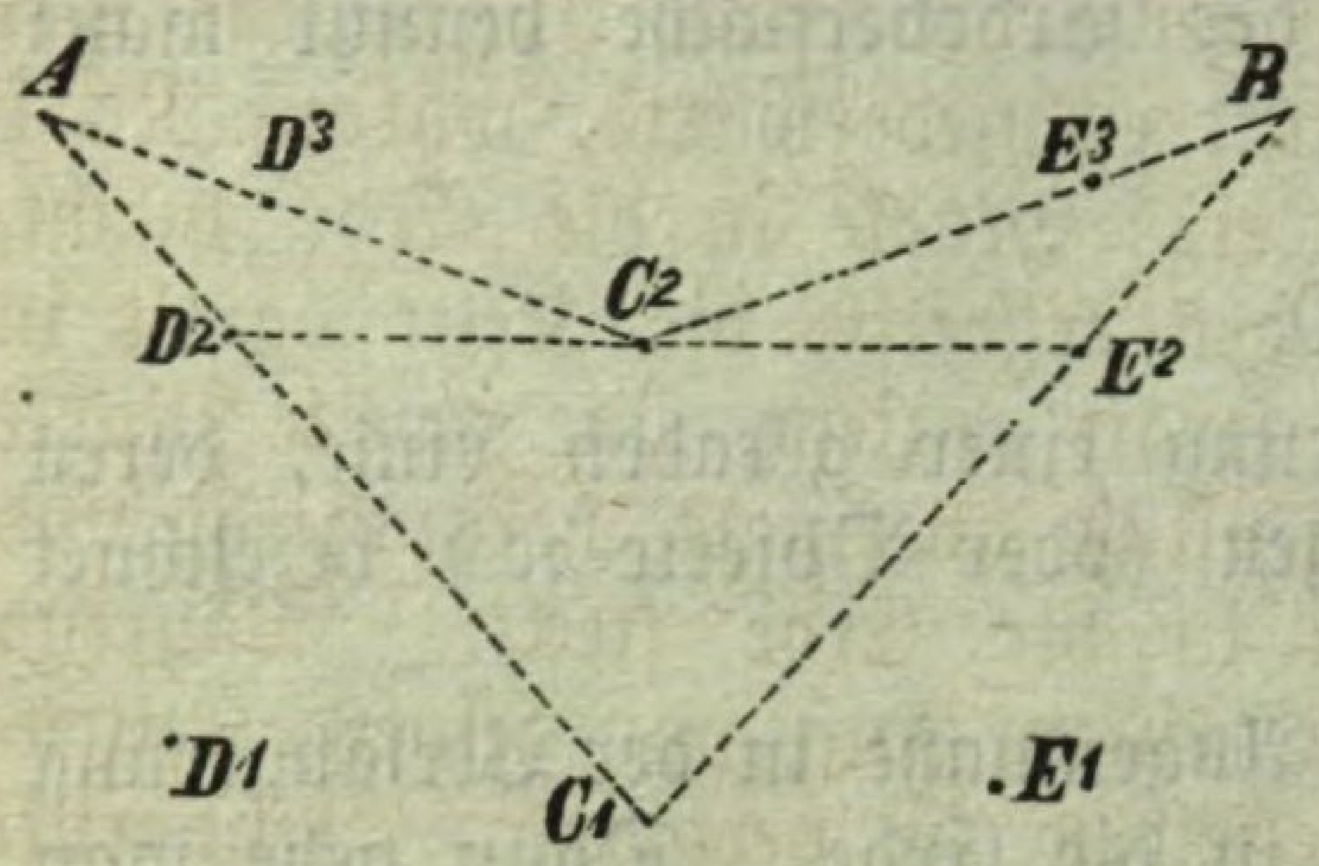
b. Wenn sich zwischen A und B eine Terrainerhebung befindet, welche das Visiren von A nach B verhindert und zwei Zwischenpunkte C und D nöthig sind.



Lösung: Zwei Gehülfen C und D stellen sich mit Flaggen ungefähr in dem Alignement AB so auf, daß C nach B und D nach A sehen kann. Nun richtet C die Flagge des D nach B ein, so daß sie etwa nach D^2 zu stehen kommt, hierauf richtet D über D^2 die Fahne des C nach A ein, so daß sie dann vielleicht in C^2 steht u. s. w., bis beide Flaggen sich in dem

Alignement AB befinden. Dies erkennen die Flaggenträger daran, daß zuletzt bei Anwendung des beschriebenen Verfahrens jeder der Visirenden die einzurichtende Flagge schon in der gewünschten Richtung vorfindet.

c. Wenn man von A nach B keine freie Aussicht hat und drei Zwischenpunkte, C, D und E nöthig sind.



Lösung: Drei Fahnenträger C, D und E, wovon C der mittlere sein mag, stellen sich ungefähr in dem Alignement AB so auf, daß C nach A und B, sowie daß D nach E sehen kann. Nun richtet C die Flagge des D nach A und die des E nach B ein. Die neuen Standpunkte der Flaggen mögen D^2 und E^2 heißen. Dann richtet D von seinem neuen Standpunkte aus die Fahne des C nach E^2 ein, so daß sie nach C^2 zu stehen kommt, und so fort, bis sich alle drei Fahnen genau in dem Alignement AB befinden.

§. 182.

Die Länge von Linien wird bestimmt:

a. durch Abschreiten, wenn eine große Genauigkeit nicht erforderlich ist, oder Zeit und Umstände kein anderes Hülfsmittel gestatten.

b. durch wirkliches Messen. Dazu benutzt man entweder Maßstäbe oder die Meßkette, auch wohl ein Meßband.

Die Einrichtung eines Maßstabes kann als bekannt vorausgesetzt werden.

Die Meßkette besteht aus Gliedern von starkem Eisen- oder Stahldraht, welche durch messingene Ringe verbunden sind. Die ganze Kette ist in der Regel 2^{Dm} lang; jedes Glied mißt von Mitte zu Mitte der Verbindungsringe $^1/_2{}^m$. Ein größerer, gewöhnlich rhomboidalisch gestalteter Ring scheidet die ganze Kette in zwei Hälften (Dekameter), von welchen jede nochmals durch einen kleineren, wieder etwas anders geformten Ring in Längen von 5^m abgetheilt wird. An den beiden Enden der Kette befinden sich größere Ringe zur Aufnahme der Kettenstäbe. Dieses sind hölzerne, mit einem eisernen spitzen Schuh und einem dicht darüber befindlichen Querstift versehene Stäbe, von etwa Brusthöhe. Sie dienen zur bequemeren Handhabung der Kette, welche beim Gebrauch mit ihren Endringen so auf die Stäbe gehängt wird, daß diese Ringe auf den Querstiften ruhen. Außerdem gehören zu einer Meßkette noch 10 hölzerne oder eiserne Markir- oder Zählstäbchen von etwa $^1/_2$ Meter Länge. Meßkette und Zählstäbchen werden gewöhnlich in je einer ledernen Kapsel aufbewahrt.

§. 183.

Aufgabe: Eine gerade Linie AB mittelst der Kette zu messen.

Lösung: Die Kette wird von zwei Mann, den sogenannten Kettenziehern, gehandhabt. Der, welcher vorangehen soll (Nr. 1), hängt die Lederkapsel mit den Zählstäbchen, der andere (Nr. 2) die Kapsel, in welcher sich die Kette befand, um. Nun beginnt das Messen. Nr. 1 geht in der Richtung AB vorwärts, bis die Kette mäßig straff ausgebreitet ist, während Nr. 2 seinen Kettenstab in den Anfangspunkt A der Linie einsetzt und dann den Kettenstab des Nr. 1 durch Winken mit der Hand genau in das Alignement AB einrichtet. Ist dies geschehen, so winkt er niederwärts, worauf Nr. 1 durch Eindrücken seines Kettenstabes eine Marke in die Erde macht, dann den Kettenstab mit beiden Händen ergreift, die Kette damit in die Höhe hebt, in der Richtung AB straff anzieht, eine zweite Marke in die Erde drückt, hierauf den Kettenstab abermals herauszieht und endlich statt seiner ein Zählstäbchen in die Erde steckt. Während Nr. 1 die Kette anzieht, setzt Nr. 2 einen Fuß vor seinen Kettenstab, um dadurch ein Fortrücken desselben zu verhüten. Jetzt ruft Nr. 1: „Auf!“ oder „Los!“, schreitet in der Richtung AB vorwärts und Nr. 2 folgt, bis er an das Zählstäbchen kommt. Er ruft dann: „Halt!“ steckt das Zählstäbchen in seine Kapsel und den Kettenstab statt dessen in die Erde, richtet den Kettenstab von Nr. 1 wieder ein und so fort. Sind die 10 Zählstäbchen von Nr. 1 verbraucht, so wechseln beide Kettenzieher ihre Kapseln. Jeder Wechsel der Zählstäbchen muß notirt werden. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis Nr. 1 an dem Endpunkte B ankommt oder darüber hinausgehen muß, um die Kette straff anziehen zu können. Die Länge der Linie AB läßt sich nun leicht berechnen. Um zuletzt noch die Neu-Zolle (Centimeter) messen zu können, muß man noch einen Zollstock zur Hand haben.

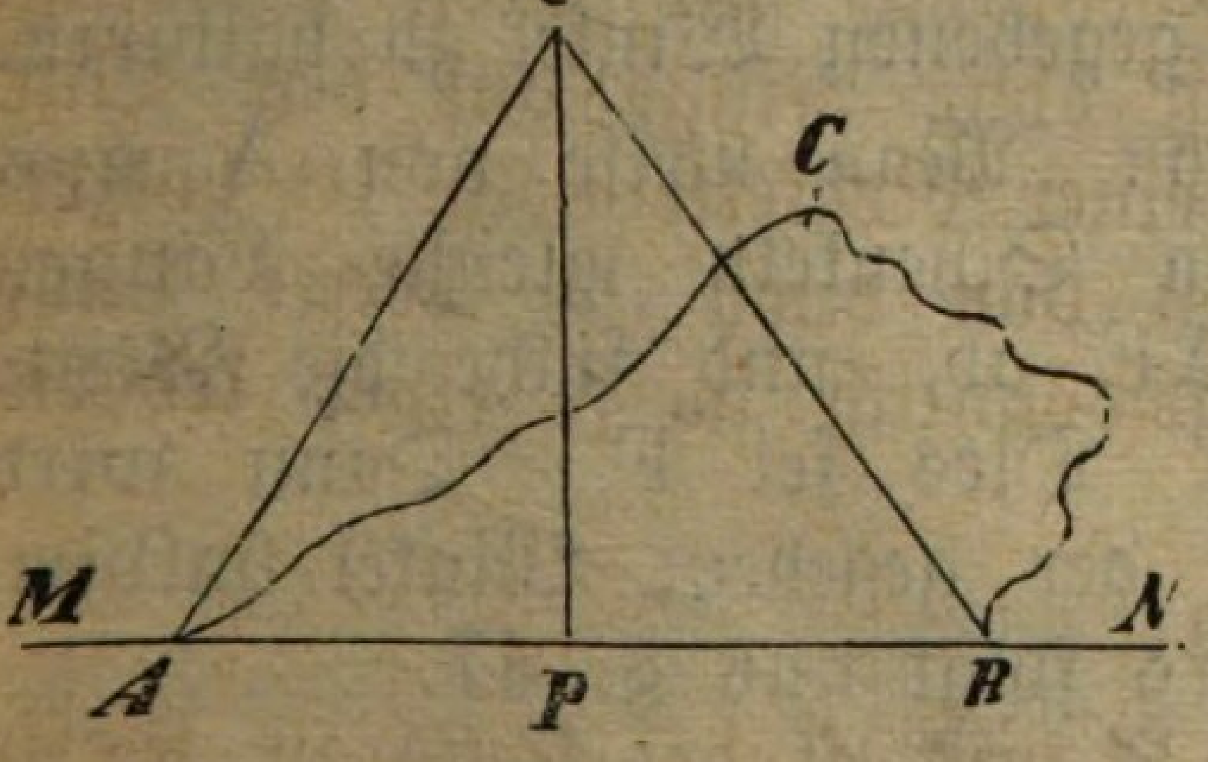
Kommen in der zu messenden Linie kleine Vertiefungen vor, so spannt man die Kette horizontal darüber und unterstützt sie nöthigenfalls.

Kleine in der Linie AB liegende Hindernisse (Sümpfe, Teiche) werden rechtwinkelig umgangen.

Soll das Maß der Linie AB sehr genau bestimmt werden, so wird sie mehrmals mit möglichster Genauigkeit gemessen und aus den erhaltenen Maßen das arithmetische Mittel berechnet.

§. 184.

Aufgabe: Auf dem Felde in dem Punkte P der tracirten oder durch Meßfahnen 2c. bezeichneten Linie MN ein Loth zu errichten.

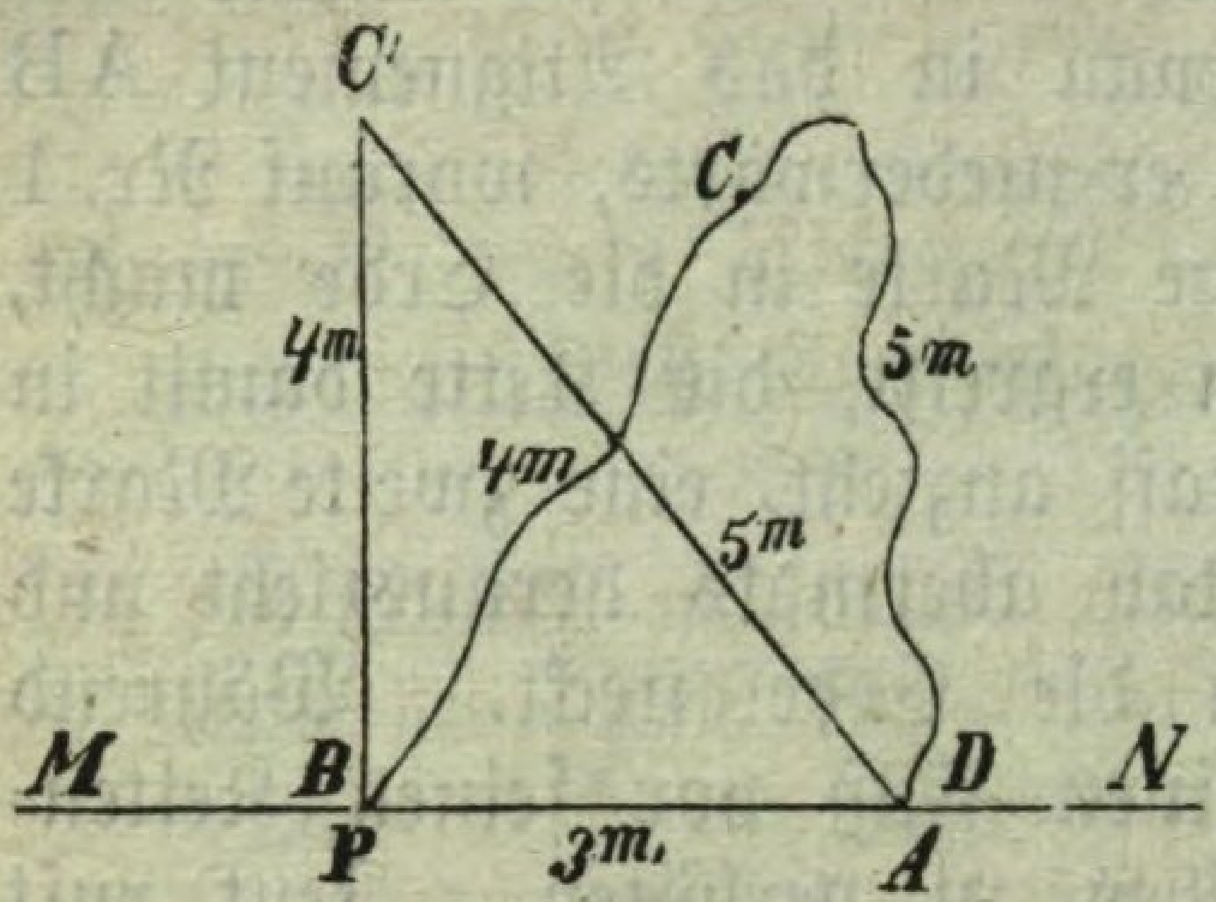


1. Lösung: Man messe mit der Kette oder einer Schnur von P aus auf MN nach beiden Seiten hin gleiche Längen PA = PB ab, befestige die Endpunkte der Kette (Schnur) in A und B, ergreife den Mittelpunkt C der Kette (Schnur) und ziehe dieselbe straff an. Dann ist PC¹ das ver-

langte Perpendikel, welches nach Bedürfniß tracirt oder auch nur dadurch bezeichnet wird, daß man in C' eine Flagge, einen Pfahl rc. in die Erde steckt.

Beweis folgt aus §. 47.

2. Lösung: Man bezeichne auf einer Leine (gewöhnlich durch Knüpfen von Knoten) die Längen von 3^m, 4^m und 5^m. Der Anfangspunkt möge durch A, die darauf folgenden Grenzpunkte durch B, C und D bezeichnet werden. Hierauf halte man den Punkt B in P und die Punkte A und D vereinigt in der Linie MN so fest, daß AB straff liegt. Wird nun die Leine an dem Punkte C erfaßt und straff angezogen, so ist C'P das verlangte Loth.

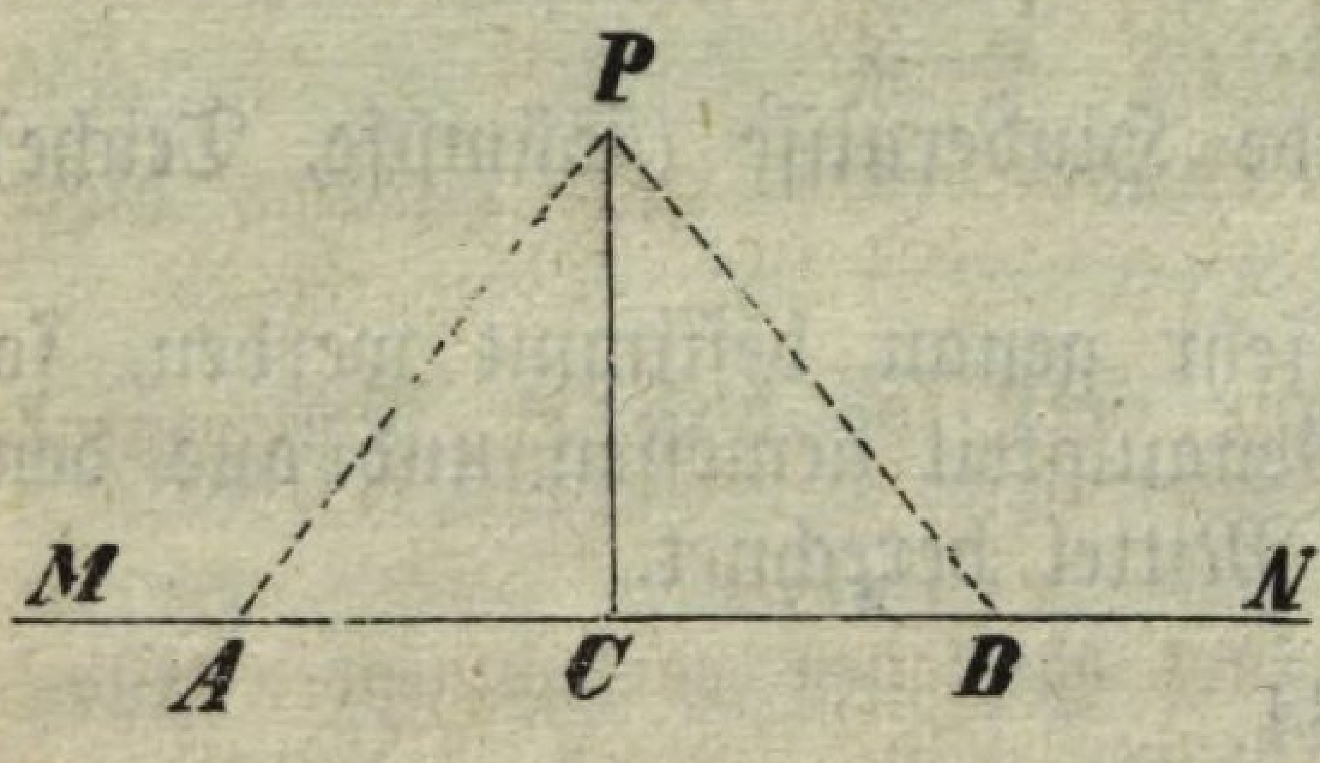


Statt der Maße 3^m, 4^m, 5^m kann man auch jede andere drei Längen, welche sich wie 3 : 4 : 5 verhalten, also namentlich alle Vielfachen dieses Verhältnisses: 6^m, 8^m, 10^m oder 9^m, 12^m, 15^m oder 12^m, 16^m, 20^m u. s. w. anwenden. Je größer man die Längen wählt, desto genauer wird das Resultat. Hat man eine Meßkette zur Hand, so wird man statt der Leine lieber diese benutzen und dann am besten die Maße 9, 12 und 15 Halbmeter nehmen.

Beweis folgt aus §. 81.

§. 185.

Aufgabe: Auf dem Felde von einem Punkte P aus ein Loth auf eine gegebene Linie MN zu fällen.

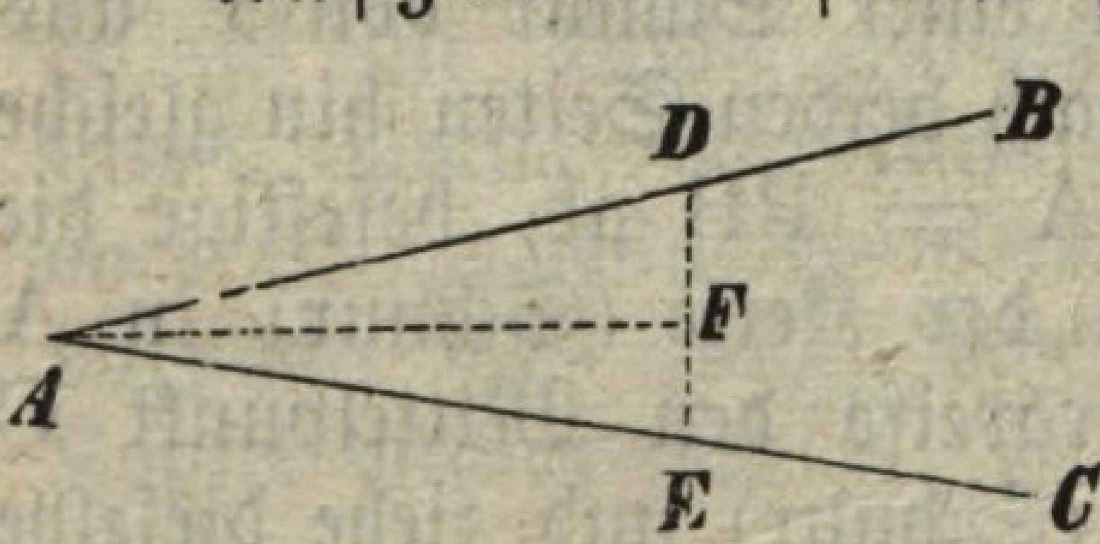


Lösung: Man bestimme mit Hülfe einer Leine oder der Meßkette PA = PB und suche die Mitte von AB. Dies sei C. Dann ist PC das verlangte Loth.

Beweis folgt aus §. 47.

§. 186.

Aufgabe: Auf dem Felde einen gegebenen Winkel zu halbiren.



Lösung: Man messe von A aus auf beiden Schenkeln gleiche Längen AD = AE ab, und suche die Mitte von DE. Dies sei F. Dann wird durch AF der gegebene Winkel halbirt.

Beweis folgt aus §. 47.

Auch kann ganz nach §. 57 construirt werden, wenn die Kreisbögen mittelst einer Schnur, an welche ein spitzer Stab 2c. befestigt ist, tracirt werden.

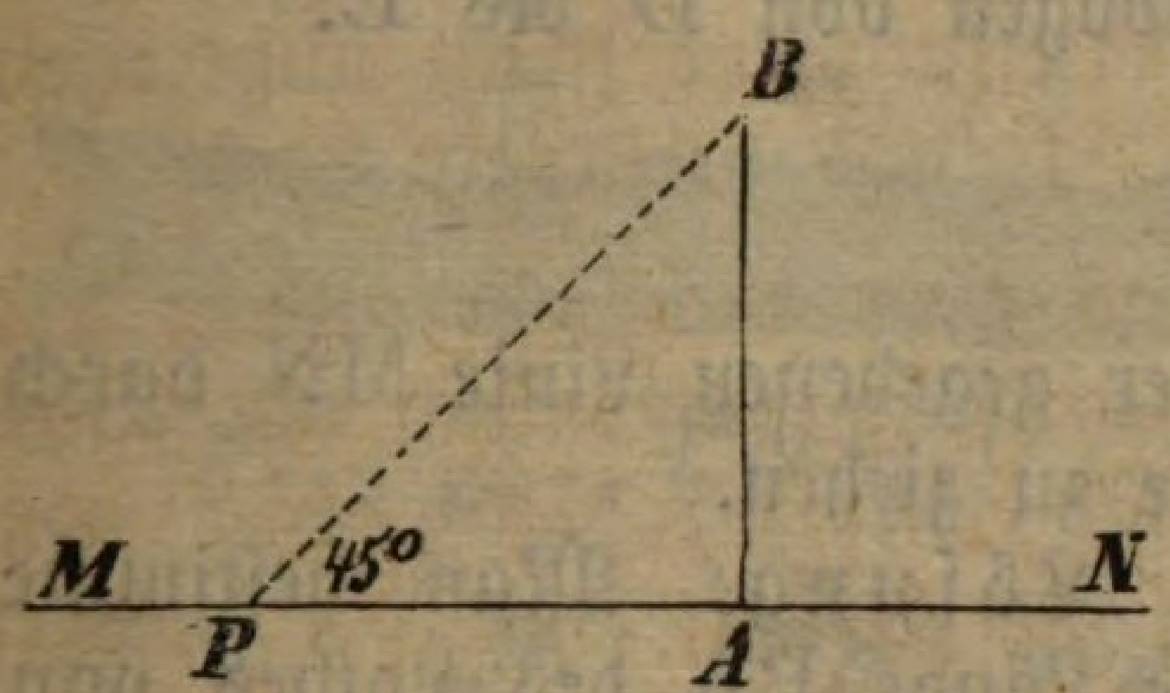
§. 187.

Aufgabe: Auf dem Felde in dem Punkte P der Linie MN einen Winkel von 45° abzustecken.

1. Lösung: Man errichte in P auf MN einen Perpendikel und halbire den so erhaltenen rechten Winkel nach §. 186.

Beweis selbstverständlich.

2. Lösung: Man errichte in einem beliebigen Punkte der MN, z. B. in A ein Loth und messe auf demselben AB = PA ab. Der Winkel BPA ist dann gleich 45°.



Beweis: $\measuredangle P + \measuredangle B = 90^0$, Nun ist $\measuredangle P = \measuredangle B$ (§. 39. a) folglich $\measuredangle P = \frac{90^0}{2} = 45^0$.

§. 188.

Aufgabe: Auf dem Felde in dem Punkte P der Linie MN einen Winkel:

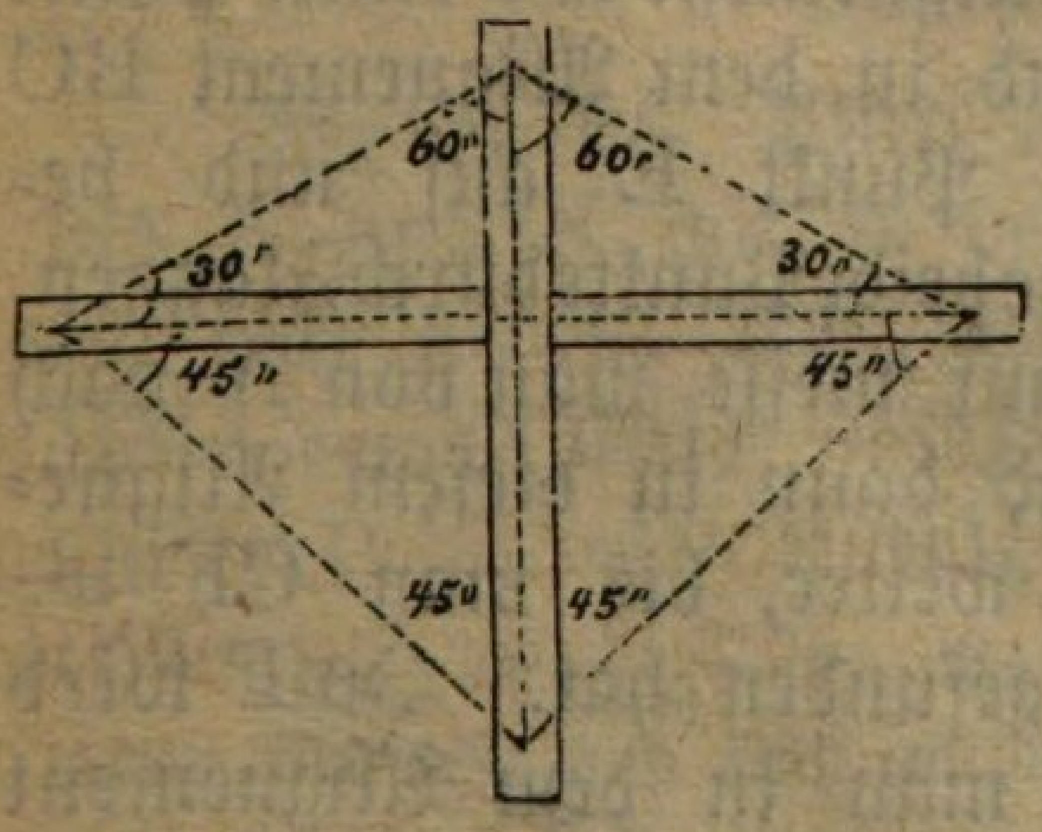
a. von 60°, b. von 30°, c. von 120° abzustecken.

Lösung: a. Construire mit Hülfe einer Leine (oder der Meßkette) ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Ecke in P und dessen eine Seite in der Richtung MN liegt (§. 39. b. 2).

b. Construire erst einen Winkel von 60° und halbire diesen alsdann.

c. Construire einen Winkel von 60° so, daß er Nebenwinkel von dem gesuchten Winkel wird (§. 22).

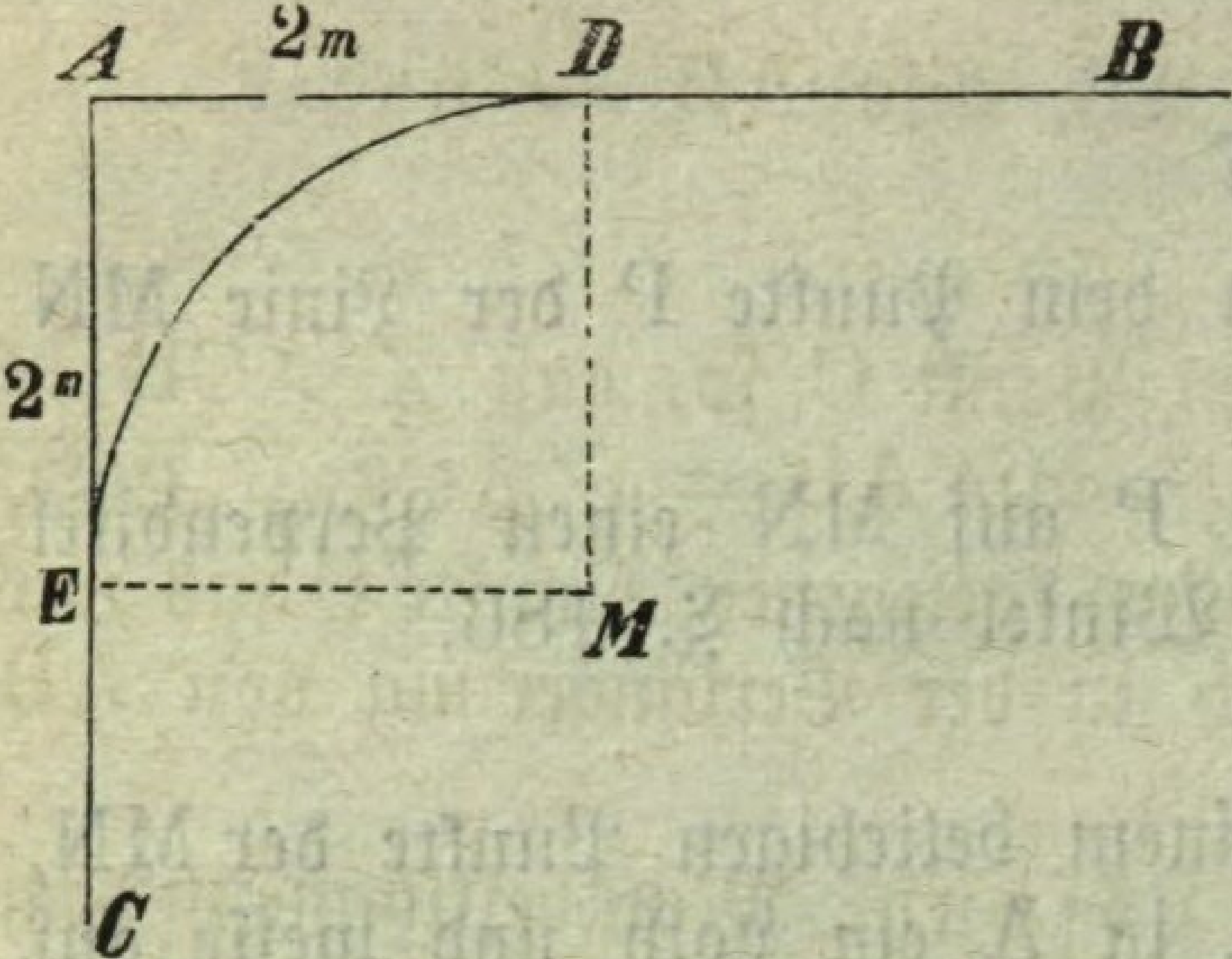
Anmerkung. Zum Abstecken der am häufigsten vorkommenden Winkel kann man sich auch eines leicht herzustellenden Winkelkreuzes bedienen. Es werden dazu zwei Lattenstücke rechtwinkelig übereinander genagelt und an den Ecken der vier Arme Stifte senkrecht so aufgesetzt, daß drei gleichweit vom Kreuzungspunkte entfernt sind, die Entfernung des vierten vom Kreuzungspunkte aber halb so groß ist, als seine Entfernung von jedem zunächstliegenden Stifte. Durch diese einfache Vorrichtung kann man leicht und ziemlich genau Winkel von 30°, 45°, 60°, 75°, 90° und 120° abstecken.



Um das Winkelkreuz bequem handhaben zu können, wird es gewöhnlich noch auf einen Stab als ein Stativ befestigt.

§. 189.

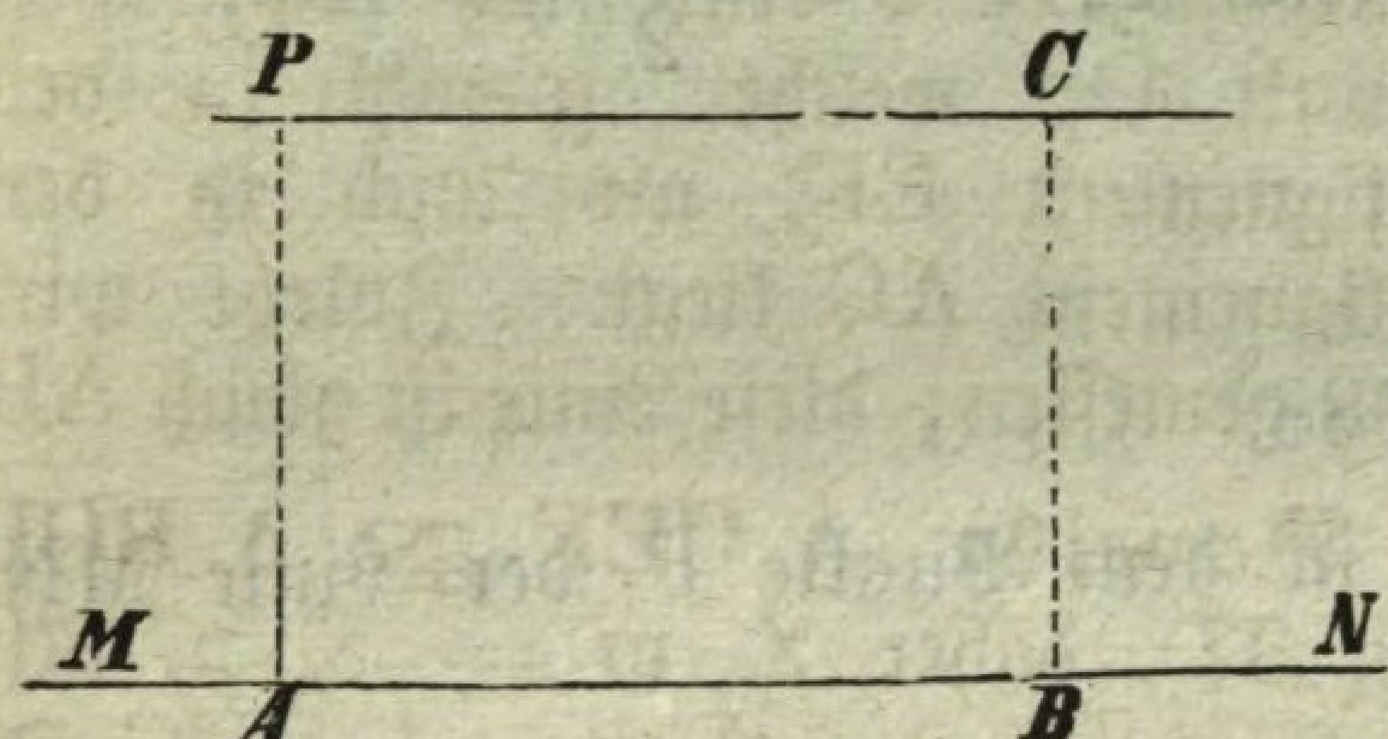
Aufgabe: Auf dem Felde die Spitze eines gegebenen Winkels BAC abzurunden.



Lösung: Die Abrundung kann mit jedem beliebigen Halbmesser geschehen. Soll sie z. B. mit 2 Meter ausgeführt werden, so messe man AD und AE = 2 ^{m} ab, errichte in D auf AB und in E auf AC ein Loth und beschreibe dann von dem Durchschnittspunkte M beider Lothe mit 2 Meter einen Kreisbogen von D bis E.

§. 190.

Aufgabe: Auf dem Felde zu einer gegebenen Linie MN durch einen bestimmten Punkt P eine Parallele zu ziehen.



Lösung: Man bestimme die Länge PA des Lothes von P auf MN, errichte in einem beliebigen anderen Punkte B der Linie MN ein Loth und messe BC = PA ab. Dann ist PC ∦ MN.

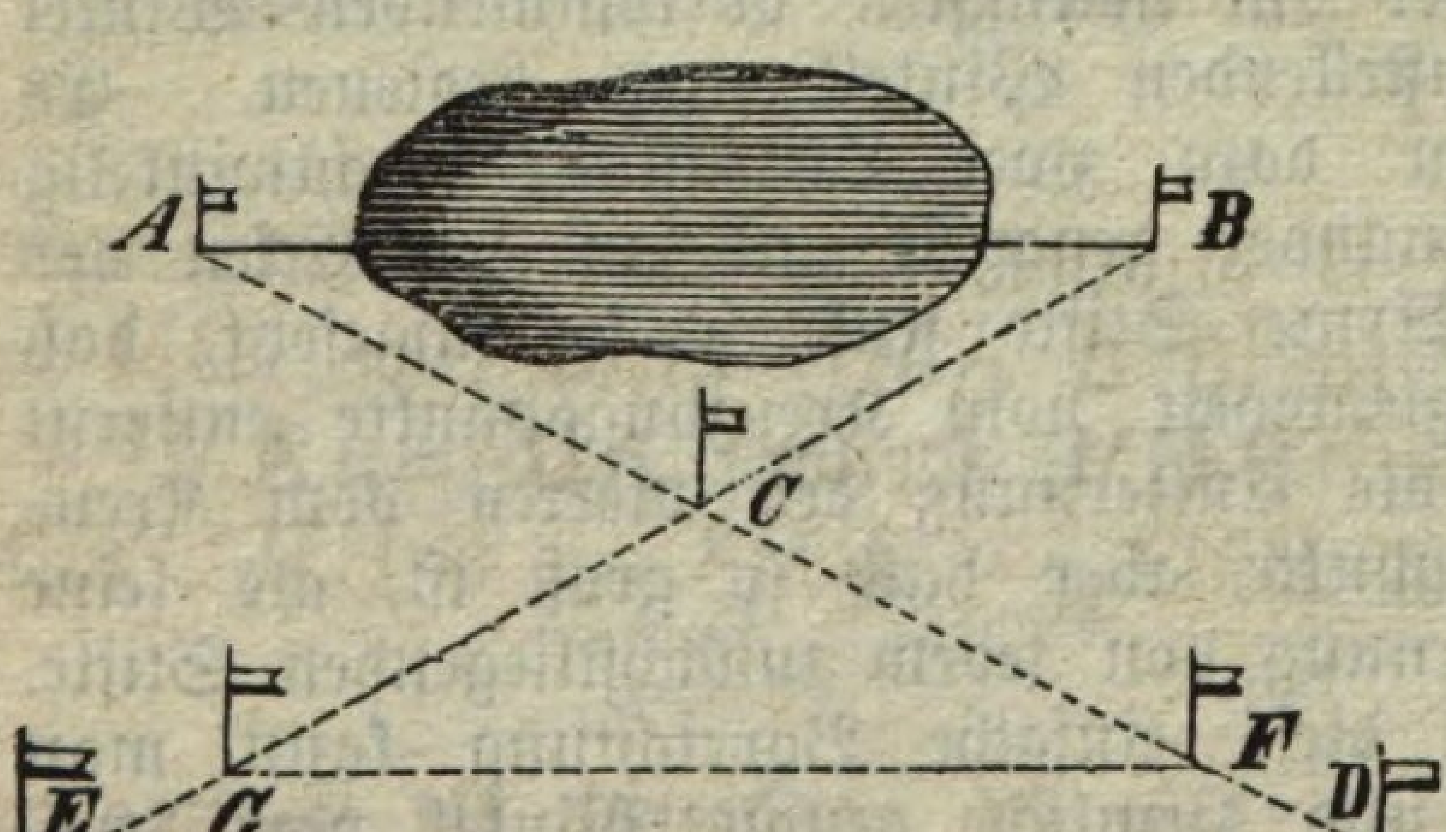
Beweis folgt aus §. 68.

Das Messen ungangbarer Entfernungen durch bloße Anwendung von Meßflaggen 2c. und eines Längenmessers.

§. 191.

Aufgabe: Die ungangbare Entfernung zweier Objecte A und B zu messen.

a. Wenn man von einem seitwärts liegenden Punkte C aus nach A und B messen kann.



1. Lösung: Man suche in dem Alignement AC einen Punkt D und in dem Alignement BC einen Punkt E auf und bezeichne beide Punkte durch Flaggen. Hierauf messe man von A nach C und dann in diesem Alignement weiter, bis man CF = AC gefunden hat. In F wird eine Flagge aufgestellt. Ebenso bestimme man in dem Alignement BC den Punkt G so, daß CG = BC ist. Zuletzt messe man GF, so ist diese Länge gleich AB.

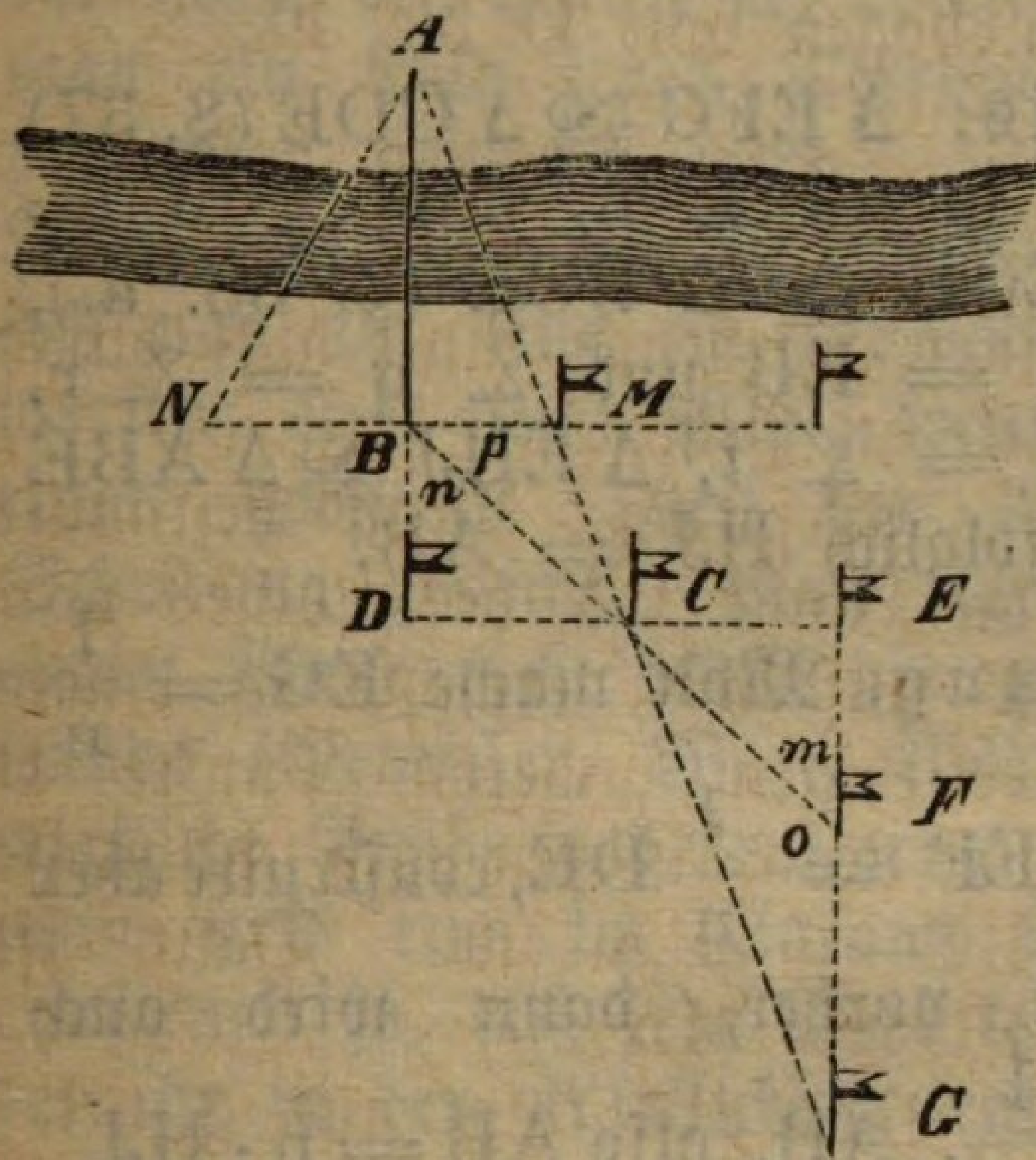
Beweis: Δ CGF $\cong$ Δ ABC (§. 37); alſo GF = AB.

2. Löſung: Wird CF $= \frac{1}{n}$ (z. B. $^1/_{10}$) AC und GC $= \frac{1}{n}$ BC gemacht, ſo iſt auch GF $= \frac{1}{n}$ AB, alſo AB = n · GF.

Beweis folgt aus §. 121.

3. Löſung: Man beſtimme den Punkt C ſo, daß $\measuredangle$ ACB = 1 R, dann iſt $AB^2 = AC^2 + BC^2$, alſo $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$.

b. Wenn man von einem ſeitwärts gelegenen Punkte C aus nur zu einem Objecte hin meſſen und ſich in der Verlängerung von AB aufſtellen kann.



1. Löſung: Man beſtimme in dem Alignement AB einen Punkt D und ſeitwärts einen Punkt C. Hierauf meſſe man von B nach C und in dieſem Alignement weiter, bis CF = BC gefunden iſt. Ebenſo beſtimme man CE = DC. Nun ſuche man einen Punkt G, welcher ſowohl in dem Alignement EF, als auch in dem Alignement AC liegt. Zuletzt wird FG gemeſſen; dieſe Linie iſt gleich AB.

Beweis: Δ CEF $\cong$ Δ BCD (§. 37), daher $\measuredangle$ m = $\measuredangle$ n, alſo auch $\measuredangle$ o = $\measuredangle$ p; Δ CFG $\cong$ Δ ABC (§. 38), folglich FG = AB.

2. Löſung: Wird CE $= \frac{1}{n}$ CD und CF $= \frac{1}{n}$ BC gemacht, ſo iſt auch FG $= \frac{1}{n}$ AB, alſo AB = n · FG.

Beweis folgt aus §. 121 in Verbindung mit §. 122.

3. Löſung: Man ſtecke eine Linie ab, welche auf AB im Punkte B lothrecht ſteht und beſtimme in dieſer Linie einen Punkt M ſo, daß $\measuredangle$ AMB = 60° iſt, alsdann iſt:

$$AB = \sqrt{3\,BM^2}.$$

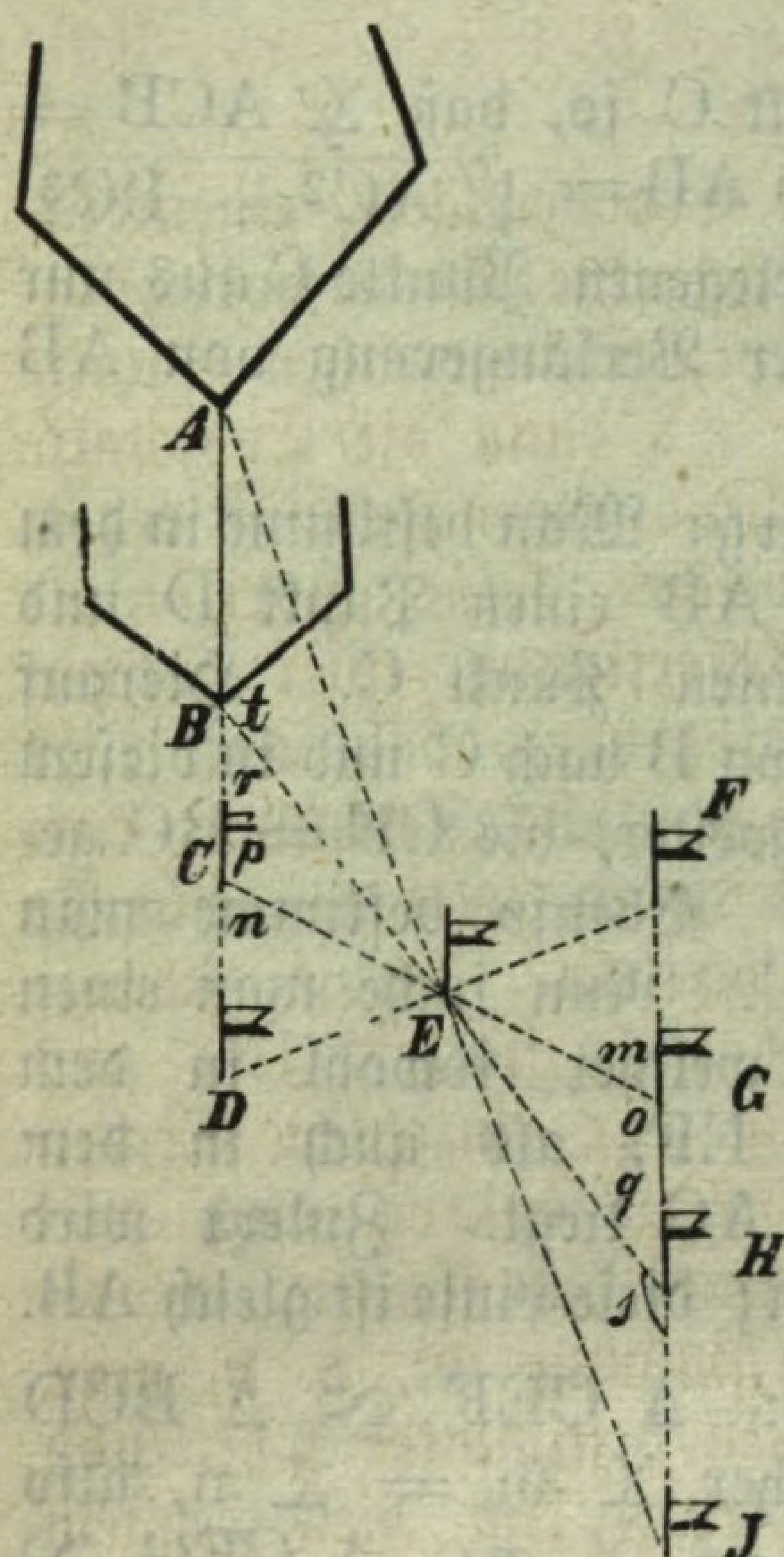
Beweis: Wird MB über B hinaus um ſich ſelbſt verlängert bis N und N mit A verbunden, ſo iſt Δ AMN gleichſeitig, BM = $^1/_2$ MN = $^1/_2$ AM, alſo AM = 2 BM, ferner: $AB^2 = AM^2 - BM^2 = (2\,BM)^2 - BM^2 = 4\,BM^2 - BM^2 = 3\,BM^2$, mithin $AB = \sqrt{3\,BM^2}$.

Anmerkung: 1) Auf dieſe Weiſe läßt ſich annähernd die Entfernung einer Batterie von dem zu beſchießenden Werke beſtimmen.

2) Beſtimmt man Punkt M ſo, daß $\measuredangle$ AMB = 45° wird, ſo iſt AB = BM. Dadurch entſteht aber der Nachtheil, daß man ſich von B beträchtlich weiter entfernen muß.

c. Wenn man sich zwar in der Verlängerung der beiden Objecte aufstellen, aber zu keinem derselben gelangen kann.

1. Lösung: Man bestimme in dem Alignement AB zwei Punkte C und D und wähle seitwärts einen dritten Punkt E. Hierauf messe man von C nach E und in dieser Richtung weiter bis EG = CE gefunden ist. Ebenso bestimme man F in dem Alignement DE so, daß EF = DE ist. Nun suche man in dem Alignement FG die Punkte H und J so, daß ersterer gleichzeitig in der Richtung BE, letzterer in der Richtung AE liegt und messe endlich HJ. Diese Linie ist gleich AB.



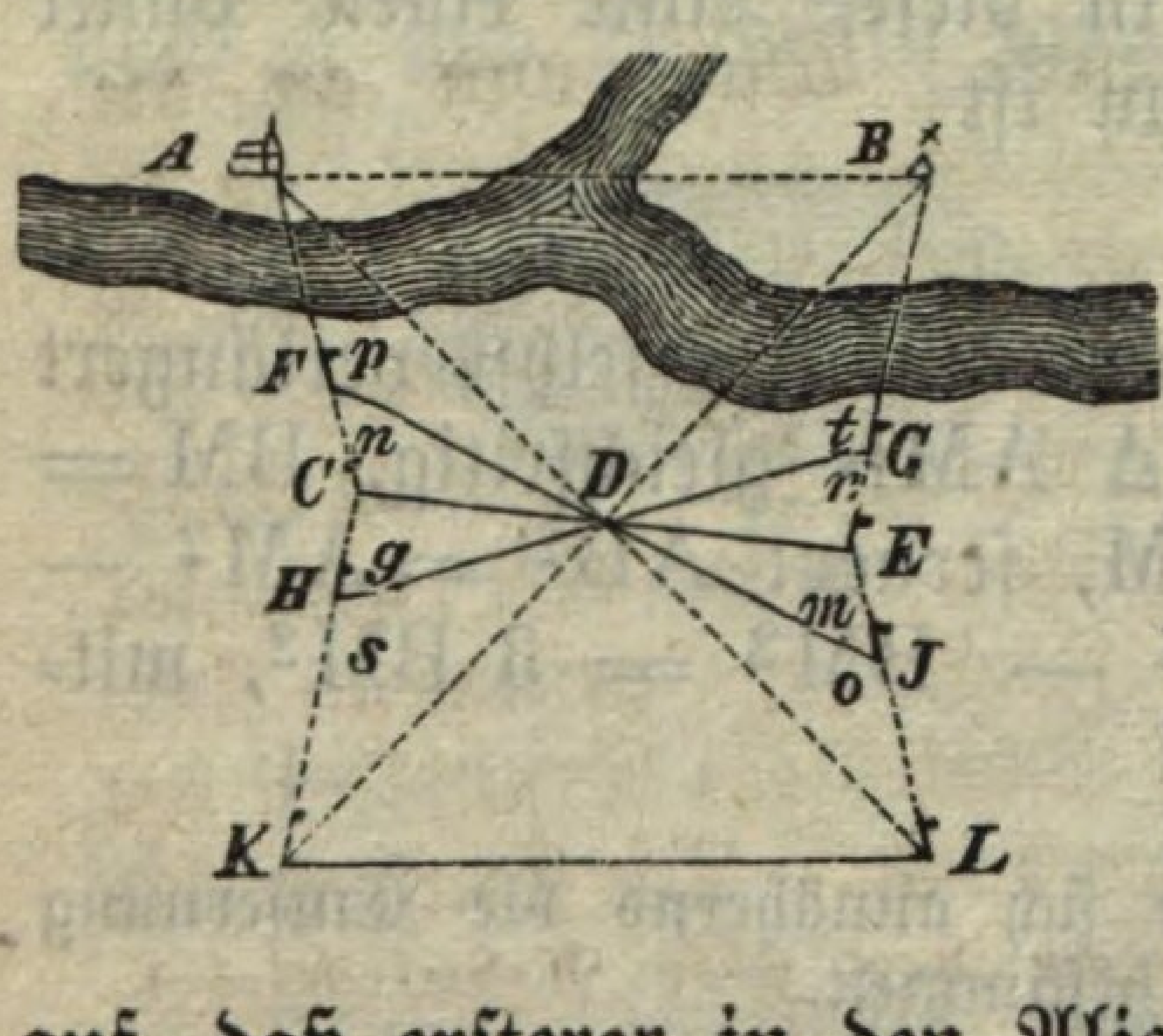
Beweis: Δ EFG $\cong$ Δ CDE (§. 37) daher $\measuredangle$ m = $\measuredangle$ n, also $\measuredangle$ o = $\measuredangle$ p, Δ EGH $\cong$ Δ BCE (§. 38. a.), daher EH = EB und $\measuredangle$ q = $\measuredangle$ r, also $\measuredangle$ s = $\measuredangle$ t, Δ EHJ $\cong$ Δ ABE (§. 38.), folglich HJ = AB.

2. Lösung: Man mache EG = $\frac{1}{n}$ CE und EF = $\frac{1}{n}$ DE, construire aber sonst wie vorher, dann wird auch HJ = $\frac{1}{n}$, AB, also AB = n · HJ.

Beweis folgt aus §. 121 in Verbindung mit §. 122.

3. Lösung: Man gehe rechtwinkelig zu AC seitwärts und bestimme in dieser Richtung zwei Punkte M und N so, daß die $\measuredangle$ BMC und $\measuredangle$ ANC = 60° oder = 45° sind, und messe endlich MN, so hat man zugleich die Entfernung AB.

d. Wenn man zu keinem der beiden Objecte gelangen und sich auch nicht in der Verlängerung derselben aufstellen kann.



Lösung: Man wähle seitwärts 2 Punkte C und D so, daß ungefähr CD $\perp$ AB liegt, und messe DE = CD ab. Nun bestimme man in dem Alignement AC den Punkt F und in dem Alignement BE den Punkt G beliebig, messe ferner in dem Alignement FD, die Länge DJ = FD und in dem Alignement GD die Länge DH = DG ab und suche endlich die Punkte K und L so auf, daß ersterer in den Alignements CH und BD, letzterer in den Alignements EJ und AD liegt. Das Maß der Linie KL ist dann gleich dem Maß von AB.

Beweis: $\Delta DEJ \cong \Delta CDF$ (§. 37), daher $\sphericalangle m = \sphericalangle n$, also $\sphericalangle o = \sphericalangle p$; $\Delta CDH \cong \Delta DEG$ (§. 37), daher $\sphericalangle g = \sphericalangle r$, also $\sphericalangle s = \sphericalangle t$; $\Delta DJL \cong \Delta ADF$ und $\Delta DHK \cong \Delta BDG$ (§. 38), daher $DL = AD$, $DK = BD$; $\Delta DKL \cong \Delta ABD$ (§. 37), folglich $KL = AB$.

§. 192.

Denkt man sich über einem Theile der Erdoberfläche, einem sogenannten Terrainabschnitt, eine (durchsichtig gedachte) Ebene horizontal ausgespannt, von jedem darunter liegenden bemerkenswerthen Punkte der Erde ein Loth auf diese Ebene gezogen und dann die Endpunkte der Lothe den Linien der Wirklichkeit entsprechend verbunden, so erhält man ein Bild jenes Terrainabschnittes, welches seine Horizontalprojection genannt wird. Die wirkliche Anfertigung einer solchen Horizontalprojection ist natürlich nicht ausführbar, wohl aber läßt sich von ihr eine im geometrischen Sinne ähnliche Zeichnung entwerfen; diese heißt Plan, wenn sie einen kleineren, Karte, wenn sie einen größeren Theil der Erdoberfläche darstellt. Eine strenge Scheidung zwischen Plan und Karte findet nicht statt. Um aus einem Plane nicht allein die gegenseitige Lage der einzelnen Gegenstände (Gewässer, Wege, Wälder, Gebäude &c.), sondern auch ihre wirkliche Größe und Entfernung leicht bestimmen zu können, wendet man stets eine im Voraus festgesetzte Verjüngung an, d. h. man construirt so, daß jede Linie der Zeichnung ein bestimmter Theil von der ihr in der Wirklichkeit entsprechenden wird. Um dies bequem ausführen zu können, entwirft man sich einen verjüngten Maßstab. Der Bruch, welcher den Grad der Verjüngung bestimmt, heißt Verjüngungsquotient. Die gebräuchlichsten Verjüngungsquotienten für militairische Pläne sind $\frac{1}{25000}$ und $\frac{1}{12500}$.

Die Anfertigung eines Planes beruht auf der Construction ähnlicher Dreiecke. Zunächst wird eine in dem abzubildenden Terrain vorhandene oder abgesteckte Linie, die sogenannte Basis, gemessen, und ihrer Verjüngung gemäß aufgezeichnet. Denkt man sich dann irgend einen der bemerkenswerthen Punkte des Terrains mit den Endpunkten der Basis verbunden, so entsteht ein Dreieck. Wird nun an die aufgezeichnete Basis ein diesem Dreiecke ähnliches angezeichnet, so ist offenbar die Spitze des gezeichneten Dreiecks der Punkt, welcher in der Zeichnung jenem Terrainpunkte entspricht, ihm ähnlich liegt. So lassen sich nach und nach alle zur Anfertigung des Planes nothwendigen Punkte festlegen, wobei man später, wenn erst von der Basis aus eine Anzahl Punkte auf der Zeichnung gefunden sind, auch die Verbindungslinie von zwei dieser Punkte als Grundlinie der zu construirenden ähnlichen Dreiecke benutzen kann. Die Construction ähnlicher Dreiecke kann mit Hülfe eines jeden der vier Aehnlichkeitssätze bewirkt werden, am leichtesten jedoch durch Antragen von Winkeln. Deshalb ist es für das praktische Aufnehmen, wie die Arbeiten, welche zur Anfertigung eines Planes nothwendig sind,

auch genannt werden, von besonderer Wichtigkeit, neben den Längenmessern, möglichst genaue Winkelmeßinstrumente zu besitzen. Die Kenntniß von der Einrichtung dieser zum Theil sehr kunstvoll gearbeiteten Instrumente, sowie das Verfahren beim Gebrauch derselben, ist Gegenstand einer besonderen Wissenschaft und Kunst, der sogenannten Vermessungskunst.

Nur ganz einfach gestaltete und kleine Theile der Erdoberfläche lassen sich mittelst bloßer Anwendung von Längenmessern hinreichend genau und ohne übermäßigen Zeitaufwand aufnehmen. Hiervon einige Beispiele.

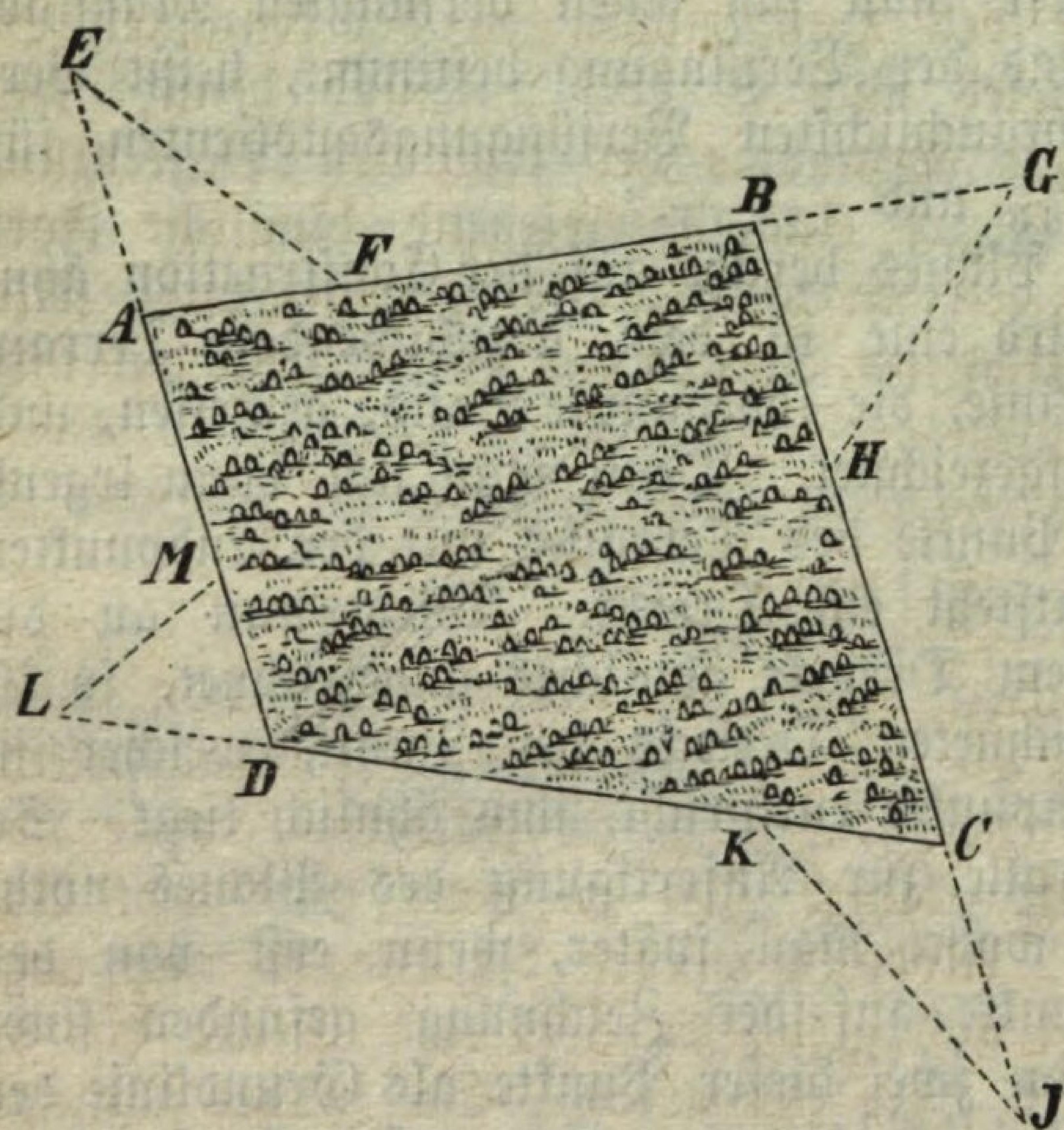
§. 193.

Aufgabe: Eine geradlinige Figur durch directe Messung von Linien aufzunehmen.

a. Wenn man das Innere der Figur frei betreten kann (z. B. einen Exercierplatz, eine Wiese, ein Stück Ackerland rc.)

Lösung: Man entwerfe von der Figur nach dem Augenmaße eine Zeichnung, eine sogenannte Brouillonzeichnung. Dann denke man sich die Figur von einer Winkelspitze aus durch Diagonalen, oder auch dadurch, daß man einen im Innern liegenden Punkt mit allen Ecken verbindet, in Dreiecke zerlegt, messe sämmtliche Seiten der Dreiecke und trage die gefundenen Maßzahlen in die Brouillonzeichnung ein. Hiernach läßt sich dann leicht die verlangte Figur im verjüngten Maßstabe zeichnen.

2) Wenn man innerhalb der Figur keine Messungen vornehmen kann oder will (z. B. ein Gebüsch, ein Dorf rc.)



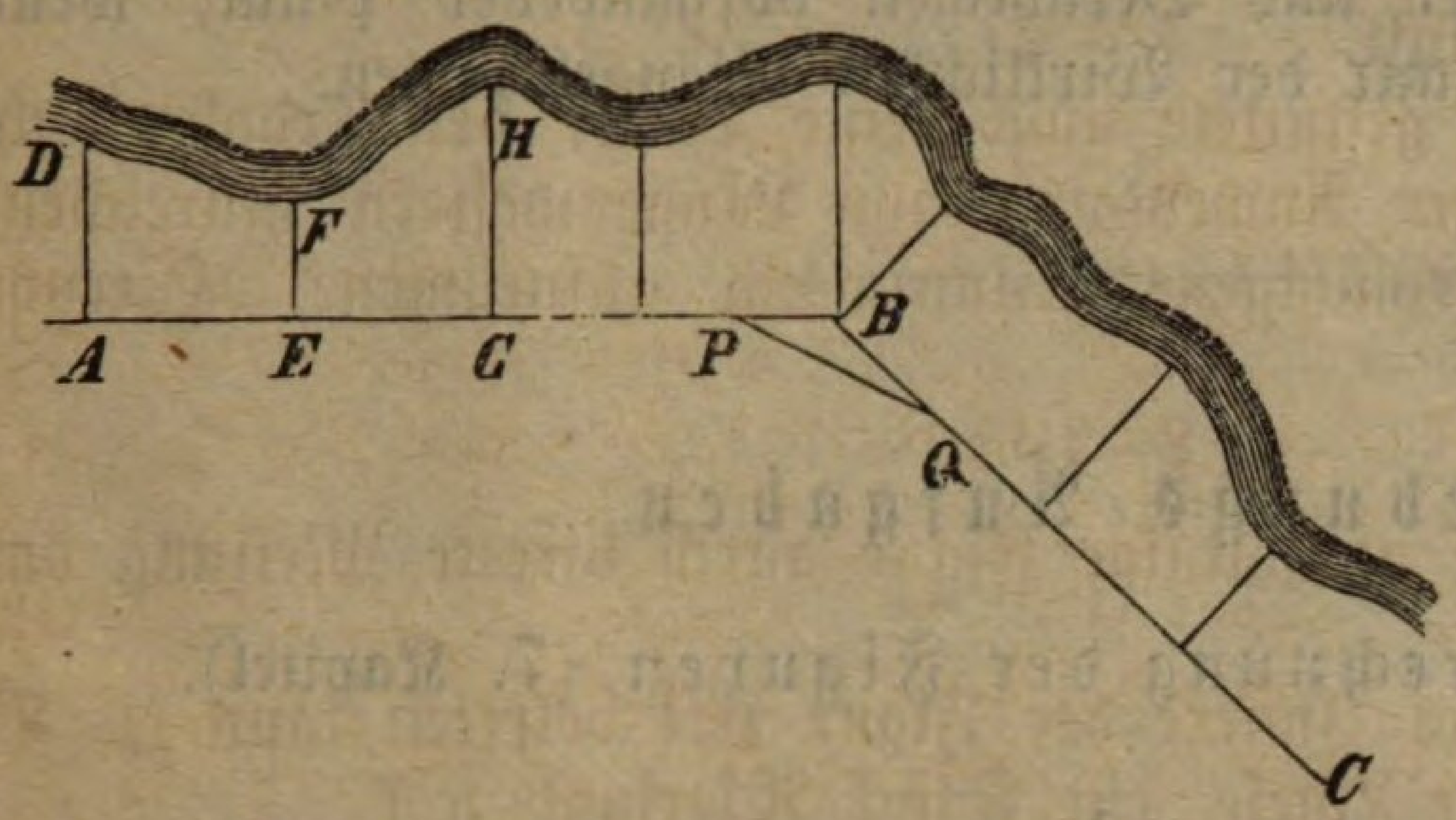
Lösung: Man stecke an den Ecken der Figur (ABCD) Dreiecke AEF, BGH u. s. w. ab, durch deren Construction sich die Winkel der Figur ergeben, messe dann die Seiten der Figur und der abgesteckten Dreiecke, trage die gefundenen Maßzahlen in eine Brouillonzeichnung ein und construire hiernach die gewünschte Zeichnung nach einem verjüngten Maßstabe.

Anmerkung. Dieses Verfahren wird das Aufnehmen einer Figur durch Umziehen genannt.

§. 194.

Aufgabe: Eine krumme Linie aufzunehmen (z. B. das Ufer eines Baches).

Lösung: Man stecke seitwärts der krummen Linie, ihrer Hauptrichtung folgend, eine gerade Linie, oder bei bedeutender Richtungsänderung auch mehrere zusammenhängende gerade Linien ab (ABC) und errichte auf diesen nach den Hauptwendepunkten der krummen Linie hin Lothe. Mißt man nun die Lothe AD, EF, GH u. s. w. und ihre Entfernungen vom Anfangspunkte A, sowie auch die Seiten des Dreiecks PBQ, durch welches der Winkel ABC bestimmt wird, und trägt die gefundenen Maßzahlen in eine Brouillonzeichnung ein, so lassen sich hiernach in der Reinzeichnung die wichtigsten Punkte der krummen Linie festlegen und dann diese selbst nach dem Augenmaße mit der erforderlichen Genauigkeit darstellen.



Die geraden Linien, auf welche die Lothe errichtet sind, werden die Abscissenlinien, die Lothe selbst Ordinaten und die Entfernungen der letzteren vom Anfangspunkte der Abscissenlinie Abscissen genannt.

§. 195.

Aufgabe: Eine krummlinige Figur aufzunehmen.

Lösung: Man stecke innerhalb oder außerhalb der Figur ein Polygon ab, dessen Seiten den Hauptrichtungen der krummen Begrenzung folgen, nehme dieses nach §. 193 auf und benutze seine Seiten als Abscissenlinien zur Aufnahme der krummen Begrenzung.

Hat die krummlinige Figur eine überwiegend längliche Form und kann ihr Inneres frei betreten werden, so genügt nicht selten auch eine Abscissenlinie, welche im Innern der Figur liegt und ihrer Hauptausdehnung folgt.

§. 196.

Krokiren. Nicht selten wird es nothwendig, von einem kleineren Terrainabschnitt, z. B. einem Dorfe, einer Geschützaufstellung mit nächster Umgebung &c. eine Zeichnung zu entwerfen, ohne über Aufnahmeinstrumente und die nöthige Zeit zu einer wirklichen Aufnahme verfügen zu können. Alsdann werden die Längen nur abgeschritten, die Winkel geschätzt und gleich an Ort und Stelle ein der Wirklichkeit möglichst getreues Bild entworfen. Ein solches flüchtiges Aufnehmen wird Krokiren genannt; die dadurch erhaltene Zeichnung heißt ein Krokis. Um einen bequemen Anhalt beim Auftragen der abgeschrittenen Längen zu haben, überzieht man gewöhnlich das Krokirblatt mit einem Netz von Quadraten, deren Seitenlänge nach dem gewählten Verjüngungsquotienten einem bestimmten Maße entspricht

(z. B. 300 Meter bedeutet). Oft wird es außerdem möglich sein, aus einem vorhandenen Plane oder einer Specialkarte für das Krokis mehr oder weniger Anhaltspunkte zu entnehmen.

Eine ausgedehnte Anwendung findet das Krokiren ferner auch bei dem Vervollständigen und Berichtigen vorhandener Pläne, wenn diese beim Vergleichen mit der Wirklichkeit Mängel zeigen.

Uebungs-Aufgaben.

a. Inhaltsberechnung der Figuren (7. Kapitel).

1.

Wie groß ist die Oberfläche einer $2{,}8^m$ breiten und $5{,}6^m$ langen Bettung?

Antwort: $15{,}68 \square^m$.

2.

Quer über einen Exercierplatz von 345^m Breite hinweg wird ein $2{,}5^m$ hoher Damm, dessen obere Breite $1{,}5^m$ beträgt und der auf beiden Seiten ganze Anlage hat, aufgeschüttet. Wieviel Flächenraum geht dadurch dem Exercierplatz verloren?

Antwort: $22 \square^{Dm}\ 42{,}5 \square^m$.

3.

A wünscht über den Acker des B in der Längenrichtung hinweg, einen $5{,}6^m$ breiten Weg weiter fortführen zu dürfen. B erlaubt dies unter der Bedingung, daß ihm an der Länge seines Ackers doppelt so viel von dem Gute des A zugesetzt werde, als er durch den Weg verliert. Um wieviel Meter muß sein Acker, welcher $903{,}9^m$ Länge und $75{,}3^m$ Breite hat, länger gemacht werden?

Antwort: Um $145{,}246^m$.

4.

Einer Batterie sollen an der inneren Böschung eines Walles $800 \square^m$ Grasnutzung übergeben werden. Die Böschung hat ganze Anlage und auf der schrägen Fläche gemessen eine Breite von 6^m. Wenn nun der Erfahrung nach auf einer schrägen Fläche im Allgemeinen nicht mehr wächst als auf ihrer Horizontalprojection, welche Länge muß die Grasnutzung erhalten? (§. 80.)

Antwort: $188{,}68 \ldots^m$.

5.

Ein Pulvermagazin in Form eines Rechteckes ist 17,2 ^{m} lang und 5,4 ^{m} breit. In 2 ^{m} Entfernung wird es von einem Lattenzaune umgeben. Wie groß ist die zwischen Magazin und Zaun gelegene Fläche?

Antwort: 106,4 □ ^{m}.

6.

Wie groß ist der Lagerraum einer vierseitigen regulären Redoute, wenn die Feuerlinie jeder Seite 54 ^{m}, die Anlage der inneren Böschung 0,3 ^{m} beträgt, das Bankett 0,9 ^{m} breit und hoch ist und der Anlauf doppelte Anlage hat?

Antwort: 2304 □ ^{m}.

7.

Wie lang muß unter den Verhältnissen der vorigen Aufgabe die Feuerlinie mindestens gemacht werden, um den Lagerraum für 250 Mann und 2 Geschütze zu erhalten? Zum Lagern rechnet man auf jeden Mann 2 ^{m} Länge und 0,9 ^{m} Breite und für jedes Geschütz ist ein Raum von 56 □ ^{m} in Anschlag zu bringen.

Antwort: 29,7 . . . ^{m}.

8.

In einer Flesche, deren Kehle durch 620 Pallisaden von durchschnittlich 15 ^{cm} Breite in gerader Linie geschlossen ist, findet man die Entfernung der Spitze des inneren Raumes von der Pallisadenreihe = 86,2 ^{m}; wie groß ist der innere Raum?

Antwort: 4008,3 □ ^{m}.

9.

Die Höhe eines Dreiecks von 15 □ ^{m} 7472 □ ^{cm} Inhalt mißt 6 ^{m} 8 ^{cm}, wie lang ist die Grundlinie?

Antwort: 5 ^{m} 18 ^{cm}.

10.

Wie groß ist der Querdurchschnitt eines Dammes von 2 ^{m} Höhe und 1,2 ^{m} Kronenbreite, wenn derselbe auf einer Seite ganze, auf der anderen Seite doppelte Anlage hat?

Antwort: 8,4 □ ^{m}.

11.

Um die Grenze eines Schießplatzes zu regeln, wird ein Stück Ackerland zu dem Preise von 26 Mark pro Ar angekauft. Wieviel ist zu zahlen, wenn die angekaufte Fläche die Form eines Paralleltrapezes von 65,2 ^{m} Höhe hat und die eine der parallelen Seiten 54,2 ^{m}, die andere 72,8 ^{m} mißt?

Antwort: 1076 Mark 45 Pfennige.

12.

Wieviel aber, wenn das angekaufte Stück Land die Gestalt eines Dreiecks mit den Seiten $85{,}4^m$, $92{,}6^m$ und 122^m hat.

Antwort: 1026 Mk. 17 Pfg.

13.

Wie groß ist bei einer Horizontalbatterie mit 6^m Kronenstärke und $2{,}2^m$ Höhe, a. die mittlere Brustwehrstärke? b. der Querdurchschnitt des Brustwehrkörpers? Für die innere Brustwehrböschung ist $^1/_4$, für die äußere ganze Anlage in Rechnung zu stellen.

Antwort: a. $7{,}375^m$, b. $16{,}225\,\square^m$.

14.

Um beim Bau der Feldschanzen die nothwendige Erde zu erhalten, macht man den Flächenraum des Grabenprofils gleich dem des Brustwehrprofils. Wie breit muß demnach der Graben eines Feldwerkes werden, wenn derselbe 3^m Tiefe, an der Escarpe ganze, an der Contreescarpe halbe Anlage erhalten und wenn das Profil der Brustwehr folgende Abmessungen bekommen soll:

Bankett: doppelte Anlage, $1{,}6^m$ Breite, 1^m Höhe.

Brustwehrkörper: 4^m Stärke, hinten $2{,}2^m$ Höhe und $0{,}3^m$ Anlage, vorn $1{,}6^m$ Höhe und ganze Anlage.

Antwort: Unten $1{,}74^m$, oben $6{,}236^m$.

15.

Zu einer einfachen Strohhütte, deren Querdurchschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck von $1{,}8^m$ Höhe und $1{,}4^m$ Grundlinie werden soll, ist die Länge der erforderlichen Pfähle zu berechnen. Dabei ist anzunehmen, daß dieselben $0{,}5^m$ in die Erde eingeschlagen und $0{,}3^m$ über den äußeren Kreuzungspunkt hinausragen sollen.

Antwort: $2{,}7\ (2{,}73132\ldots)^m$.

16.

Eine in Form eines Rechteckes abgesteckte Reitbahn hat einen Inhalt von 8,96 Ar. Wie lang sind die Seiten, wenn die eine doppelt so groß ist als die andere?

Antwort: $21{,}16601^m$ und $42{,}33202^m$.

b. Aehnlichkeit der Figuren.

17.

In welcher Entfernung von der Schußebene wird bei 8^{mm} Seitenverschiebung die verlängerte Visirlinie ein 1250^m vom Korn entferntes und zur Seelenachse senkrecht gedachtes Ziel treffen,

a. beim gez. 8^{cm} Geschütz, dessen Visirlinie $984{,}9^{mm}$
b. „ „ 9^{cm} „ „ „ $2013{,}9^{mm}$ beträgt?

Antwort: a. $10{,}1533\ldots^m$, b. $4{,}966\ldots^m$.

18.

Man hat auf 2100^{m} Entfernung 2^{m} zu weit links geschossen. Muß man mehr oder weniger Seitenverschiebung nehmen und wieviel? a. beim gez. 8^{cm} Geschütz, b. beim gez. 9^{cm}?

Antwort: Weniger, a. 0,9 (0,938)^{mm}, b. 2 (1,918)^{mm}.

19.

Man will beim gez. 8^{cm} Geschütz bei 1400^{m} Entfernung den Treffpunkt 6^{m} höher legen, wieviel Aufsatz ist mehr zu nehmen?

Antwort: 4 (4,221)^{mm}.

20.

In welcher Entfernung von der Brustwehr schneiden sich die unteren Kanten der Schartenbacken einer vorn 2,5^{m} und hinten 78^{cm} weiten Scharte, wenn die Brustwehrstärke 6^{m} beträgt? (§. 126. 2 Thl. und §. 116. 1. Thl.)

Antwort: 2,72^{m}.

21.

Wie breit ist das Gesichtsfeld einer solchen Scharte auf 1000^{m} Entfernung?

Antwort: 287,5^{m}.

22.

Bei einem gez. 8^{cm} Geschütz, dessen Visirlinie 98,49^{cm} beträgt, ist das Korn um 2^{mm} zu niedrig. Wieviel Meter beträgt der Richtungsfehler an einem 1200^{m} vom Visir entfernten, der Aufsatzstange parallel stehenden Ziele gemessen?

Antwort: 2,437^{m}.

23.

Bei einer Belagerungsbatterie von 4 Geschützen läßt sich das linke Flügelgeschütz verleiten, denselben künstlichen Zielpunkt und auch dieselbe Seitenverschiebung zu benutzen, mit welcher das rechte Flügelgeschütz wiederholt gut getroffen hat. Um wieviel Meter wird es, der Rechnung nach, zu weit rechts schießen, wenn das gemeinschaftliche Ziel 1000^{m}, der künstliche Zielpunkt 600^{m} entfernt liegt und die Entfernung der Scharten von einander 5,8^{m} beträgt?

Antwort: 11,6^{m}.

24.

Wie groß kann unter Annahme desselben Zieles und Zielpunktes der Richtungsfehler bei einem gez. 12^{cm} Geschütz, welches durch eine 78^{cm} weite Scharte feuert, dadurch werden, daß man das Rohr nicht in die Mitte der Scharte, sondern dicht an eine Schartenbacke bringt? (Durchmesser des Rohrs ist = 28^{cm} zu setzen.)

Antwort: 16,666...^{cm}.

25.

Wie groß aber, wenn das Ziel 2500 m und der künstliche Zielpunkt nur 200 m entfernt läge?

Antwort: 2,875 m.

c. Kreisberechnungen.

26.

Wie groß ist der Umfang eines Rades, dessen Durchmesser 1 m 55,6 cm beträgt ($\pi = 3,14$.)

Antwort: 4,88 ... m.

27.

Wieviel Umdrehungen macht ein solches Rad auf einer Meile Weges?

Antwort: 1537.

28.

Wie weit ist man gefahren, wenn man bei einem solchen Rade 1860 Umdrehungen gezählt hat?

Antwort: 1 Meile 1576 m.

29.

Der Durchmesser einer Faschine soll 0,3 m betragen; wie groß ist ihr Umfang?

Antwort: 0,942 ... m.

30.

Man mißt den Umfang eines Baumstammes = 9 m 25 cm; wie groß ist der Durchmesser und wie groß der Querdurchschnitt desselben?

Antwort: a. 2,94 m; b. 6,78 □ m.

31.

Im Felde sollen 8 cm Kartuschen angefertigt werden und man will die verloren gegangene Bodenschablone aus Pappe anfertigen. Mit welchem Radius ist dieselbe vorzuzeichnen, da die rechteckige Mantelschablone eine Breite von 120 mm hat?

Antwort: 38,2 mm.

32.

Ein Meter ist der zehnmillionste Theil eines Erdmeridianquadranten; wie groß ist darnach annähernd a. der Umfang, b. der Halbmesser unserer Erde in Meilen ausgedrückt?

Antwort: a. 5333,33 ..., b. 849 Meilen.

33.

Der Durchmesser der Seele des 9^{cm} Geschützrohres beträgt in den Zügen gemessen 94^{mm}; es hat 18 Züge, welche doppelt so breit als die Felder sind. Wie breit sind hiernach annähernd seine Züge und seine Felder?

Antwort: a. 10,94^{mm}, b. 5,47^{mm}.

34.

Wie weit ist bei der 23^{cm} Granate, deren Durchmesser 22,2^{cm} beträgt, der Leichtpol vom Querstrich entfernt, a. auf der Oberfläche der Kugel, b. in gerader Linie gemessen?

Antwort: a. 17,43^{cm}, b. 15,7 (15,697 . . .)^{cm}.

35.

Ein Kreis soll 86 □^{m} Inhalt bekommen; a. wie groß muß sein Durchmesser werden? b. Wie groß sein Umfang?

Antwort: a. 10,46 . . .^{m}, b. 32,84 . .^{m}.

36.

Wie groß ist ein Kreisausschnitt, dessen Radius 3^{m} 6^{cm} und dessen Centriwinkel 48° 30′ mißt?

Antwort: 3 □^{m} 9631 □^{cm} ($\pi = 3{,}1415927$).

37.

Beim 28^{cm} Mörser beträgt der Durchmesser der Mündung 28,38^{cm} und der Durchmesser der Mundfriese 52,31^{cm}; wieviel Inhalt hat seine Mündungsfläche?

Antwort: 1516,534 □^{cm} ($\pi = 3{,}1415927$).

d. Körperberechnungen.

38.

Wieviel Kubikmeter Luft enthält eine Stube, welche 5^{m} lang, 4,5^{m} breit und 3,2^{m} hoch ist?

Antwort: 72 Kb^{m}.

39.

Wieviel Kubikmeter Holz sind in 100 Kiefern-Bohlen enthalten von welchen jede 3^{m} lang, 0,3^{m} breit und 8^{cm} stark ist?

Antwort: 7,2 Kb^{m}.

40.

Wie schwer sind ungefähr diese Bohlen, da das specifische Gewicht des Kiefernholzes = 0,76 ist?

Antwort: 5472 Kgr.

41.

Aus 1,5 ^{m} langem Klobenholze sollen 6 Kb^{m} zwischen 2,5 ^{m} von einander entfernt stehenden lothrecht in die Erde geschlagenen Pfählen aufgeschichtet werden; wie hoch hat man das Holz zu setzen?

Antwort: 1,6 ^{m}.

42.

Ein Exercierplatz hat die Gestalt eines Trapezes, dessen parallele Seiten 125 ^{m} und 196 ^{m} und dessen Höhe 86 ^{m} mißt. Derselbe soll 8 ^{cm} hoch mit Kies überschüttet werden. a. Wieviel Kubikmeter Kies braucht man dazu? b. Wieviel Fuhren sind nöthig, wenn auf jede 1,4 Kb^{m} gerechnet werden? c. Wieviel kostet der Kies, wenn die Fuhre mit 75 Pfg. bezahlt wird?

Antwort: a. 1104,24 Kb^{m}, b. 789 (788,74) Fuhren, c. 591 Mk. 75 Pf.

43.

Eine Futterkiste mit rechteckigem Querdurchschnitt soll 6 Hektoliter Hafer fassen, im Lichten 1,6 ^{m} lang werden und — um den Verbrauch an Hafer leicht controliren zu können — im Innern eine Scala von Centimeter zu Centm. erhalten, so daß auf je einen Centm. 8 Ltr. kommen. Wie breit und wie hoch muß man diese Kiste bestellen?

Antwort: Im Lichten 50 ^{cm} breit und 75 ^{cm} hoch.

44.

Ein in Cylinderform ausgemauerter Wasserbehälter ist 2,5 ^{m} tief und hat einen Durchmesser von 3,2 ^{m}; wieviel Wasser faßt derselbe?

Antwort: 20096 Ltr.

45.

Wie hoch muß ein cylindrisches Gefäß bei einem Durchmesser von 86 ^{mm} gemacht werden, wenn es 1 Liter fassen soll? ($\pi = 3{,}1415927$).

Antwort: 172,1 ^{mm}.

46.

Wieviel Kilo Pulver faßt die Kammer eines 23 ^{cm} Mörsers alter Art? Dieselbe ist 20,9 ^{cm} lang und 9,9 ^{cm} weit; das specifische Gewicht des Pulvers beträgt 0,9. (Die Abrundung am Boden ist unberücksichtigt zu lassen.)

Antwort: 1 k. 447,2 gr.

47.

Ein Avancirter soll 50 Hektoliter Hafer empfangen. Zum Abmessen ist kein anderes Gefäß als ein Hohlcylinder mit 0,6 ^{m} Durchmesser und 0,2 ^{m} Höhe vorhanden. Wie oft muß dieses Gefäß vollgefüllt werden?

Antwort: 88,46 mal.

48.

Einem anderen Avancirten sind 100 Neuscheffel Hafer zugemessen worden. Beim Revidiren des Gemäßes findet er jedoch, daß dieses bei einem Durchmesser von 460^{mm} 4^{mm} zu niedrig ist. Wieviel Hafer hat der Avancirte noch zu empfangen, a. nach richtigem Gemäß? b. mit dem benutzten Gemäß gemessen?

Antwort: a. 66,4424 Ltr., b. $1^1/_3$ (1,34 . . .) des Gemäßes.

49.

Eine cylindrische Säule von 0,4^m Durchmesser und 2,5^m Höhe ist mit Oelfarbe gestrichen worden und der Maler setzt auf die Rechnung: 3,41 □^{m} à □^{m} 50 Pfg. = 1 Mk. 70 Pfg. Hat er richtig gerechnet?

Antwort: Nein. Es sind 3,14 □^{m} und zu zahlen 1 Mk. 57 Pfg.

50.

Wieviel Kubikinhalt hat eine 8^m hohe Pyramide, wenn ihre Grundfläche 1,2 □^{m} mißt?

Antwort: 3,2 Kb^m.

51.

Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist 3,3^m hoch und enthält 5,819 Kb^m; wie groß ist ihre Grundkante?

Antwort: 2,3^m.

52.

Ein Zelt in Gestalt eines geraden Kegels hat 3,3^m Höhe und einen Durchmesser von 3^m. a. Wieviel Kubikmeter Raum umschließt dasselbe? b. wie groß ist die Oberfläche dieses Zeltes?

Antwort: a. 7,7715 Kb^m, b. 17,05 □^{m}.

53.

Wie groß müßte man die Höhe eines solchen Zeltes machen, um bei demselben Durchmesser einen Rauminhalt von 9 Kb^m zu erhalten?

Antwort: 3,82^m.

54.

Ein 10^m langer Baumstamm von der Form eines abgekürzten Kegels hat am Stammende einen Durchmesser von 56^{cm} und am Zopfende von 22^{cm}; wieviel Kubikmeter Holz enthält derselbe? (§. 173.)

Antwort: 1 Kb^m 269 Kb^{dm} 606,6 . . . Kb^{cm}.

55.

Welches Resultat ergiebt sich aber, wenn man der einfacheren Rechnung wegen diesen Baumstamm als Cylinder von mittlerem Durchmesser in Rechnung stellt?

Antwort: 1 Kb^m 193 Kb^{dm} 985 Kb^{cm}.

56.

Wie groß ist die innere kugelförmige Höhlung einer 28^{cm} Bombe, da ihr Durchmesser $186,2^{mm}$ beträgt?

Antwort: 3378 Kb^{cm} 449,5 Kb^{mm}.

57.

Wieviel Demantfarbe ist zum Anstreichen von 1000 23^{cm} Bomben erforderlich, wenn 1 ℔ Farbe circa 15 $\square^{m}$ Eisen deckt? (Durchmesser der 23^{cm} Bombe = $22,2^{cm}$; die Mundlöcher sind annähernd als Kreisflächen mit $3,4^{cm}$ Durchmesser in Absatz zu bringen.)

Antwort: 10,256 ... ℔.

58.

Die Kugel des Probirmörsers hat $18,31^{cm}$ Durchmesser; wie schwer ist dieselbe ungefähr? Das specifische Gewicht der Bronze ist = 8,79; auf die Ausbohrung für die Schraube des Handgriffs ist keine Rücksicht zu nehmen.

Antwort: 28,24 Kilo.